5. GARRAIO-PROBLEMA ETA ESLEIPEN-PROBLEMA

1. Garraio-problema
2. Matrize-forma
3. Adibide praktikoak
4. Teoremak eta definizioak
5. Hasierako oinarriko soluzio bideragarria
   - 5.1 Ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa
   - 5.2 Vogel-en metodoa
6. Oinarriko soluzio bideragarrien hobekuntza
   - 6.1 Oinarrian sartuko den bektorearen aukeraketa
   - 6.2 Oinarritik aterako den bektorearen aukeraketa
7. Garraio-taula
8. Garraio-problemarako algoritmoa
9. Garraio-problemarako algoritmoaren aplikazioa
   - 9.1 Soluzio endekatua
   - 9.2 Soluzio optimo anizkoitza. Adibideak
10. Esleipen-problema
    - 10.1 Metodo hungariarra
    - 10.2 Esleipen-problemarako algoritmoa
    - 10.3 Maximizatze-problema
    - 10.4 Soluzio optimo anizkoitza. Adibidea

1. Garraio-problema

m iturburu-puntutatik, $I_1, \dots, I_m$, n helburu-puntutara, $H_1, \dots, H_n$, produktu baten unitateak garraiatzea, non

- I_i, $i = 1, \dots, m$, iturburuen eskaintza: a_i.
- H_j, $j = 1, \dots, n$, helburuen eskaria: b_j.
- I_i iturburutik H_j helburura produktu-unitate bat garraiatzearen kostua: c_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

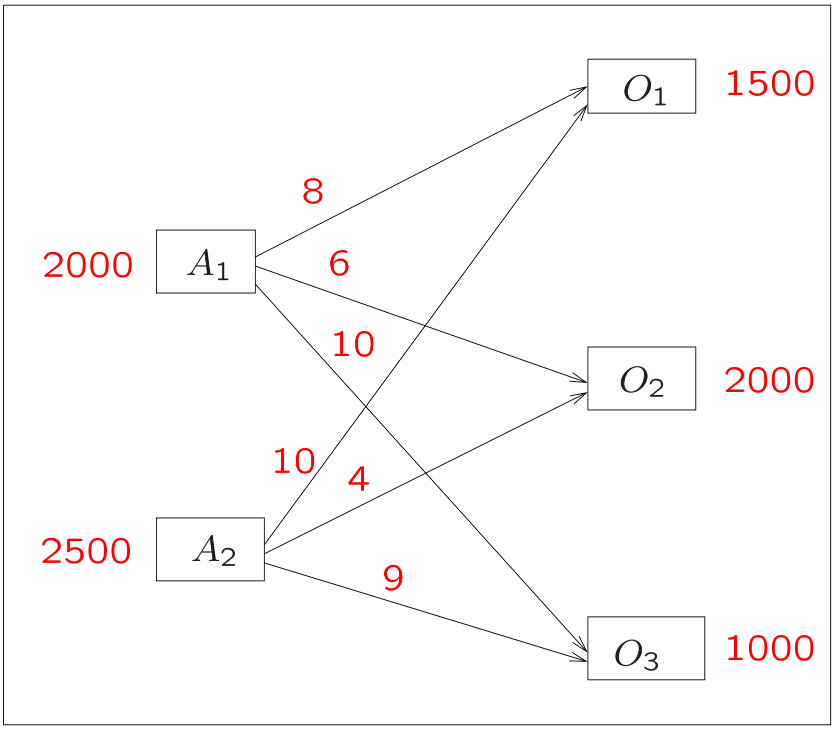
I_i bakoitzetik H_j bakoitzera garraiatuko den x_{ij} produktu-unitate kopurua erabakitzean datza problema.

Helburua: garraioa kostu minimoan egitea.

Eredu lineala:

$$
\begin{aligned}
\min \quad z &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
\text{hauen mende} & \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = 1, \dots, m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \quad j = 1, \dots, n \\
x_{ij} \ge 0, \quad & i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$

Adibidea



x_{ij}: A_i-tik O_j-ra garraiatuko den ogi kopurua.

$$\min\ z = 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 10x_{21} + 4x_{22} + 9x_{23}$$

hauen mende

$$\begin{array}{llllllr}
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & & & & = 2000 \\
 & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & = 2500 \\
x_{11} & & & +x_{21} & & & = 1500 \\
 & x_{12} & & & +x_{22} & & = 2000 \\
 & & x_{13} & & & +x_{23} & = 1000
\end{array}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$$

Eskaintza totala eta eskari totala berdinak badira, murrizketak berdintzaz idatzi.

Eredua matrize-forman:

$$\min\ z \quad = (8\ ,\ 6\ ,\ 10\ ,\ 10\ ,\ 4\ ,\ 9)\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}$$

hauen mende

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 2500 \\ 1500 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$$

2. Matrize-forma

Garraio-problemarako matrize-forma edo garraio-kostuen taula:

	H_1	H_2	$\cdots$	H_n	Eskaintza
I_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
I_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
I_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
Eskaria	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

Adibidea

	O_1	O_2	O_3	Eskaintza
A_1	8	6	10	2000
A_2	10	4	9	2500
Eskaria	1500	2000	1000	

4. Teoremak eta definizioak

1. Teorema *Garraio-problemak soluziorik izan dezan, baldintza beharrezkoa eta nahikoa da eskaintza totala eta eskari totala berdinak izatea.*

Garraio-problema bat orekatua dela esaten da baldin $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Problema orekatzean, bi kasu:

1. $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$. Gezurrezko iturburua: I_{m+1}.

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i, \quad c_{m+1,j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

2. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$. Gezurrezko helburua: H_{n+1}.

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j, \quad c_{i,n+1} = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

2. Teorema *Garraio-problema orekatu orok badu soluzio bideragarririk.*

3. Teorema *Garraio-problema orekatu orok badu oinarriko soluzio bideragarririk. Soluzio horrek* $m+n-1$ *aldagai positibo ditu gehienez.*

5. Hasierako oinarriko soluzio bideragarria

Garraio-problemarako soluzio bat kalkulatzeko, garraio-kostuen taularen dimentsio berberak dituen beste taula bat erabiliko dugu: garraio-fluxuen taula.

Bertan kokatuko ditugu garraio-fluxuak; iturburu-puntu bakoitzetik helburu-puntu bakoitzera garraiatuko diren produktu unitate kopuruak.

Garraio-fluxuen taula:

	H_1	H_2	$\cdots$	H_n	Eskaintza
I_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}	a_1
I_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
I_m	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	x_{mn}	a_m
Eskaria	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

Ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa eta Vogel-en metodoa garraio-fluxua kokatzeko posizioa aukeratzeko moduan desberdintzen dira, algoritmoaren 1. urratsean.

Garraio-problema orekatu behar da algoritmoak aplikatu aurretik.

5.1 Ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa

1. **urratsa**. Garraio-fluxuen taulan ipar-mendebaldeko (i, j) ertza aukeratu (hasieran $i = 1$, $j = 1$).

2. **urratsa**. Aukeratutako posizioan $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$ esleitu x_{ij} aldagaiari. Ondoren, a_i eta b_j eguneratu:

   - Minimoa a_i bada, I_i iturburu-puntuaren eskaintza zero bihurtuko da. Hurrengo kalkuluetarako taulako i. errenkada ezabatu eta b_j eskaria eguneratu: $b_j - a_i$.
   - Minimoa b_j bada, H_j helburu-puntuaren eskaria zero bihurtuko da. Hurrengo kalkuluetarako taulako j. zutabea ezabatu eta a_i eskaintza eguneratu: $a_i - b_j$.
   - a_i-k eta b_j-k balio berbera badute, eskaintza eta eskaria aldi berean zero bihurtuko dira. Aurrerantzean egingo diren kalkuluetarako i. errenkada eta j. zutabea ezabatu.

3. **urratsa**. Bi kasu gerta daitezke.

   - Ezabatua izan ez den errenkada edo zutabe bakarra baldin badago taulan, geratzen diren produktuen eskaintza eta eskariak ezabatu gabeko posizioetara esleitzen dira. Amaitu.
   - Bestela, 1. urratsera joan.

5.2 Vogel-en metodoa

1. **urratsa**. Garraio-kostuen taulan ED_i, ZD_j kalkulatu.

   $ED_i = i$.errenkadako bi kosturik txikienen arteko diferentzia.

   $ZD_j = j$.zutabeko bi kosturik txikienen arteko diferentzia.

   Diferentziarik handieneko errenkadan edo zutabean c_{ij} txikieneko (i, j) posizioa aukeratu.

2. **urratsa**. Garraio-fluxuen taulan $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$ esleitu x_{ij} aldagaiari. a_i eta b_j eguneratu:

   - Minimoa a_i bada, I_i-ren eskaintza zero bihurtuko da. Hurrengo kalkuluetarako taulako i. errenkada ezabatu eta b_j eskaria eguneratu: $b_j - a_i$.

   - Minimoa b_j bada, H_j-ren eskaria zero bihurtuko da. Hurrengo kalkuluetarako taulako j. zutabea ezabatu eta a_i eskaintza eguneratu: $a_i - b_j$.

   - a_i-k eta b_j-k balio berbera badute, eskaintza eta eskaria aldi berean zero egingo dira. Aurrerantzean egingo diren kalkuluetarako i. errenkada eta j. zutabea ezabatuko dira.

3. **urratsa**. Bi kasu:

   - Ezabatua izan ez den errenkada edo zutabe bakarra baldin badago taulan, geratzen diren produktuen eskaintza eta eskariak ezabatu gabeko posizioetara esleitzen dira. Amaitu.

   - Bestela, 1. urratsera joan.

6. Oinarriko soluzio bideragarrien hobekuntza

Oinarriko soluzio bideragarriak hobetzeko, garraio-problemari dagokion eredu duala erabiltzen da.

Garraio-problema orekatua:

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

hauen mende

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1,\ldots,m, \qquad j = 1,\ldots,n$$

Aldagai dualak $u_1,\ldots,u_m$ eta $v_1,\ldots,v_n$ izendatuz,

Eredu duala:

$$\max\ G = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

hauen mende

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad i = 1,\ldots,m, \qquad j = 1,\ldots,n$$

$$u_i, v_j : \text{ez-murriztuak}, \qquad i = 1,\ldots,m, \qquad j = 1,\ldots,n$$

Adibidea. Garraio-problema orekatua:

$$\min \; z = 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 10x_{21} + 4x_{22} + 9x_{23}$$

hauen mende

$$\begin{array}{cccccccc}
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & & & & = 2000 \\
 & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & = 2500 \\
x_{11} & & & +x_{21} & & & = 1500 \\
 & x_{12} & & & +x_{22} & & = 2000 \\
 & & x_{13} & & & +x_{23} & = 1000
\end{array}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{21}, x_{23} \geq 0$$

Aldagai dualak u_1, u_2, v_1, v_2, v_3. Problema duala:

$$\max \; G = 2000u_1 + 2500u_2 + 1500v_1 + 2000v_2 + 1000v_3$$

hauen mende

$$\begin{array}{cccccc}
u_1 & & +v_1 & & & \leq 8 \\
u_1 & & & +v_2 & & \leq 6 \\
u_1 & & & & +v_3 & \leq 10 \\
 & u_2 & +v_1 & & & \leq 10 \\
 & u_2 & & +v_2 & & \leq 4 \\
 & u_2 & & & +v_3 & \leq 9
\end{array}$$

$$u_i, v_j : \text{ez-murriztuak}$$

6.1 Oinarrian sartuko den bektorearen aukeraketa

Oinarriko soluzio bideragarria hobe daitekeen edo ez erabakitzeko,

$$z_{ij} - c_{ij} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_{ij} - c_{ij}.$$

Aldagai dualen bektorea $\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ dela kontuan hartuz,

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n),$$

orduan,

$$z_{ij} - c_{ij} = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n)\mathbf{a}_{ij} - c_{ij}.$$

$\mathbf{a}_{ij}$ bektoreak dituen 1ekoak i eta $m+j$ posizioetan daude. Gainerako osagaiak 0 dira. Ondorioz,

$$z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}.$$

Dualaren aldagaien balioak kalkulatu behar dira. Oinarriko x_{ij} guztietarako $z_{ij} - c_{ij} = 0$ denez, ekuazio-sistema antolatu, aldagairen bati balioren bat eman eta sistema askatu.

Helburua minimizatzea dela kontuan izanik, bi kasu:

- $z_{ij} - c_{ij} \leq 0$ badira, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, soluzioa optimoa da.

- $z_{ij} - c_{ij} > 0$ existitzen bada, soluzioa hobetzea posible da. Horretarako, $z_{ij} - c_{ij}$ positiboen artean maximoa duen aldagaia sartuko da oinarrian.

6.2 Oinarritik aterako den bektorearen aukeraketa

Kontuan izan behar dira:

1. Garraio-problemarako soluzio batean oinarrikoak diren aldagaiek ez dute ziklorik osatzen.

2. Oinarriko diren aldagaien eta oinarrian sartzea erabaki den aldagaiaren artean ziklo bakar bat sortuko da.

Zikloa aurkitzeko erregela: oinarrian sartzea erabaki den aldagaia fluxu positibotzat hartzen da. Garraio-fluxuen taulan fluxu positibo bakarreko errenkadak eta zutabeak ezabatu egingo dira honela: hasteko, fluxu positibo bakarreko errenkadak ezabatu; ondoren, zutabeak, eta ondoren, berriro ere errenkadak, harik eta fluxu positibo bakarreko errenkadarik edo zutaberik geratuko ez den arte. Ezabatuak izan ez diren eta fluxu positiboa duten posizioek ziklo bakar bat osatzen dute.

Oinarrian sartuko den aldagaiak hazteko joera du. Errenkada edo zutabe berean dauden zikloko beste fluxuek txikitzeko joera dute, horien alboko diren beste fluxuek handitzekoa etab.

Txikitzeko joera duten aldagaien artean fluxu minimoa duena oinarritik aterako da, eta balio minimo hori esleituko zaio oinarrian sartuko den aldagaiari. Zikloko ez diren aldagaien balioak ez dira aldatuko.

7. Garraio-taula

Orain arte, bi taularekin egin dugu lan: garraio-kostuen taula eta garraio-fluxuen taula.

Soluzioa hobetzerakoan, dualaren u_i eta v_j aldagaiak eta $z_{ij} - c_{ij}$ balio adierazleak tauletatik kanpo kalkulatu dira.

Kalkulu guztiak taula bakar batean egin ahal izateko: garraio-taula.

	v_1	v_2	$\cdots$	v_n	
u_1	$z_{11} - c_{11}$ | c_{11} x_{11}	$z_{12} - c_{12}$ | c_{12} x_{12}	$\cdots$	$z_{1n} - c_{1n}$ | c_{1n} x_{1n}	a_1
u_2	$z_{21} - c_{21}$ | c_{21} x_{21}	$z_{22} - c_{22}$ | c_{22} x_{22}	$\cdots$	$z_{2n} - c_{2n}$ | c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$			$\ddots$		$\vdots$
u_m	$z_{m1} - c_{m1}$ | c_{m1} x_{m1}	$z_{m2} - c_{m2}$ | c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	$z_{mn} - c_{mn}$ | c_{mn} x_{mn}	a_m
	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

8. Garraio-problemarako algoritmoa

Helburua minimizatzea.

1. **urratsa**. Garraio-problema orekatu.

2. **urratsa**. Oinarriko soluzio bideragarri bat kalkulatu.

3. **urratsa**. Une honetan daukagun oinarriari dagozkion $u_1, \ldots, u_m$ eta $v_1, \ldots, v_n$ aldagaien balioak kalkulatu.

4. **urratsa**. Oinarriko ez diren bektoreei dagozkien $z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ balio adierazleak kalkulatu.

   - $z_{ij} - c_{ij} > 0$ existitzen bada, soluzioa hobe daiteke. Balio adierazle positiboen artetik maximoa aukeratu oinarrian sartzeko. 5. urratsera joan.

   - Oinarriko ez diren aldagaietarako $z_{ij} - c_{ij} < 0$ bada, soluzioa optimo eta bakarra da. Amaitu.

   - Oinarriko ez diren aldagaietarako $z_{ij} - c_{ij} \leq 0$ bada eta oinarrikoa ez den aldagai bat existitzen bada zeinarentzat $z_{ij} - c_{ij} = 0$ den, soluzio optimo anizkoitza dago. Azken aldagai hori aukeratuko da oinarrian sartzeko. 5. urratsera joan.

5. **urratsa**. Une honetan oinarrian dauden aldagaiek eta oinarrian sartzeko aukeratua izan den aldagaiak osatzen duten ziklo bakarra aurkitu. Zikloa osatzen duten fluxuak eguneratuz soluzio berria kalkulatu. 3. urratsera joan.

9. Garraio-problemarako algoritmoaren aplikazioa

9.1 Soluzio endekatua

m iturburu-puntu eta n helburu-puntu dituen garraio-problema orekatu batean, soluzio batek zero baino handiagoak diren $m + n - 1$ aldagai baino gutxiago baditu, soluzio hori endekatua dela esaten da.

Endekatzea ondoko bi kasuetan gerta daiteke:

- Hasierako oinarriko soluzio bideragarri baten kalkuluan, Vogel-en metodoa edo ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa aplikatzerakoan, azkena ez den urrats batean aldi berean errenkada eta zutabea ezabatzen badira, eskaintza eta eskaria biak batera zero egin direlako.

- Garraio-problemarako algoritmoa aplikatzerakoan, oinarritik irtengo den aldagaia aukeratzeko irizpidean berdinketa gertatzen bada.

Soluzio bat endekatua denean, beharrezkoa gertatzen da bereiztea zero diren garraio-fluxuen artean zeintzuk diren oinarriko aldagaiei dagozkienak, eta zeintzuk ez.

Zenbait kasutan, garraio-fluxua zero duten aldagaien artean bereizketa egiteko aukera bat baino gehiago izaten da.

10. Esleipen-problema

Garraio-problemaren kasu partikular bat da.

I_i iturburu-puntuen eta H_j helburu-puntuen arteko esleipen optimoa lortu nahi da, $i = 1, \ldots, n$, eta $j = 1, \ldots, n$, izanik; I_i bakoitza H_j bakar batekin eta H_j bakoitza I_i bakarrarekin esleituko dira, c_{ij} esleipen-kostua izanik. Erabaki-aldagaiak:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{baldin } I_i \text{ eta } H_j \text{ elkarri esleituak} \\ 0 & \text{bestelakoetan} \end{cases}$$

Esleipen-problemaren eredu lineala forma estandarrean:

$$\begin{aligned} \min \ z \ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ &\text{hauen mende} \\ &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \ldots, n \\ &\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, \ldots, n \\ &x_{ij} = 0, 1, \quad i, j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Problemak iturburu-puntu adina helburu-puntu: problema orekatua.

Berdinak ez direnean, behar adina iturburu-puntu edo helburu-puntu erantsi, esleipen-kostua zero izanik.

Esleipen-problema adierazteko: esleipen-kostuen taula

$$\begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} H_1 & H_2 & \dots & H_n \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{array}} \end{array}$$

10.1 Metodo hungariarra

4. Teorema *Esleipen-problema baten helburu funtzioa*

$$z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

izanik, x_{ij}, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, soluzio optimo badira, aldagaietarako balio horiek soluzio optimo dira baita aurreko helburu funtzio horren ordez

$$z' = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c'_{ij} x_{ij}$$

helburu-funtzioa duen problemarako, $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ izanik eta u_i eta v_j konstanteak izanik.

5. Teorema $c_{ij} \geq 0$ *badira,* $i, j = 1, \ldots, n$, *eta* x_{ij} *aldagaiek hartutako balioek*

$$z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = 0$$

betetzen badute, x_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, *problemarako soluzio optimoa dira.*

Errenkada edota zutabe bateko elementuei konstante bat kentzeak ez du problemaren soluzio optimoa aldatzen.

Horretan oinarritzen da metodo hungariarra; esleipen-kostuen taula eraldatu, esleipena egin ahal izateko behar adina zero lortzeko.

10.2 Esleipen-problemarako algoritmoa

Helburua minimizatzea da.

1. **urratsa.** Problema orekatu.

2. **urratsa.** Zeroak lortu esleipen-kostuen taulako errenkadatan, errenkada bakoitzeko elementuei errenkadako minimoa kenduz, $u_i = \min_j\{c_{ij}\}$. Taulako elementu berriak $c'_{ij} = c_{ij} - u_i, \quad i, j = 1, \ldots, n,$ dira.

3. **urratsa.** Zeroak lortu esleipen-kostuen taulako zutabeetan, zutabe bakoitzeko elementuei zutabeko minimoa kenduz, $v_j = \min_i\{c'_{ij}\}$. Taulako elementu berriak $c''_{ij} = c'_{ij} - v_j, \quad i, j = 1, \ldots, n,$ dira.

4. **urratsa.** Zeroak esleitu. Zero kopuru txikieneko errenkada edo zutabea aukeratu. Bertan zero bat esleitu eta errenkada edo zutabe berean dauden gainerako zeroak ezabatu. Zeroen esleipenarekin jarraitu, ezabatu gabeko zero kopuru txikiena duen errenkadatik edo zutabetik hasita.

   - Zeroak esleitzearen prozesuaren amaieran errenkada guztiek esleitutako zero bat badute, soluzioa optimoa da. Amaitu.

   - Zeroak esleitzearen prozesuaren amaieran esleitutako zerorik ez duen errenkadaren edo zutaberen bat existitzen bada, 5. urratsera joan.

5. urratsa. Zeroak estali. Taulako zero guztiak estaltzen dituen errenkada edo zutabe kopuru minimoa aukeratu behar da. Aukeraketarako ondoko prozedura erabiltzen da.

5.1 Esleitutako zerorik ez duen errenkada oro markatu.

5.2 Aurreko 5.1 urratsean markatutako errenkadetan ezabatutako zeroa duten zutabeak markatu.

5.3 Aurreko 5.2 urratsean markatutako zutabeetan zero bat esleituta duten errenkadak markatu.

5.2 eta 5.3 urratsak errepikatu, errenkada edo zutabe gehiago markatu ahal izango ez dugun arte.

Markatuak izan ez diren errenkadek eta markatutako zutabeek zero guztiak estaltzen dituzte.

Errenkada eta zutabe horiek estali eta 6. urratsera joan.

6. urratsa. Zero berriak sortu. Estali gabeko elementuen artetik minimoa aukeratu. Estali gabeko errenkadetako elementuei balio hori kendu, eta estalitako zutabeetako elementuei gehitu. 4. urratsera joan.

10.3 Maximizatze-problema

Esleipen-problemaren helburu funtzioa minimizatzea denean bakarrik aplika daiteke metodo hungariarra. Problemaren helburua maximizatzea den kasuetan:

$$\min(-z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} -c_{ij} x_{ij}.$$

Helburu funtzioaren eraldaketa honek esleipen-kostuak negatibo bihurtzen ditu. Teorema erabili ahal izateko, beharrezkoa da $c_{ij} \geq 0$ betetzea.

Taulako kostu negatiboen artetik minimoa aukeratu, eta taulako elementu guztiei balio hori kendu.

$$-c_{kl} = \min\{\ -c_{ij}\ /\ -c_{ij} < 0\ \}.$$

Taulako $c'_{ij} \geq 0$ balio berriak: $c'_{ij} = -c_{ij} + c_{kl}$.