1. EREDU LINEALAK. EBAZPIDE GRAFIKOA

1. Eredu lineala

2. Eredu lineala idazteko formak

3. Eredu lineala sortzen

   3.1 Garraio-problema

   3.2 Ekoizpen-problema

   3.3 Nahasketen problema

   3.4 Dieta-problema

   3.5 Mozketa-problema

4. Ebazpide grafikoa

   4.1 Soluzio optimo bakarra duen problema

   4.2 Soluzio optimo anizkoitza duen problema

   4.3 Problema bideraezina

   4.4 Soluzioen eskualde bornegabea. Soluzio bornegabea

   4.5 Soluzioen eskualde bornegabea. Soluzio bornatua

1. Eredu lineala

Honelakoa da eredu lineala:

$$\text{opt} \quad z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \tag{1}$$

hauen mende

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} \mathbf{b} \tag{2}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{3}$$

(1) helburu funtzioa.

(2) murrizketak.

(3) ez-negatibotasunaren murrizketak.

Eredu linealean agertzen diren elementuak:

- $\mathbf{x}$: erabaki-aldagaien bektorea da.
- $\mathbf{c}^T$: prezio-bektorea edo kostu-bektorea da.
- $\mathbf{b}$: baliabide-bektorea da.
- $\mathbf{A}$: koefiziente teknologikoen matrizea da.

$\mathbf{c}^T$, $\mathbf{b}$ eta $\mathbf{A}$: parametro ezagunak; ez ordea $\mathbf{x}$.

2. Eredu lineala idazteko formak

1.

$$
\begin{aligned}
\text{opt } z \ &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{hauen mende} & \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n &\geq 0
\end{aligned}
$$

2.

$$\text{opt } z = (c_1, \ldots, c_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

hauen mende

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \geq (0, 0, \cdots, 0)^T$$

3.

$$
\begin{aligned}
\text{opt } z \ &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{hauen mende} & \\
\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \cdots + \mathbf{a}_nx_n &\overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} \mathbf{b} \\
x_j \geq 0 \ , \ j &= 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

3. Eredu lineala sortzen

3.1 Garraio-problema

H_1, H_2 eta H_3 hirietan bizikletak ekoizten dira, hilean 1000, 2100 eta 1500. A, B, C eta D bezeroek hilero 800, 1100, 900 eta 1300 bizikleta erosteko eskaria egiten diote. Bizikleta bakoitza garraiatzearen kostua:

	A	B	C	D
H_1	10	8	10	13
H_2	19	6	15	16
H_3	14	8	9	6

Bizikleten garraioa kostu minimoan antolatu behar da.

Erabaki-aldagaiak.

x_{ij}: H_i-tik j-ra hilero garraiatuko den bizikleta-kopurua,

$i = 1, 2, 3,\ j = A, B, C, D.$

Eredu lineala.

$$
\begin{aligned}
\text{min } \ z = {} & 10x_{1A} + 8x_{1B} + 10x_{1C} + 13x_{1D} + 19x_{2A} + 6x_{2B} + \\
& 15x_{2C} + 16x_{2D} + 14x_{3A} + 8x_{3B} + 9x_{3C} + 6x_{3D} \\
\text{hauen mende} & \\
& x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{1D} \le 1000 \\
& x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{2D} \le 2100 \\
& x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D} \le 1500 \\
& x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \ge 800 \\
& x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} \ge 1100 \\
& x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} \ge 900 \\
& x_{1D} + x_{2D} + x_{3D} \ge 1300 \\
& x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = A, B, C, D
\end{aligned}
$$

3.2 Ekoizpen-problema

P_1, P_2 eta P_3 piezak ekoizteko A, B eta C makinak erabiltzen dira. Makinak erabilgarri dauden ordu-kopurua eta makina bakoitzaren ekoizpen-kostua:

	Erabilgarritasuna (ordu/aste)	Ekoizpen-kostua (euro/ordu)
A makina	1000	6
B makina	1000	4
C makina	1000	5

Pieza bakoitza ekoizteko makina bakoitzean egon beharko duen ordu-kopurua:

	P_1	P_2	P_3
A makina	1	2	3
B makina	2	3	1
C makina	1	1	1

Piezen ekoizpenerako dagoen M_1 eta M_2 materiala: 1000 kg eta 1200 kg. Pieza-unitate bakoitzaren ekoizpenean behar dena:

Pieza	M_1 (kg/pieza)	M_2 (kg/pieza)
P_1	1	2
P_2	1	3
P_3	3	1

M_1 materialaren kostua 1.5 eurokoa da kiloko, M_2 materialarena 3 eurokoa. Piezen salmenta prezioa: 50, 56 eta 70 euro.

Asteroko ekoizpena antolatu nahi da irabazi maximoa lortzeko.

Erabaki-aldagaiak.

x_j: astero ekoitziko den P_j pieza-kopurua, $j = 1, 2, 3$.

Helburu funtzioa.

Irabazia maximizatzea: "Salmenta-prezioa" – "Materialaren kostua" – "Ekoizpen-kostua"

* Salmenta-prezioa $= 50x_1 + 56x_2 + 70x_3$
* Materialaren-kostua $= (1 \times 1.5 + 2 \times 3)x_1 + (1 \times 1.5 + 3 \times 3)x_2 + (3 \times 1.5 + 1 \times 3)x_3$
* Ekoizpen-kostua $= (1 \times 6 + 2 \times 4 + 1 \times 5)x_1 + (2 \times 6 + 3 \times 4 + 1 \times 5)x_2 + (3 \times 6 + 1 \times 4 + 1 \times 5)x_3$

Eredu lineala.

$$
\begin{aligned}
\max\ z = 23.5x_1 + 16.5x_2 + 35.5x_3 & \\
\text{hauen mende} & \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 1000 \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 1000 \\
x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1000 \\
x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 1000 \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 1200 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

3.3 Nahasketen problema

Petrolio-gordinaren hiru osagai nahasiz A eta B gasolinak ekoizten dira. Erabilgarri dagoen osagai bakoitzeko upel-kopurua eta upel bakoitzaren kostua:

	Upel-kopurua	Kostua
O_1 osagaia	2000	10
O_2 osagaia	3000	8
O_3 osagaia	1000	12

A eta B gasolinak lortzeko,

- A gasolinak duen O_1 osagai-kantitatea gutxienez %30 da, eta O_2 osagaia gutxienez %20; O_3 osagaia, aldiz, gehienez %30 izango du.

- B gasolinak bere konposizioan osagai bakoitzetik gutxienez %25 izan behar du.

A eta B gasolinak upeletan saltzen dira, 40 eta 35 salmenta-prezioan.

Gasolinen ekoizpena antolatzea da helburua, ekoizpenetik lortutako irabaziak maximizatzeko.

Erabaki-aldagaiak.

x_{ij}: j gasolina sortzeko O_i osagai bakoitzetik erabiliko den upel-kopurua, $i = 1, 2, 3$, $j = A, B$.

Helburu funtzioa. Irabazia maximizatzea: "Gasolinen prezioa (GP)" – "Osagaien kostua (OK)"

GP $= 40(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) + 35(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B})$

OK $= 10(x_{1A} + x_{1B}) + 8(x_{2A} + x_{2B}) + 12(x_{3A} + x_{3B})$

Eredu lineala.

max $z = 30x_{1A} + 32x_{2A} + 28x_{3A} + 25x_{1B} + 27x_{2B} + 23x_{3B}$

hauen mende

$$
\begin{aligned}
x_{1A} + x_{1B} &\leq 2000 \\
x_{2A} + x_{2B} &\leq 3000 \\
x_{3A} + x_{3B} &\leq 1000 \\
x_{1A} &\geq \frac{30}{100}(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) \\
x_{2A} &\geq \frac{20}{100}(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) \\
x_{3A} &\leq \frac{30}{100}(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) \\
x_{1B} &\geq \frac{25}{100}(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) \\
x_{2B} &\geq \frac{25}{100}(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) \\
x_{3B} &\geq \frac{25}{100}(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) \\
x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j &= A, B
\end{aligned}
$$

3.4 Dieta-problema

Dieta: A bitaminatik gutxienez 25 miligramo, B bitaminatik 25 eta 30 miligramo artean, C bitaminatik gutxienez 22 eta D bitaminatik gehienez 17.

	Bitaminak (mg/g)				Kostua
	A	B	C	D	(euro/g)
E_1 elikagaia	2	1	0	1	0.014
E_2 elikagaia	1	2	1	2	0.009
E_3 elikagaia	1	0	2	0	0.013
E_4 elikagaia	1	2	1	1	0.016

Kostu minimoko dieta diseinatu nahi da.

Erabaki-aldagaiak.

x_j: dietarako E_j elikagaien gramo kopurua, $j = 1, 2, 3, 4$.

Eredu lineala.

$$
\begin{aligned}
\min\ z = 0.014x_1 + 0.009x_2 + 0.013x_3 + 0.016x_4 \\
\text{hauen mende} \\
2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq 25 \\
x_1 + 2x_2 + 2x_4 &\geq 25 \\
x_1 + 2x_2 + 2x_4 &\leq 30 \\
x_2 + 2x_3 + x_4 &\geq 22 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 &\leq 17 \\
x_j \geq 0,\ \ j &= 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
$$

3.5 Mozketa-problema

5 metroko zabalerako paper-bobinak moztu. Eskariak: 3m-ko 100, 2m-ko 100, 1.5m-ko 300, 1m-ko 150. Paper-bobina kopuru minimoa moztu behar da.

Mozteko 7 aukerak:

Mozteko	Zabalera			
aukera	3m	2m	1.5m	1m
1	1	1	0	0
2	1	0	0	2
3	0	2	0	1
4	0	1	2	0
5	0	1	0	3
6	0	0	2	2
7	0	0	0	5

Erabaki-aldagaiak.

x_j: j mozteko aukeraren arabera moztutako paper-bobina kopurua, $j = 1, \ldots, 7$.

Eredu lineala.

$$\min \; z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

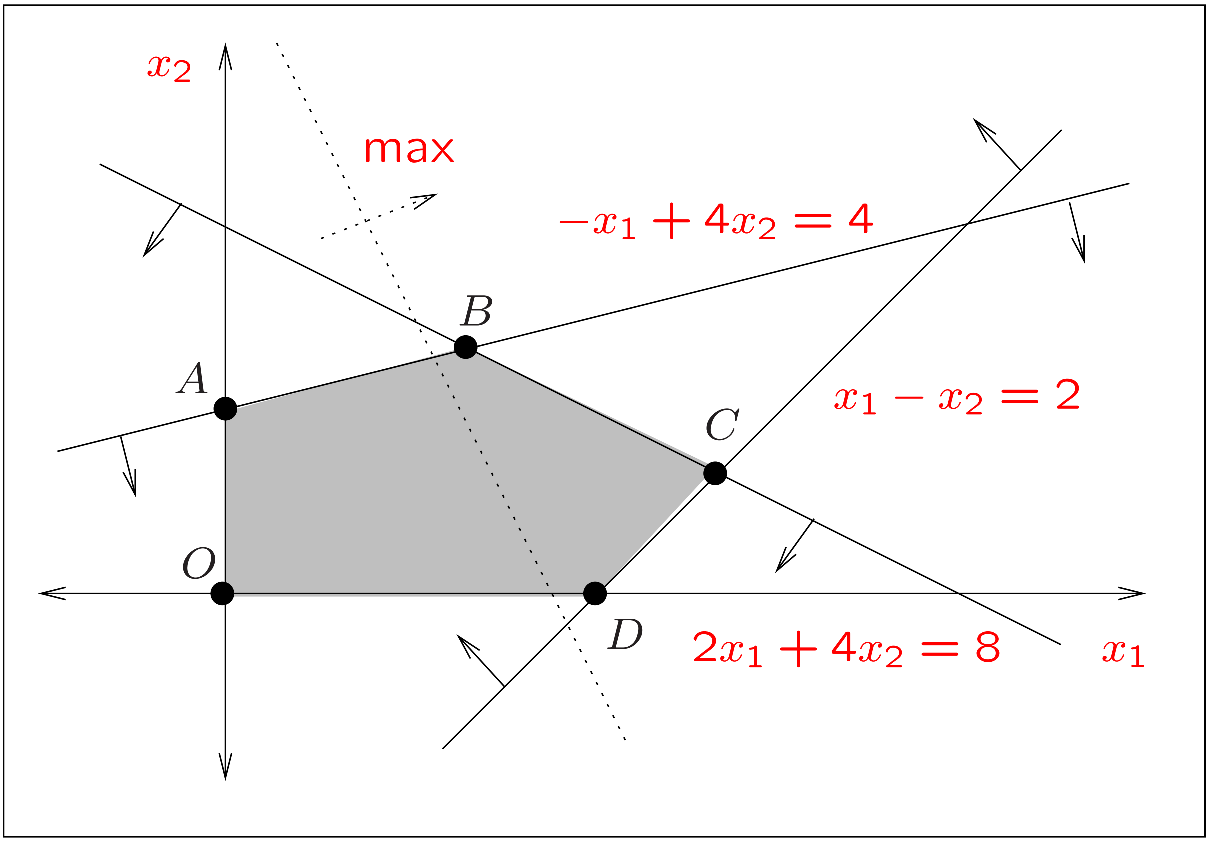
hauen mende

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 100 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + x_5 &\geq 100 \\ 2x_4 + 2x_6 &\geq 300 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + 5x_7 &\geq 150 \\ x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, &7 \end{aligned}$$

4. Ebazpide grafikoa

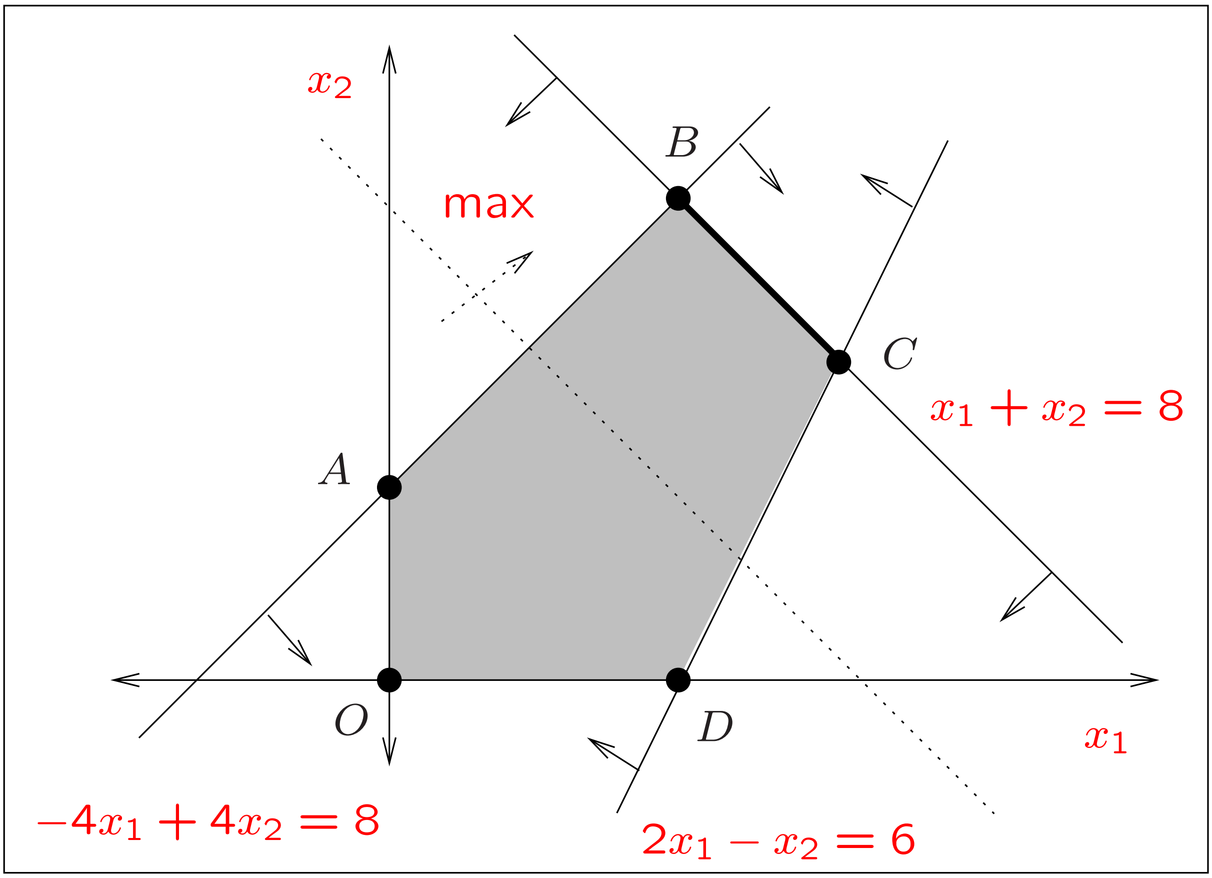
4.1 Soluzio optimo bakarra duen problema

$$\begin{aligned} \max\ z = 6x_1 + 3x_2 \\ \text{hauen mende} \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



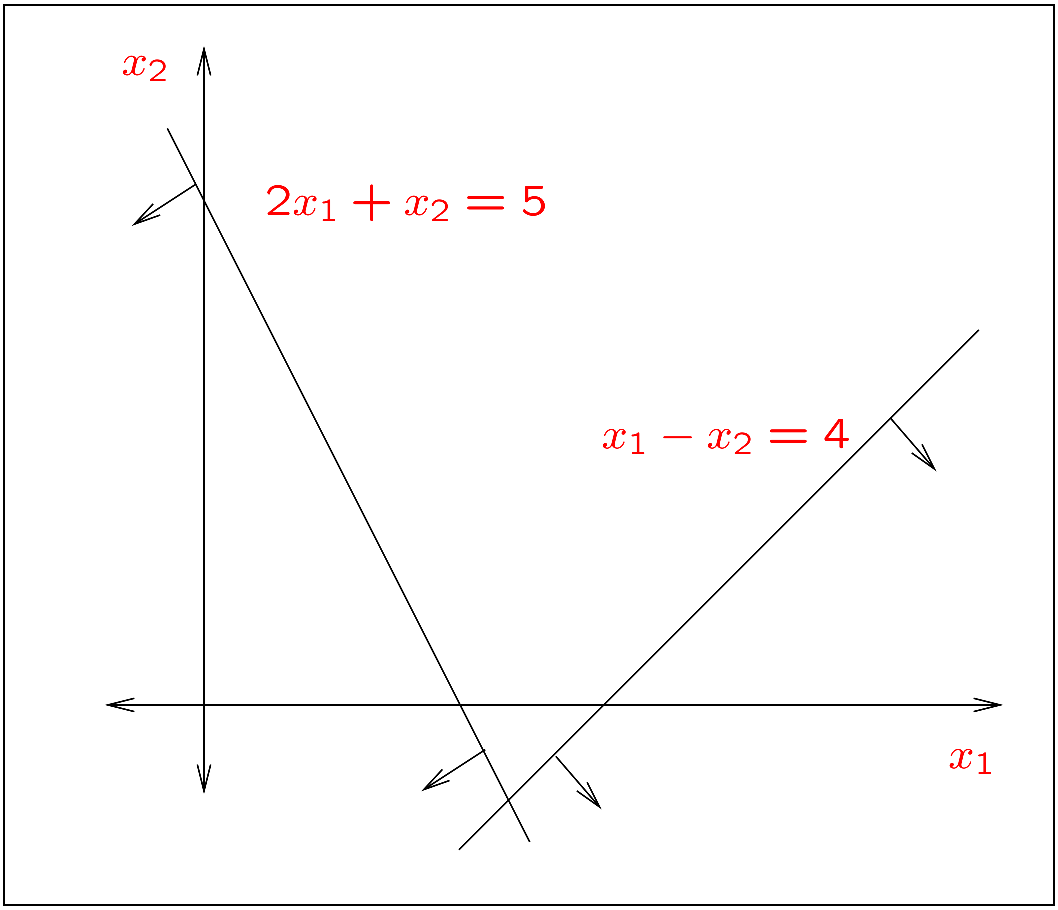
4.2 Soluzio optimo anizkoitza duen problema

$$\begin{aligned}
\text{max} \quad & z = x_1 + x_2 \\
\text{hauen mende} & \\
& x_1 + x_2 \leq 8 \\
& -4x_1 + 4x_2 \leq 8 \\
& 2x_1 - x_2 \leq 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$



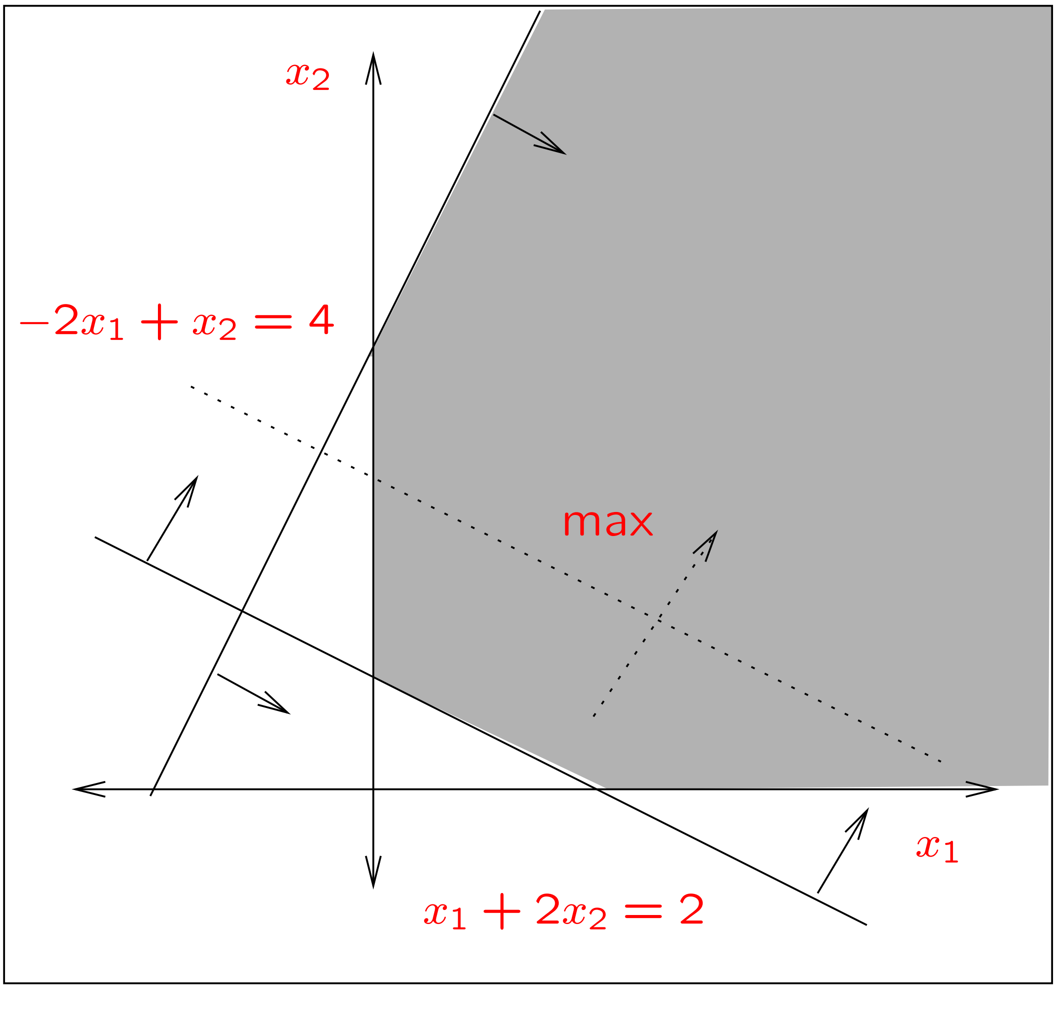
4.3 Problema bideraezina

$$\begin{aligned} &\text{max} \quad z = x_1 + x_2 \\ &\text{hauen mende} \\ &\qquad 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ &\qquad x_1 - x_2 \geq 4 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



4.4 Soluzioen eskualde bornegabea. Soluzio bornegabea

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{hauen mende} & \\ & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



4.5 Soluzioen eskualde bornegabea. Soluzio bornatua

$$\begin{aligned} \text{min} \quad z = x_1 + 2x_2 & \\ \text{hauen mende} & \\ x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$