# 2. SIMPLEX METODOA

1. Aldaketak ereduan
2. Eredu linealen soluzioak
3. Mutur-puntuak eta oinarriko soluzioak
4. Simplex metodoa
   - 4.1 Definizioak eta notazioa
   - 4.2 Oinarriko soluzio bideragarrien hobekuntza
   - 4.3 Oinarri-aldaketarako aukeraketa-erregelak
   - 4.4 $\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B$ eta $\overset{\wedge}{z}$ kalkulatzeko formulak
   - 4.5 Soluzio optimo bornegabea
   - 4.6 Soluzio optimo anizkoitza
   - 4.7 Hasierako oinarriko soluzio bideragarria
   - 4.8 Simplex metodoaren taula
5. Zigortze-metodoa
6. Simplex algoritmoa
7. Eredu linealen ebazpena
8. Bi faseko metodoa
9. Simplex metodo berrikusia
10. Oharrak

# SIMPLEX METODOA

## Forma estandarra.

Baliabide-bektorea, $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ izanik,

$$\begin{aligned} \max(\min) z = \; & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{hauen mende} \quad & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

# 1. Aldaketak ereduan

Eredua forma estandarrerera pasatzeko aldaketak:

1. **Helburu funtzioa.**

$$\text{min} \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Longleftrightarrow \text{max } (-z) = \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j.$$

2. **Murrizketak.**

(a) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n} -a_{ij} x_j \leq -b_i.$$

(b) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y = b_i, \quad y \geq 0.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - y = b_i, \quad y \geq 0.$$

(c) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i.$$

3. **Aldagaiak.**

- $x_j \leq 0$ bada, $x_j = -x'_j$, non $x'_j \geq 0$ den.
- $x_j$ aldagaia zeinuz murriztugabea bada,

$$x_j = x'_j - x''_j, \quad \text{non} \quad x'_j, x''_j \geq 0 \text{ den.}$$

## 2. Eredu linealen soluzioak

- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ betetzen duen $\mathbf{x}$ soluzioa da.

- $\mathbf{x}$ soluzioa bideragarria da baldin $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ bada.

- $\mathbf{A}$ matrizearen $m$ zutabez osatutako $\mathbf{B}$ oinarri-matrize bat emanik, $\mathbf{x}_B$ oinarriko soluzioa da

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$$

  betetzen badu. Oinarriko ez diren aldagai guztiak 0 dira. $\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}$ bada, oinarriko soluzio bideragarria da.

- Oinarriko soluzio bideragarri bat endekatua da oinarriko aldagairen batek 0 balioa hartzen badu.

- Problema linealaren soluzio bideragarri guztien multzoari bideragarritasun-eskualdea edo soluzio bideragarrien multzo ganbila esaten zaio eta $F$ hizkiaren bidez adierazten da.

- Problema linealaren soluzio optimoa: $\mathbf{x}^*$. Helburu funtzioaren balio optimoa: $z^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$.

- Problema lineala bornegabea da helburu-funtziorako balio optimo finiturik ez duenean, hau da,

$$z^* \rightarrow +\infty \quad \text{edo} \quad z^* \rightarrow -\infty.$$

- Problema lineal batek soluzio optimo anizkoitza du soluzio optimo bat baino gehiago duenean.

# 3. Mutur-puntuak eta oinarriko soluzioak

**1.Teorema** *Izan bedi forma estandarrean dagoen eredu lineala*

$$\begin{array}{rl} \max \quad z = & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \textit{hauen mende} & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

$\mathbf{x}$ *oinarriko soluzio bideragarria da baldin eta soilik baldin* $\mathbf{x}$ *bektorea* $F$*-ko mutur-puntua bada.*

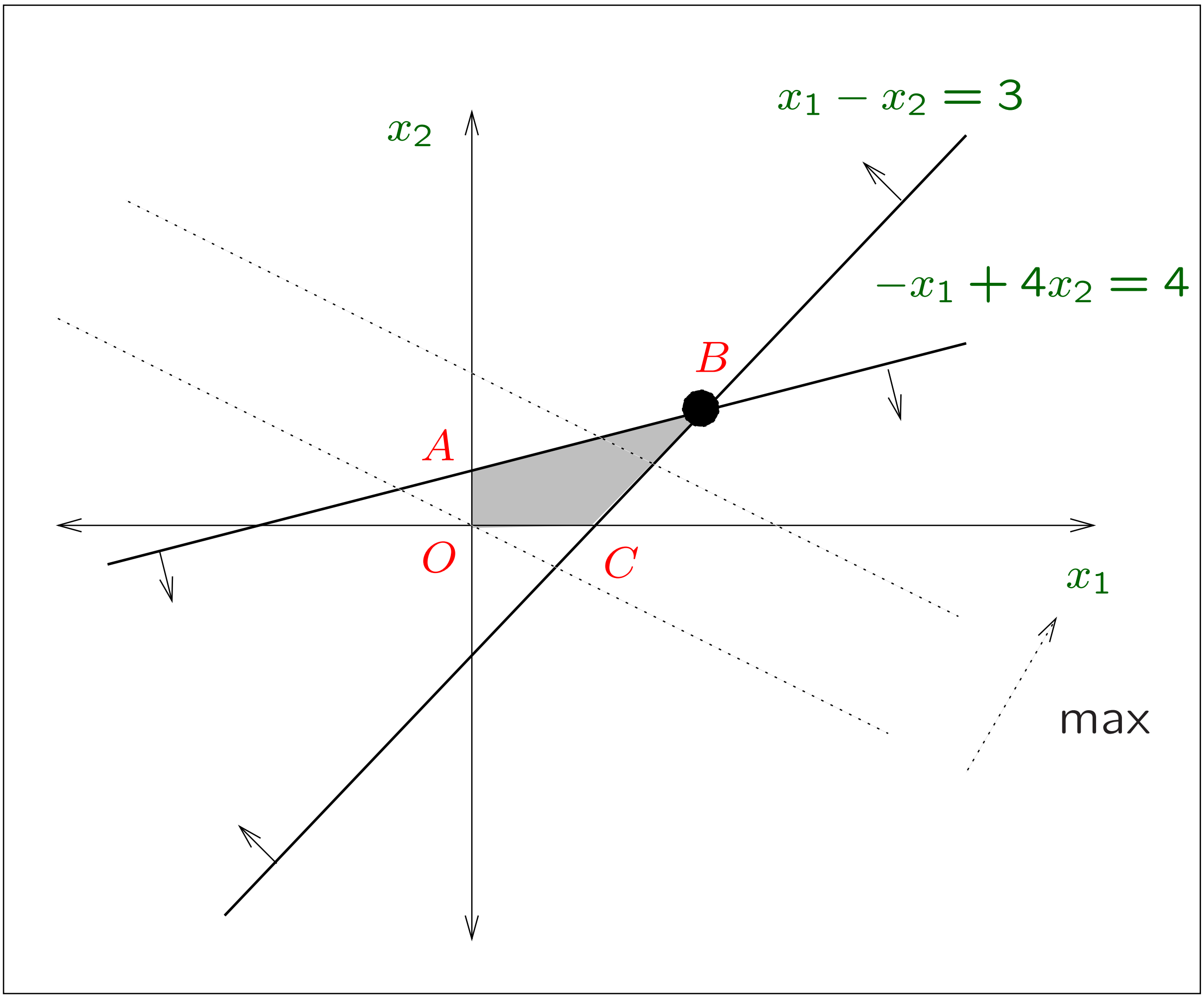
**2.Teorema** *Izan bedi forma estandarrean dagoen eredu lineala*

$$\begin{array}{rl} \max \quad z & = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \textit{hauen mende} & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

*Helburu funtzioaren balio optimoa* $F$ *multzoaren mutur-puntu batean aurkitzen da.*

**Adibidea**. Har dezagun ondoko eredu lineala:

$$\begin{aligned} \text{max} \ \ z = x_1 + 2x_2 \\ \text{hauen mende} \qquad\qquad \\ -x_1 + 4x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$




$O = (0,\ 0)\ ,\ \ A = (0,\ 1)\ ,\ \ B = \left(\frac{16}{3},\ \ \frac{7}{3}\right)\ ,\ \ C = (3,\ 0).$

Eredua forma estandarrean:

$$\max \; z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

hauen mende

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 \quad +x_3 \qquad\qquad &= 4 \\ x_1 - x_2 \qquad\qquad +x_4 &= 3 \\ x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Bi oinarriko soluzioren kalkulu aljebraikoa:

- $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1 \; \mathbf{a}_2)$ oinarria aukeratzea.

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Oinarriko soluzio hau bideragarria da, eta grafikoko $B$ mutur-puntuari dagokio.

- $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1 \; \mathbf{a}_4)$ oinarria aukeratzea.

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Oinarriko soluzio hau ez da bideragarria, osagai negatiboak dituelako. Hortaz, soluzio hau ez da grafikoko mutur-puntuekin egokitzen.

# 4. Simplex metodoa

## 4.1 Definizioak eta notazioa

$\mathbf{A}$-k $m$ errenkada linealki independente eta $n$ zutabe, $n > m$.

$\mathbf{A}$-ko lehenengo $m$ zutabe aukeratuz: $\mathbf{B}$ oinarri bat.

$$\max \ z = (\mathbf{c}_B^T \mid \mathbf{c}_N^T) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ - \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}$$

hauen mende

$$(\mathbf{B} \mid \mathbf{N}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ - \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$$

Eredua honela geratzen da:

$$\begin{aligned} \max \quad z = \ & \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\ \text{hauen mende} \quad & \\ & \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Oinarriko soluzioa. $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ eginez, sistema:

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b} \;\rightarrow\; \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \;\text{ non }\; \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{pmatrix} \text{ den.}$$

- Helburu funtzioaren balioa. $\mathbf{c}_B^T = (c_{B1}, c_{B2}, \ldots, c_{Bm})$ bada,

$$z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = (c_{B1}, c_{B2}, \ldots, c_{Bm}) \begin{pmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} x_{Bi}.$$

- Koordenatu-bektorea. $\mathbf{a}_j = \mathbf{B}\mathbf{y}_j \;\rightarrow\; \mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$.

$$\mathbf{a}_j = y_{1j}\mathbf{a}_1 + y_{2j}\mathbf{a}_2 + \cdots + y_{mj}\mathbf{a}_m = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\mathbf{a}_i.$$

- $z_j - c_j$ balio adierazlearen kalkulua. $z_j$ eskalarea.

$$z_j = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_j = c_{B1}y_{1j} + c_{B2}y_{2j} + \cdots + c_{Bm}y_{mj} = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} y_{ij}.$$

## 4.2 Oinarriko soluzio bideragarrien hobekuntza

**3.Teorema** *Izan bedi eredu lineala maximizatze-forma estandarrean. Izan bedi $\mathbf{A}$ matrizetik aukeratutako $\mathbf{B}$ oinarria, eta izan bitez $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ dagokion oinarriko soluzio bideragarria eta $z = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$ helburu-funtziorako balioa.*

*$\mathbf{A}$ matrizean oinarrikoa ez den eta $z_j - c_j < 0$ duen $\mathbf{a}_j$ bektore bat existitzen bada, eta $\mathbf{a}_j$ horrentzat $y_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, koordenaturen bat positiboa bada, beste $\hat{\mathbf{x}}_B$ oinarriko soluzio bideragarri bat existitzen da non*

$$\hat{z} = \hat{\mathbf{c}}_B^T\hat{\mathbf{x}}_B \geq z = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B.$$

## 4.3 Oinarri-aldaketarako aukeraketa-erregelak

- Sartuko den $\mathbf{a}_k$ bektorearentzat:

$$\boxed{z_k - c_k = \min_j\{z_j - c_j / z_j - c_j < 0\}}$$

$\hat{z} \geq z$ bermatuko da.

- Aterako den $\mathbf{a}_r$ bektorearentzat:

$$\boxed{\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_i\left\{\frac{x_{Bi}}{y_{ik}} / y_{ik} > 0\right\}}$$

$\hat{\mathbf{x}}_B \geq \mathbf{0}$ bermatuko da.

## 4.4 $\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B$ eta $\overset{\wedge}{z}$ kalkulatzeko formulak

- Soluzio berriaren kalkulua:

$$\boxed{\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B = \begin{cases} x_{Bi} - x_{Br}\dfrac{y_{ik}}{y_{rk}} & i \neq r \\ \dfrac{x_{Br}}{y_{rk}} & i = r \end{cases}}$$

- Helburu funtzioaren balio berriaren kalkulua:

$$\boxed{\overset{\wedge}{z} = z - \frac{x_{Br}}{y_{rk}}(z_k - c_k)}$$

**4.Teorema (Optimaltasunerako baldintzak)**. *Izan bedi problema lineala forma estandarrean.*

$$\begin{array}{rl} \text{max} \quad z & = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \textit{hauen mende} & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

*Izan bedi* $\mathbf{A}$ *matrizean aukeratutako* $\mathbf{B}$ *oinarria eta izan bitez* $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ *dagokion oinarriko soluzio bideragarria eta* $z = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$ *helburu-funtziorako balioa.*

$\mathbf{A}$ *matrizeko* $\mathbf{a}_j$ *bektore guztietarako* $z_j - c_j$ *balioak zero baino handiagoak edo berdinak badira,* $\mathbf{x}_B$ *problemarako oinarriko soluzio bideragarri optimoa da.*

## 4.5 Soluzio optimo bornegabea

**5.Teorema** *Izan bedi problema lineala maximizatze-forma estandarrean. Izan bedi* $\mathbf{A}$ *matrizean aukeratutako* $\mathbf{B}$ *oinarria, eta izan bitez* $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ *dagokion oinarriko soluzio bideragarria eta* $z = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$ *helburu-funtzioaren balioa.*

$\mathbf{A}$ *matrizean* $z_k - c_k < 0$ *duen* $\mathbf{a}_k$ *bektore bat existitzen bada eta* $\mathbf{a}_k$ *bektore horrentzat* $y_{ik}$*,* $i = 1, \ldots, m$*, koordenatu guztiak zero baino txikiagoak edo berdinak badira, ereduaren soluzioa bornegabea da.*

## 4.6 Soluzio optimo anizkoitza

**6.Teorema** *Izan bedi eredu lineala maximizatze-forma estandarrean. Izan bedi* $\mathbf{A}$ *matrizean aukeratutako* $\mathbf{B}$ *oinarria eta izan bitez* $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ *dagokion oinarriko soluzio bideragarria eta* $z = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$ *helburu funtzioaren balioa.*

$\mathbf{A}$ *matrizeko* $\mathbf{a}_j$ *bektore guztietarako* $z_j - c_j \geq 0$ *betetzen bada,* $\mathbf{x}_B$ *soluzioa optimoa da. Horretaz gain,* $z_k - c_k = 0$ *duen, oinarrikoa ez den eta koordenaturen bat* $y_{ik} > 0$ *duen* $\mathbf{a}_k$ *bektore bat existitzen bada,* $i = 1, \ldots, m$*, soluzio optimo anizkoitza existitzen da.*

**7. Teorema** *Izan bedi eredu lineala maximizatze-forma estandarrean. Izan bitez $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ ereduaren oinarriko soluzio bideragarri optimoak. Soluzio horien konbinazio lineal ganbil orokortu guztiak ereduaren soluzio bideragarri optimoak dira.*

**8. Teorema** *Izan bedi problema lineala maximizatze-forma estandarrean. Izan bedi $\mathbf{A}$ matrizean aukeratutako $\mathbf{B}$ oinarria, eta izan bitez $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ dagokion oinarriko soluzio bideragarria eta $z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$ helburu-funtzioaren balioa. $\mathbf{A}$ matrizeko $\mathbf{a}_j$ bektore guztietarako $z_j - c_j \geq 0$ betetzen bada, $\mathbf{x}_B$ soluzioa optimoa da.*

*Oinarrikoa ez den eta $z_k - c_k = 0$ duen $\mathbf{a}_k$ bektore bat existitzen bada eta bere $y_{ik}$ koordenatu guztiak zero baino txikiagoak edo berdinak baditu, $i = 1, \ldots, m$, aldagaietarako balio bornegabeko soluzio optimo anizkoitza existitzen da.*

## 4.7 Hasierako oinarriko soluzio bideragarria

Oinarri kanonikoari dagokiona. Bi kasu:

### Nasaitze-aldagaiez osatutako hasierako oinarria

$$\begin{array}{rlcrl} \text{max} & z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} & & \text{max} & z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{0}^T\mathbf{y} \\ \text{hauen mende} & & \rightarrow & \text{hauen mende} & \\ & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} & & & \mathbf{Ax} + \mathbf{Iy} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & & & \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

- Soluzioaren kalkulua. Soluzioa bideragarria da.

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{Ib} = \mathbf{b} \geq \mathbf{0}.$$

- Helburu funtzioaren balioa. $\mathbf{B}$ oinarriko bektore guztiak nasaitze-aldagaiei dagozkienez, $\mathbf{c}_B^T = \mathbf{0}$ da.

$$z = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B = \mathbf{0}^T\mathbf{x}_B = 0.$$

- Koordenatu-bektorea.

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j = \mathbf{Ia}_j = \mathbf{a}_j.$$

- $z_j - c_j$ balioaren kalkulua. $\mathbf{B}$ oinarriko bektore guztiak nasaitze-aldagaiei dagozkienez, $\mathbf{c}_B^T = \mathbf{0}$ da.

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T\mathbf{y}_j - c_j = 0 - c_j = -c_j.$$

## Aldagai artifizialak hasierako oinarrian

Eredu linealean $=$ moduko murrizketak badaude edo $\geq$ modukoak $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ izanik, oinarri kanonikoa ezin da nasaitze-aldagaiekin osatu. Hasierako oinarri gisa kanonikoa aukeratu ahal izateko: aldagai artifizialak gehitu. Adibidea:

$$\begin{aligned} \text{max} \quad z \quad &= 3x_1 + x_2 \\ \text{hauen mende} & \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$x_3$ nasaitze-aldagaia gehitu, $x_4$ kendu eta $w_1 \geq 0$ aldagai artifiziala gehituko dugu:

$$\begin{array}{lllll} x_1 + x_2 & +x_3 & & & = 3 \\ x_1 + 2x_2 & & -x_4 + w_1 & & = 2 \end{array}$$

$\mathbf{B} = (\mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_{w1})$ oinarri kanonikoari dagokion soluzioa:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}.$$

Baina, $w_1 = 2 > 0$ denez, $\mathbf{x}_B$ ez da hasierako problemaren soluzioa. $x_1 + 2x_2 - x_4 = 2$ murrizketa ez da betetzen.

## 4.8 Simplex metodoaren taula

Forma estandarrean dagoen eredu lineal baten soluzio optimoa kalkulatzerakoan, oinarri bakoitzari dagozkion kalkuluak taula batean jasotzen dira: Simplex metodoaren taula.

| | | Jatorrizko aldagaiak | | | Aldagai laguntzaileak | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $\dots$ | $x_n$ | $x_{n+1}$ | $\dots$ | $x_j$ | $\dots$ | |
| | | $z_1 - c_1$ | $\dots$ | $z_n - c_n$ | $z_{n+1} - c_{n+1}$ | $\dots$ | $z_j - c_j$ | $\dots$ | $z$ |
| $c_{B1}$ | $\mathbf{a}_{B1}$ | $y_{11}$ | $\dots$ | $y_{1n}$ | $y_{1,n+1}$ | $\dots$ | $y_{1,j}$ | $\dots$ | $x_{B1}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | | $\vdots$ | | | $\vdots$ |
| $c_{Bi}$ | $\mathbf{a}_{Bi}$ | $y_{i1}$ | $\dots$ | $y_{in}$ | $y_{i,n+1}$ | $\dots$ | $y_{i,j}$ | $\dots$ | $x_{Bi}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | | $\vdots$ | | | $\vdots$ |
| $c_{Bm}$ | $\mathbf{a}_{Bm}$ | $y_{m1}$ | $\dots$ | $y_{mn}$ | $y_{m,n+1}$ | $\dots$ | $y_{m,j}$ | $\dots$ | $x_{Bm}$ |

Oinarri kanonikoan nasaitze-aldagaiak besterik ez badaude, simplex metodoaren taula $\mathbf{B}$ oinarriarekiko honela idatz daiteke:

| | | $x_1\ x_2\ \dots\ x_n$ | $x_{n+1}\ x_{n+2}\ \dots x_{n+m}$ | |
|---|---|---|---|---|
| | | $\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T$ | $\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ | $\mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$ |
| $\mathbf{c}_B$ | $\mathbf{B}$ | $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ | $\mathbf{B}^{-1}$ | $\mathbf{x}_B$ |

# 5. Zigortze-metodoa

Aldagai artifizialak dituen problemaren soluzioa ez da jatorrizko problemaren soluzio izango aldagai artifizialen batek zero baino balio handiagoa badu.

Oinarri optimoan aldagai artifizialen agerpena ekiditeko: helburu funtzioa zigortu.

Adibidea:

$$\max\ z = -5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mw_1 - Mw_2$$

hauen mende

$$\begin{array}{rcl}
2x_1 + 10x_2 - 6x_3 - x_4 + w_1 & = & 30 \\
\frac{5}{2}x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_5 & = & 10 \\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + w_2 & = & 5 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ w_1,\ w_2 & \geq & 0
\end{array}$$

$\mathbf{B} = \mathbf{I}$ lortzeko bi aldagai artifizial gehitu: $w_1$, $w_2$ eta helburu funtzioa zigortu. Simplex metodoaren taula:

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $w_1$ | $w_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $-4M+5$ | $-12M-6$ | $4M-7$ | $M$ | 0 | 0 | 0 | $-35M$ |
| $-M$ | $\mathbf{a}_{w1}$ | 2 | 10 | $-6$ | $-1$ | 0 | 1 | 0 | 30 |
| 0 | $\mathbf{a}_5$ | $\frac{5}{2}$ | $-3$ | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 10 |
| $-M$ | $\mathbf{a}_{w2}$ | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 |

# 6. Simplex algoritmoa

Eredua maximizatze-forma estandarrean jarri.

1. **urratsa.** Hasierako taula eraiki.

2. **urratsa.**

   - $z_j - c_j < 0$ existitzen bada, soluzioa hobe daiteke. 4. urratsera joan.
   - $\mathbf{A}$ matrizeko $\mathbf{a}_j$ bektore guztietarako $z_j - c_j \geq 0$ betetzen bada, 3. urratsera joan.

3. **urratsa.**

   - Aldagai artifizialen bat existitzen bada balio positiboarekin, problema bideraezina. Amaitu.
   - Oinarrian aldagai artifizialik ez badago, taulako $\mathbf{x}_B$ soluzioa optimoa da.

     * $\mathbf{a}_j$ guztietarako $z_j - c_j \geq 0$ da. Oinarriko ez diren $\mathbf{a}_j$ bektore guztietarako $z_j - c_j > 0$ bada, $\mathbf{x}_B$ soluzio optimo bakarra da. Amaitu.

     * $\mathbf{a}_j$ guztietarako $z_j - c_j \geq 0$ da. Oinarrikoa ez den eta $z_k - c_k = 0$ duen $\mathbf{a}_k$ bektoreren bat existitzen bada, eta bektore horrentzat $y_{ik}$, $i = 1, \ldots, m$, koordenaturen bat zero baino handiagoa bada, beste oinarriko soluzio bideragarri bat kalkula daiteke. Problemak soluzio optimo anizkoitza du. 5. urratsera joan.

     * $\mathbf{a}_j$ guztietarako $z_j - c_j \geq 0$ da. Oinarrikoa ez den eta $z_k - c_k = 0$ duen $\mathbf{a}_k$ bektoreren bat existitzen bada, eta bektore horrentzat $y_{ik} \leq 0$ betetzen bada $i = 1, \ldots, m$, problemak soluzio optimo anizkoitza du, baina ez da oinarriko soluzioa. Amaitu.

**4. urratsa.**

- $z_j - c_j < 0$ duen $\mathbf{a}_j$ existitzen bada, eta $\mathbf{y}_j \leq 0$, soluzioa bornegabea. Amaitu.
- $z_j - c_j < 0$ duen $\mathbf{a}_j$ existitzen bada, eta $\mathbf{y}_j$ bektorean zero baino handiagoa den osagairen bat badu, 5. urratsera joan.

**5. urratsa.** Oinarrian ondoko erregelak betetzen dituzten $\mathbf{a}_k$ eta $\mathbf{a}_r$ bektoreak sartu eta irtengo dira:

- Sartuko den $\mathbf{a}_k$ bektoreak hau betetzen du:

$$z_k - c_k = \min_j \{ z_j - c_j \ / \ z_j - c_j \leq 0 \}.$$

  $k$. zutabea pibot-zutabea da.

- Irtengo den $\mathbf{a}_r$ bektoreak hau betetzen du:

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ik}} \ / \ y_{ik} > 0 \right\}.$$

  $r$. errenkada pibot-errenkada da.

$y_{rk}$ koordenatuari pibot esaten zaio.

**6. urratsa.** Taula eguneratu:

- Taula berriko $r$. errenkada = aurreko taulako $r$. errenkada $y_{rk}$ pibot balioaz zatitu.
- Errenkada berria = aurreko taulako errenkadari pibot-errenkada biderkatzaileaz biderkatu ondoren kentzen zaio. $i$. errenkadarako biderkatzailea: $m_i = \frac{y_{ik}}{y_{rk}}$, $i = 1, \ldots, m$, $i \neq r$.

2. urratsera joan.

# 8. Bi faseko metodoa

Zigortze-metodoaren antzekoa. Optimaltasun baldintzak beteko dituen taula (eta oinarrian aldagai artifizialik gabea) lortzea da helburua.

Bi faseko metodoan, lehenengo fase batean aldagai artifizialen batura minimizatzen da.

1. **fasea.** Problema linealaren murrizketak hartu, eta aldagai artifizialen batura minimizatu. Simplex algoritmoa erabili. Bi kasu:

   - Helburu funtzioaren balio optimoa zero baino handiagoa bada, jatorrizko problema lineala bideraezina da.

   - Kontrako kasuan, jatorrizko problema linealak badu soluziorik, eta metodoaren bigarren fasean jarraitu behar da.

2. **fasea.** Optimizatzen den helburu funtzioa jatorrizko problemarena da. Lehenengo fasean lortutako taula optimotik abiatu behar da, eta balio adierazleen errenkada berria kalkulatu. Simplex algoritmoa aplikatu.

# 9. Simplex metodo berrikusia

Eredu lineala forma estandarrean, $\mathbf{B}$ eta $\mathbf{x}_B$ emanik,

$$\begin{aligned}
\text{max} \quad z \quad &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{hauen mende} \qquad & \\
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Oinarrian sartu $\mathbf{a}_k$ bektorea, $z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j$.

$$z_k - c_k \ = \ \min_j \ \{ \ z_j - c_j \ / \ z_j - c_j \leq 0 \ \}.$$

$\mathbf{a}_k$ bektorearen $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$ eta $\mathbf{x}_B$ erabiliz, oinarritik irtengo den $\mathbf{a}_r$ bektorea aukeratzen da,

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} \ = \ \min_i \ \left\{ \ \frac{x_{Bi}}{y_{ik}} \ / \ y_{ik} > 0 \ \right\}.$$

$\mathbf{B}^{-1}$ ezagutzea beharrezkoa da kalkulu horiek egiteko.

Horretaz gain, beharrezkoak diren gainerako datuak eredu linealean bertan daude.

Taula murriztu batean jaso daitezke kalkuluak.

| | | $x_{n+1} \ x_{n+2} \ \dots x_{n+m}$ | |
|---|---|---|---|
| | | $\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ | $\mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$ |
| $\mathbf{c}_B$ | $\mathbf{B}$ | $\mathbf{B}^{-1}$ | $\mathbf{x}_B$ |

# 10. Oharrak

**1. Biribiltze-erroreak**. Konputagailuek zatikiak zehaztasun aritmetiko finituko biribiltzeen bidez kalkulatzen dituztenez, kasuren batean gerta daiteke simplex metodoaren bidez lortutako oinarriko soluzio bideragarri optimoak problemaren murrizketak ez betetzea edo beteta ere soluzioa optimo ez izatea.

**2. Aldagai artifizialak oinarri optimoan**. Gerta liteke oinarri optimoan aldagai artifizialak agertzea zero balioarekin. Horrek bi egoera adieraz ditzake: eredu linealean murrizketa erredundanteak daudela edo soluzioa endekatua dela.

**3. Ziklatzearen arazoa**. Irteera-erregela bektore batek baino gehiagok betetzen badu, eta horien arteko aukeraketa modu egokian egiten ez bada, ziklatzea gerta daiteke.

**4. Simplex algoritmoaren eraginkortasuna**. Soluzio optimora iristeko egin beharreko kalkulu kopurua eredu linealaren aldagai kopuruaren mende baino murrizketa kopuruaren mende dago.