3. DUALTASUNA

1. Problema duala

1. Definizioa (Maximizatze-forma simetrikoa) *Eredu lineala maximizatze-forma simetrikoan dagoela esaten da baldin:*

- *Helburua maximizatzea bada,*
- *Murrizketa guztiak $\leq$ modukoak badira,*
- *Aldagai guztiak ez-negatiboak badira.*

2. Definizioa (Minimizatze-forma simetrikoa) *Eredu lineala minimizatze-forma simetrikoan dagoela esaten da baldin:*

- *Helburua minimizatzea bada,*
- *Murrizketa guztiak $\geq$ modukoak badira,*
- *Aldagai guztiak ez-negatiboak badira.*

1.1 Primal-dual erlazioa

Primal	Dual
$\max\ z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$	$\min\ G = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$
hauen mende	hauen mende
$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$	$\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

1.2 Eredu primalaren-dualaren osagaiak

Bi eredu horien osagaien arteko erlazioa:

- Primalaren $\mathbf{A}$ matrizea $m \times n$ tamainakoa: m murrizketa eta n aldagai ditu. Dualaren matrizea $\mathbf{A}^T$ da: n murrizketa eta m aldagai izango ditu.

- $\mathbf{b}$ primalaren baliabide-bektorea da eta dualaren kostu-bektorea.

- $\mathbf{c}$ primalaren kostu-bektorea da eta dualaren baliabide-bektorea.

- Problema primalak duen murrizketa kopurua eta problema dualak duen aldagai kopurua berdinak dira.

- Problema primalak duen aldagai kopurua eta problema dualak duen murrizketa kopurua berdinak dira.

1.3 Dualtasuna. Kasu orokorra

Helburu funtzioa: max	$\Longleftrightarrow$	Helburu funtzioa: min
i. murrizketa $\leq b_i$	$\Longleftrightarrow$	i. aldagaia ≥ 0
i. murrizketa $= b_i$	$\Longleftrightarrow$	i. aldag. ez-murriztua
i. murrizketa $\geq b_i$	$\Longleftrightarrow$	i. aldagaia ≤ 0
i. aldagaia ≥ 0	$\Longleftrightarrow$	i. murrizketa $\geq b_i$
i. aldag. ez-murriztua	$\Longleftrightarrow$	i. murrizketa $= b_i$
i. aldagaia ≤ 0	$\Longleftrightarrow$	i. murrizketa $\leq b_i$

2. Dualtasunerako teoremak

Ereduen forma primal-dual simetrikoetarako emanak.

1. Teorema *Problema dualaren duala problema primala da.*

2. Teorema (Dualtasun ahula) *Izan bitez* $\mathbf{x}$ *eta* $\mathbf{y}$ *problema primalaren eta dualaren soluzio bideragarriak, hurrenez hurren. Honakoa betetzen da:*

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y} = G.$$

1. Korolarioa $\mathbf{x}^*$ *eta* $\mathbf{y}^*$ *soluzio bideragarriek*

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$$

betetzen badute, $\mathbf{x}^*$ *eta* $\mathbf{y}^*$ *primalaren eta dualaren soluzio optimoak dira, hurrenez hurren.*

2. Korolarioa *Problema primala bideragarria eta bornegabea bada, duala bideraezina da.*

3. Korolarioa *Problema duala bideragarria eta bornegabea bada, primala bideraezina da.*

Problema primala bideraezina bada, duala bideraezina edo bornegabea izan daiteke.

Problema duala bideraezina bada, primala bideraezina edo bornegabea izan daiteke.

3. Teorema (Dualtasunaren funtsezko printzipioa) *Problema primalaren* $\mathbf{x}^*$ *soluzio optimoa existitzen bada, problema dualaren* $\mathbf{y}^*$ *soluzio optimoa existitzen da. Modu berean, problema dualaren* $\mathbf{y}^*$ *soluzio optimoa existitzen bada, problema primalaren* $\mathbf{x}^*$ *soluzio optimoa existitzen da. Bi kasuetan:*

$$z^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^* = G^*$$

betetzen da.

3. Osagarrizko nasaitasunaren baldintzak

Primalaren soluzio optimotik abiatuz dualaren soluzio optimoa kalkula daiteke, eta alderantziz.

4. Teorema (Osagarrizko nasaitasunarena) $\mathbf{x}^*$ *eta* $\mathbf{y}^*$ *problema primalaren eta dualaren soluzio bideragarriak izanik, hurrenez hurren, optimoak izango dira ondoko baldintza betetzen badute:*

$$\mathbf{x}^{*T}(\mathbf{A}^T\mathbf{y}^* - \mathbf{c}) + \mathbf{y}^{*T}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) = 0.$$

3.1 Osagarrizko nasaitasunaren baldintzen interpretazioa

- $\mathbf{x}^* > \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^T\mathbf{y}^* - \mathbf{c} = \mathbf{0}.$
- $\mathbf{A}\mathbf{x}^* < \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}^* = \mathbf{0}.$
- $\mathbf{y}^* > \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$
- $\mathbf{A}^T\mathbf{y}^* > \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{0}.$

4. Soluzio dual optimoa

5. Teorema *Izan bitez bi eredu lineal primal-dual simetrikoak.* $\mathbf{B}$ *problema primalaren oinarri optimoa bada,*

$$\mathbf{y}^{*T} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

problema dualaren soluzio optimoa da.

4.1 Soluzio dual optimoa taulan

$z_j - c_j$ balioak honela kalkulatzen dira:

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j.$$

Hasierako $\mathbf{I}$ matrizeko $\mathbf{a}_j$ bektoreei dagozkienak:

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{I} - \mathbf{c}_I^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{c}_I^T.$$

Hasierako taulako identitate matrizeari dagozkion zutabeetan taula optimoan dauden balio adierazleei $\mathbf{c}_I^T$ gehitu behar zaie, soluzio duala lortzeko.

Bi kasu gerta daitezke:

- $\mathbf{I}$ matrizea nasaitze-aldagaiez osaturik: $\mathbf{c}_I = \mathbf{0}$
- Hasierako $\mathbf{I}$ oinarrian aldagai artifizialak badaude: M balioak daude $\mathbf{c}_I$ bektorean.

5. Dualtasunaren interpretazio ekonomikoa

5.1 Itzal-prezioak

Primalaren $\mathbf{B}$, $\mathbf{x}^*$ eta z^* optimoak. Dualaren $\mathbf{y}^*$ eta G^*.

Bideragarritasun primalaren galera eragiten ez duen $\mathbf{b}$ baliabide-bektorea $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ aldatzen bada,

- $\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) = \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b}$.
- $z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j$.
- $\hat{G}^* = \mathbf{y}^{*T}(\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b}) = \mathbf{y}^{*T}\mathbf{b}+\mathbf{y}^{*T}\Delta\mathbf{b} = G^*+\mathbf{y}^{*T}\Delta\mathbf{b} = z^* + \mathbf{y}^{*T}\Delta\mathbf{b}$.

$\Delta b_i = 1$ bada eta gainerakoak zero, y_i^* aldagai dualaren balio optimoak helburu funtzioaren balioaren gehikuntza adierazten du,

$$\mathbf{y}^{*T}\Delta\mathbf{b} = (y_1^*, \ \ldots, \ y_i^*, \ \ldots, \ y_m^*)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = y_i^*.$$

3. Definizioa (Itzal-prezioa) *y_i^* aldagai dual optimoa i. baliabidearen itzal-prezioa dela esaten da, $i = 1, \ldots, m$, baldin i. baliabidean unitate bateko aldaketa egitean eta gainerako baliabideak bere horretan mantentzean ez bada bideragarritasun primala galtzen.*

5.2 Aldagai primalen kostu ekonomikoa eta simplex metodoaren interpretazioa

Adibidea.

Baliabidea	Produktuak 1	2	3	4	Baliabide erabilgarria
A	2	3	$\frac{3}{2}$	4	300
B	2	4	3	1	500
C	5	1	2	2	250
Irabazia	4	3	6	2	

x_j: ekoitziko den j produktu kopurua, $j = 1, 2, 3, 4$.

y_1, y_2, y_3: A, B eta C baliabideengatik ordainduko dena.

$$\begin{array}{rl} \max\ z = & 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 \\ \text{hauen mende} & \\ & 2x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 4x_4 \leq 300 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 500 \\ & 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 250 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \min\ G = & 300y_1 + 500y_2 + 250y_3 \\ \text{hauen mende} & \\ & 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geq 4 \\ & 3y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3 \\ & \frac{3}{2}y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 6 \\ & 4y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j = \mathbf{y}^T \mathbf{a}_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j.$$

$z_j - c_j < 0$ bada, $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i < c_j$ da, hau da, j. jardueraren kostu ekonomikoa jardueraren ekoizpenari dagokion c_j irabazia baino txikiagoa da.

6. Simplex dual metodoa

Eredua forma simetrikoan, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ (nasaitze-aldagaiez).

6.1 Simplex dual algoritmoa

Helburua maximizatzea da.

1. **urratsa.** Hasierako taulan $z_j - c_j \geq 0, \quad \forall\, \mathbf{a}_j$

2. **urratsa.** Bi kasu:
   - $x_{Bi} \geq 0$ bada, $\quad i = 1, \ldots, m$, soluzio optimoa. Amaitu.
   - $\exists x_{Bi} < 0$, soluzioa hobe daiteke. 3. urratsera.

3. **urratsa.** Oinarri-aldaketa.
   - $\mathbf{a}_r$ irtengo da. r. pibot-errenkada da.

     $$x_{Br} = \min_i \{\, x_{Bi} \quad / \quad x_{Bi} < 0 \,\}.$$

   - $\mathbf{a}_k$ sartuko da. k. pibot-zutabea da.

     $$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \max_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \quad / \quad y_{rj} < 0 \right\}.$$

     y_{rk} elementua pibota da.

   y_{rj} negatiborik ez bada existitzen, $j = 1, \ldots, n$, problema bideraezina da. Amaitu.

4. **urratsa.** Taula berria kalkulatu simplex algoritmoan definitu diren oinarrizko eragiketa berberen bidez. 2. urratsera joan.

7. Murrizketa artifizialaren metodoa

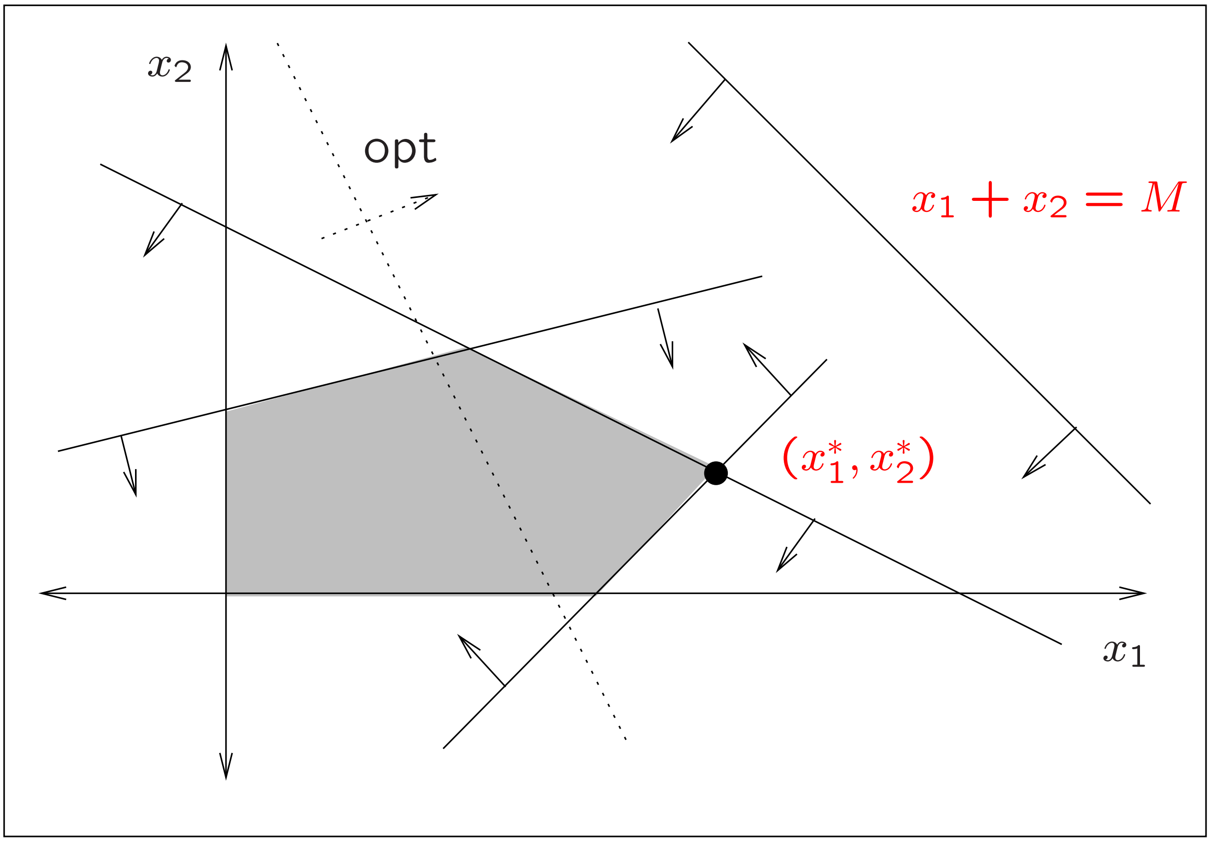
Hasierako taulan bideragarritasun dualik ez dagoenean, murrizketa artifiziala erantsi:

$$\sum_{j \in N} x_j \leq M.$$

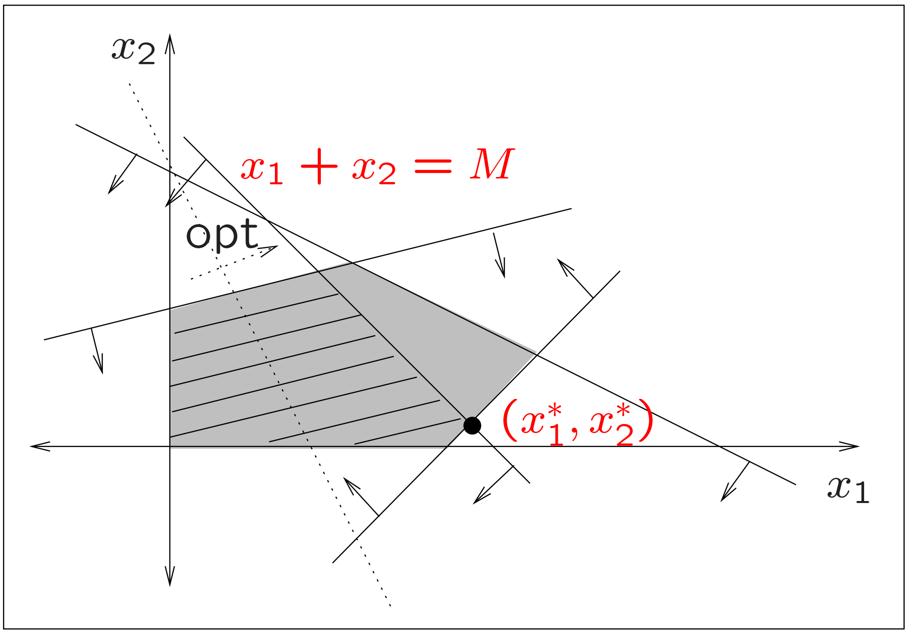
N: hasierako taulan $z_j - c_j < 0$ duten aldagaien multzoa.

7.1 Murrizketa artifizialaren eragina

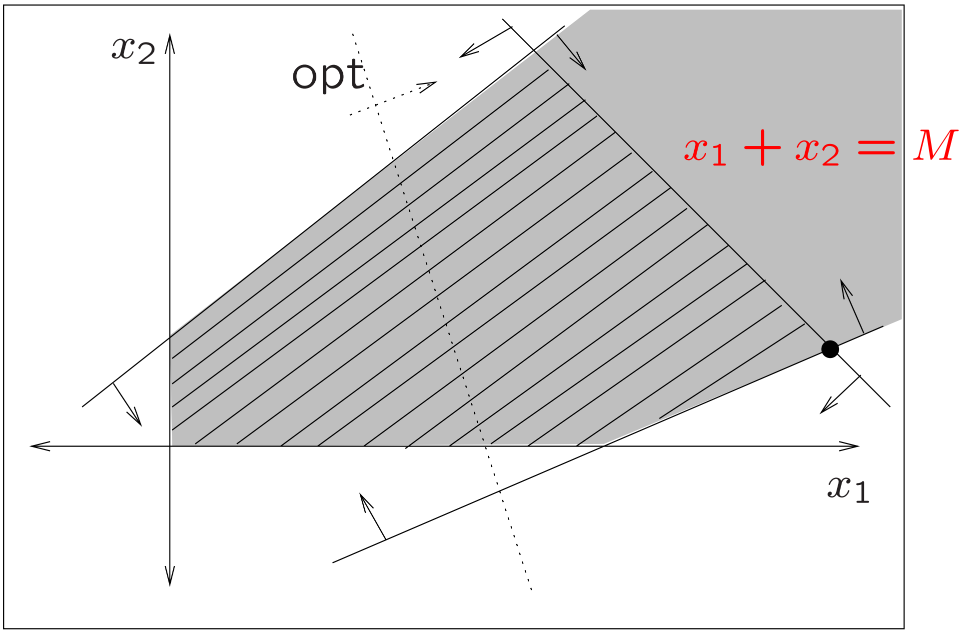
Problemari murrizketa artifizial bat eransteak ez du soluzioen eskualdearen gain inolako eraginik sortu behar. M balioa nahiko handia bada:



Baina, M balioa ez bada nahiko handia,



Bideragarritasun-eskualdea bornegabea denean,



7.2 Simplex dual algoritmoa murrizketa artifizialarekin

Helburua maximizatzea da. Hasierako $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ nasaitze-aldagaiez.

1. **urratsa.** Hasierako taula eraiki.

2. **urratsa.** Murrizketa artifizialari dagokionez,

   - $z_j - c_j \geq 0$ bada $\forall \mathbf{a}_j$, 3. urratsera joan.
   - $z_j - c_j < 0$ duen $\mathbf{a}_j$ existitzen bada, ereduari murrizketa artifiziala erantsi eta eredu berriarentzat hasierako taula eraiki. Oinarrian sartu $\mathbf{a}_k$ bektorea,

   $$z_k - c_k \ = \ \min_j \{ \ z_j - c_j \ / \ z_j - c_j < 0 \ \}.$$

   Murrizketa artifizialaren nasaitze-bektorea irtengo da oinarritik. Oinarrizko eragiketak egin errenkaden artean. 3. urratsera joan.

3. **urratsa.** Bideragarritasun primala.

   - Murrizketa artifizialik ez badago,
     * $x_{Bi} \geq 0$ bada, $i = 1, \ldots, m$, soluzioa optimoa da. Amaitu.
     * $x_{Bi} < 0$ existitzen bada, $i = 1, \ldots, m$, soluzioa hobe daiteke. 4. urratsera joan.

- Murrizketa artifiziala badago,
  - $x_{Bi} \geq 0$ bada, $i = 1, \ldots, m$ eta murrizketa artifizialaren nasaitze-aldagaia oinarrian badago balio positiboz, soluzio optimoa. Amaitu.
  - $x_{Bi} \geq 0$ bada, $i = 1, \ldots, m$ eta murrizketa artifizialaren nasaitze-aldagaia oinarrian ez badago edo oinarrian zero balioa hartzen badu, problema bornegabea da. Amaitu.
  - $x_{Bi} < 0$ existitzen bada, $i = 1, \ldots, m$, soluzioa hobe daiteke. 4. urratsera joan.

4. urratsa. Oinarri-aldaketa.

- Oinarritik irtengo da $\mathbf{a}_r$ bektorea,

$$x_{Br} = \min_i \{ x_{Bi} \ / \ x_{Bi} < 0 \}.$$

r. errenkada pibot-errenkada da.

- Oinarrian sartuko da $\mathbf{a}_k$ bektorea,

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \max_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \ / \ y_{rj} < 0 \right\}.$$

k. zutabea pibot-zutabea da. y_{rk} elementua pibota da. 5. urratsera joan.

r. errenkadan y_{rj} negatiborik ez bada existitzen, problema bideraezina. Amaitu.

5. urratsa. Taula berria kalkulatu errenkaden artean oinarrizko eragiketak eginez. 3. urratsera joan.