6. Kapitulua

Programazio osoa

Kapitulu honetan, aztergai izango ditugun problema linealetan aldagai batzuek edo guztiek balio osoak hartu behar dituzte. Mota horretako problema linealak ebazteko, programazio osoaren teknikak garatu dira eta, ikusiko dugunez, problema osoaren soluzio optimoa lortzeko, programazio linealeko zenbait problema ebatzi beharko dira.

Aldagai errealeko eredu linealak ebazteko ezagutzen dugun simplex algoritmoa soluzioen multzoaren ganbiltasunean oinarritzen da. Multzo ganbilen muturpuntu kopurua finitua da eta, frogatu dugunez, soluzio optimoa horietariko muturpuntu batean aurkitzen da. Aldagaiak osoak izateko murrizketak soluzioen multzoa murrizten badu ere, problemaren soluzio optimoaren kalkulua zaildu egiten du.

Aldagaien balioak kontuan hartuz, eredu lineal osoak hiru motakoak izan daitezke.

- Programazio oso mistoan aldagaiak bai oso eta bai erreal izan daitezke.
- Programazio oso hutsean aldagai guztiak osoak dira.
- 0-1 programazio osoko ereduetan aldagai guztiak bitarrak dira.

6.1 Programazio osoaren aplikazio batzuk

Atal honetan programazio osoaren eta 0-1 programazio osoaren zenbait adibide azalduko dugu.

1. Adibidea. Postetxe bulego batean asteko egun bakoitzerako langile kopuru desberdinak behar dira (ikus taula).

Eguna	Langileak
1. Astelehena	15
2. Asteartea	13
3. Asteazkena	15
4. Osteguna	18
5. Ostirala	14
6. Larunbata	16
7. Igandea	10

Langile bakoitzak bost egunez jarraian lan egin behar du eta gero bi egunez atsedena hartu. Erabaki behar da asteko egun bakoitzean lanean hasiko den langile kopurua zein izango den, postetxeko eguneroko langile beharrak asetuko direlarik. Problemaren helburua postetxeko langile beharrei aurre egitea da, langile kopuru minimoa kontratatuz.

Eredu lineala idazteko ondoko erabaki-aldagaiak definitzen dira:

$$x_j : j \text{ egunean lanean hasiko den langile kopurua}, j = 1, \ldots, 7.$$

Asteko egun bakoitzerako murrizketa bat idatziko da, egun horretan lanean dagoen langile kopuruak langile-beharra asetzen duela ziurtatzeko. Eredu lineala ondokoa da:

$$\begin{aligned}
\min\ z &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
\text{hauen mende} & \\
x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 15 \\
x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 13 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 &\geq 15 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 &\geq 18 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 14 \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\geq 16 \\
x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 10 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0 \text{ eta osoak}
\end{aligned}$$

2. Adibidea. Motxilaren problema. Gehienez 12 kg eramateko ahalmena duen motxila bat zenbait objektuz bete nahi dugu. Lau objektu ditugu, eta hauen balioa eta pisua ondoko taulakoak dira:

	1	2	3	4
Pisua (kg)	3	6	5	5
Balioa (euro)	15	25	12	10

Erabaki behar da zein objektu sartu motxilan bere balio-totala maximizatzeko. Problema eredu lineal baten bidez adierazteko, ondoko erabaki-aldagaiak definituko ditugu j objektuetarako, $j = 1, 2, 3, 4$.

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{baldin } j \text{ objektua motxilan sartzen bada} \\ 0 & \text{kontrako kasuan} \end{cases}$$

Eredu lineala ondokoa da:

$$\begin{aligned} \max\ z = 15x_1 + 25x_2 + 12x_3 + 10x_4 \\ \text{hauen mende} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 \leq 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ edo } 1 \end{aligned}$$

Antzeko planteamendua egin daiteke murrizketa gehiagorekin, adibidez, objektuaren bolumena kontuan hartuz.

3. Adibidea. Eskualde batean 6 hiri daude. Hiriak elkarren artean komunikatuak egon daitezen, tren-geltokiak eraiki nahi dira. Tren-geltoki horien kokapena erabaki nahi da, beti ere, edozein hiritatik abiatuta ere, 30 minutuan edo gutxiagotan tren-geltoki bat izango dela ziurtatu behar delarik eta ahalik eta tren-geltoki gutxienak eraiki nahi direlarik. Hiri bakoitzetik gainerakoetara joateko behar den denbora ondoko taulan agertzen da:

	1	2	3	4	5	6
1	0	35	20	40	30	60
2	35	0	45	35	20	70
3	20	45	0	15	55	20
4	40	35	15	0	65	35
5	30	20	55	65	0	40
6	60	70	20	35	40	0

Ondoko aldagai bitarrak definitzen ditugu j hirietarako, $j = 1, \ldots, 6$:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{baldin } j \text{ hirian tren-geltokia eraikitzen bada} \\ 0 & \text{kontrako kasuan} \end{cases}$$

Eredu lineala ondokoa da:

$$\begin{aligned} \min\ z &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ \text{hauen mende} & \\ x_1 + x_3 + x_5 &\geq 1 \\ x_2 + x_5 &\geq 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_6 &\geq 1 \\ x_3 + x_4 &\geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_5 &\geq 1 \\ x_3 + x_6 &\geq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &= 0 \text{ edo } 1 \end{aligned}$$

Murrizketa bakoitza hiri bati dagokio, eta ziurtatzen du hiri horretatik gehienez 30 minutura badagoela tren-geltoki bat. Adibidez, lehenengo murrizketak lehenengo hiritik 30 minutura edo gertuago tren-geltoki bat egongo dela ziurtatzen du.

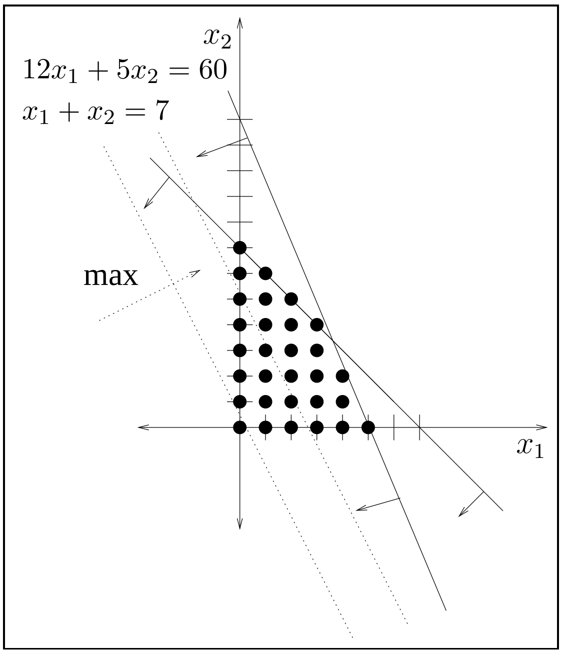
6.2 Problema osoen ebazpena

Hasteko, eredu lineal oso baten soluzio optimoa kalkulatzerakoan sortzen diren zailtasunak adibide baten bidez erakutsiko ditugu.

Izan bedi ondoko eredu lineala:

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 80x_1 + 45x_2 \\
\text{hauen mende} & \\
x_1 + x_2 &\leq 7 \\
12x_1 + 5x_2 &\leq 60 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \text{ eta osoak}
\end{aligned}
$$

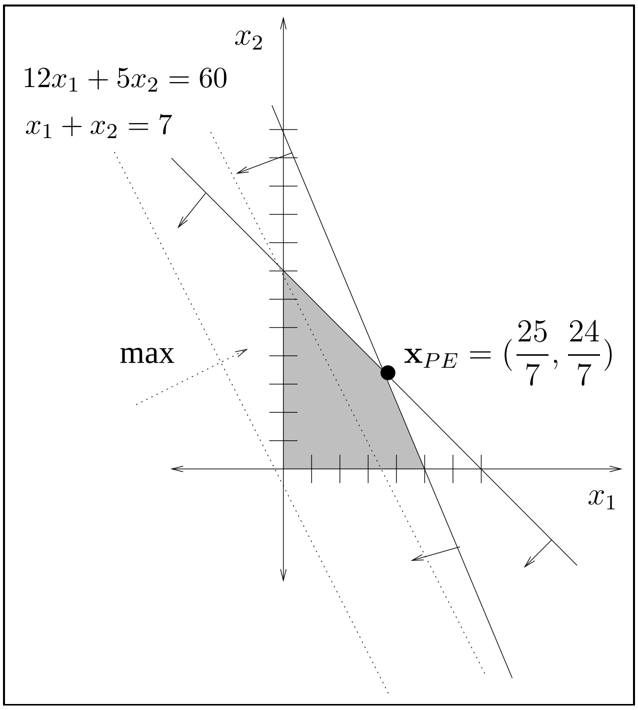
Ondoko grafikoan adierazten da eredu lineal osoaren soluzioen multzoa:



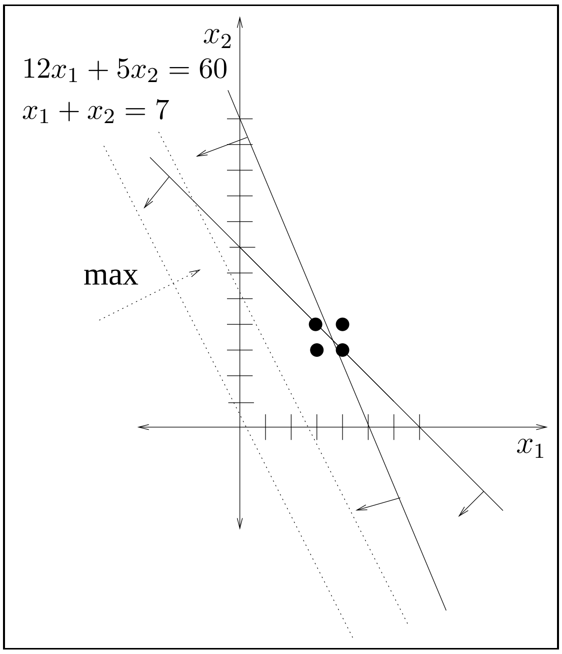
Soluzioen multzoan puntu kopuru finitua dago, eta ondorioz, puntu guztiak kalkula daitezke eta horietako bakoitzean helburu funtzioaren balioa aztertu, optimoa aurkitzeko. Baina, metodo hori ez da eraginkorra aldagai asko dituzten problematan, soluzioen multzoan egon daitekeen puntu kopuruagatik.

Kapitulu honetan ikusiko dugu problema osoaren soluzio optimoa kalkulatzeko askoz ere kalkulu gehiago egin beharko dugula, nahiz eta jatorrizko problemari oso izatearen murrizketa kenduta geratzen den problemaren soluzio kopurua txikiagoa izan. Horren arrazoia hau da: problema lineal osoaren soluzioen multzoa ez dela multzo ganbila, problema lineal orokorretan, aldiz, bai. Ganbiltasunaren propietateari esker, 2. Kapituluan garatutako teoria aplika daiteke.

Ereduaren soluzio optimoa aurkitzeko beste modu bat problema ebaztea da, aldagaiak osoak izateko murrizketa kontuan hartu gabe, eta behin soluzio optimoa kalkulatu denean, soluzio horretatik gertuen dagoen soluzio osoa problema osoaren soluziotzat hartzea. Adibidearekin jarraituz, aldagaiek osoak izateko duten murrizketa kenduko diogu problemari; problema horri *problema erlaxatua* esaten zaio, eta PE laburduraz adieraziko dugu aurrerantzean. Ondoko grafikoan dago problema erlaxatuaren ebazpena:



Problema erlaxatuaren soluzio optimoa $\mathbf{x}_{PE} = (\frac{25}{7}, \frac{24}{7}) = (3.571, 3.428)$ da, eta helburu funtzioaren balio optimoa puntu horretan $z_{PE} = 440$. Dena den, puntu hori ez da problema osoaren soluzio optimoa, aldagaien balio optimoak ez direlako osoak. Aldagaien balioak biribilduz, problema erlaxatuaren puntu optimoaren inguruko beste lau puntu lortzen dira: $(3,3)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(4,4)$, eta helburu funtzioaren balioa kalkula dezakegu lau puntu horietan. Kasu honetan, optimoa $(4,4)$ puntuan dago, baina ondoko grafikoan ikus daitekeen bezala, puntu hori ez dago soluzioen multzoan:



Metodo hau ere ez da oso egokia problema handietan aplikatzeko, hurbilketa posible asko egon daitekeelako, eta ikusi dugun bezala, hurbilketa horietako batzuk soluzioen multzotik kanpo egon daitezkeelako. Gainera, problema handietarako hurbilketa asko kalkulatu beharko dira.

Arrazoi horiengatik problema osoak ebazteko teknika bereziak garatu dira. Kapitulu honetan adarkatzearen eta bornatzearen teknika azaltzen da.

6.3 Problema osoen ebazpide grafikoa

Adarkatze- eta bornatze-algoritmoaren arabera, eredu erlaxatua ebazten da, eta lortutako soluzioa osoa ez bada, problema erlaxatua bitan banatzen da (adarkatzea), soluzioen multzoari problema osoaren soluzio optimoa barnean ez duen zati bat kentzeko. Sortutako bi problemak ebazten dira, eta soluzioa osoa ez bada adarkatu egiten da. Adarkatzearen ondorioz lortzen diren problemek, erlaxatuak bezala, ez dute aldagaiak osoak izatearen murrizketa, eta ondorioz, simplex algoritmoa erabiliz ebatziak izango dira.

Atal honetan, adarkatze- eta bornatze-algoritmoa azalduko dugu 205. orrialdeko problema grafikoki ebatziz. Har ditzagun adibideko eredu lineala eta dagokion eredu erlaxatua.

Problema Osoa: PO	Problema Erlaxatua: PE
$\max\ z = 80x_1 + 45x_2$	$\max\ z = 80x_1 + 45x_2$
hauen mende	hauen mende
$x_1 + x_2 \leq 7$	$x_1 + x_2 \leq 7$
$12x_1 + 5x_2 \leq 60$	$12x_1 + 5x_2 \leq 60$
$x_1, x_2 \geq 0$ eta osoak	$x_1, x_2 \geq 0$

Eredu erlaxatuaren soluzio optimoa $\mathbf{x}_{PE} = (3.571, 3.428)$ puntuan dagoela ikusi dugu 206. orrialdeko grafikoan. Problema erlaxatuaren balio optimoa $z_{PE} = 440$ da. Aldagaiek ez dituzte balio osoak hartzen. Ikusiko dugu problema osoaren soluzio optimoa kalkula daitekeela zenbait problema erlaxaturen ebazpenaren bitartez. Horretarako, problema bitan banatuko da, problema osoaren soluzioa izango ez duen problema erlaxatuaren soluzioen multzoaren zati bat kenduz; adarkatuz, alegia.

Problema adarkatzeko, soluzio optimoan balio osoa izan behar duen eta ez duen aldagai bat aukeratu behar da; kasu honetan, bai x_1 eta bai x_2 aukeratuak izan daitezke. x_1 aukeratuko dugu, eta soluzio optimoan 3.571 balioa hartzen duela ikusten dugunez, esan dezakegu aldagai horrek ezin duela $3 < x_1 < 4$ tarteko baliorik hartu, osoak ez direlako. Hortaz, problema erlaxatuaren soluzioen multzoa bitan banatuko dugu x_1 aldagairako balioen tarte hori kenduz, hau da, x_1 aldagairako balioak bornatuz ondoko murrizketak erabiliz: $x_1 \leq 3$ eta $x_1 \geq 4$. Horrela lortzen dira ondoko bi problemak:

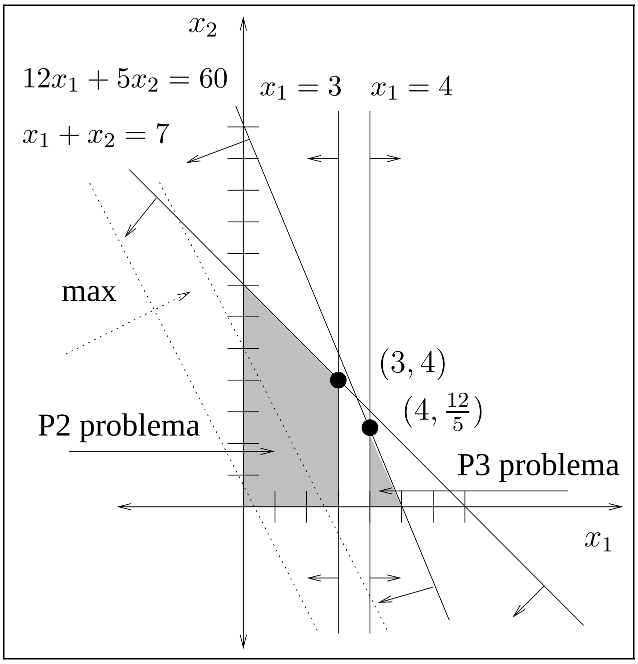
P2 problema	P3 problema
$\max\ z = 80x_1 + 45x_2$	$\max\ z = 80x_1 + 45x_2$
hauen mende	hauen mende
$x_1 + x_2 \leq 7$	$x_1 + x_2 \leq 7$
$12x_1 + 5x_2 \leq 60$	$12x_1 + 5x_2 \leq 60$
$x_1 \leq 3$	$x_1 \geq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2 \geq 0$

Sortu berri ditugun P2 problema eta P3 problema grafikoki ebatziz, 209. orrialdeko grafikoan ikusten da hasierako problema erlaxatuaren soluzioen multzotik x_1

aldagairako 3 eta 4 arteko balio erreal ez-oso guztiak desagertu direla. P2 problemari eta P3 problemari dagozkien soluzioen multzoak grisez marraztuta ikusten dira grafikoan. Bi problema horiek modu independentean ebatzi behar dira. Grafikoki ebatziz lortzen diren soluzio optimoak ondokoak dira:

- P2 problema: Soluzio optimoa $\mathbf{x}_{P2} = (3, 4)$ eta $z_{P2} = 420.$
- P3 problema: Soluzio optimoa $\mathbf{x}_{P3} = (4, \frac{12}{5})$ eta $z_{P3} = 428.$

P2 problemaren soluzio optimoa osoa denez, problema ez da adarkatua izango, eta *azkeneko problema* dela esaten da. $\mathbf{x}_{P2} = (3, 4)$ soluzioari *soluziogai* esaten zaio, eta bera izango da problema osoaren soluzio optimoa, beste hobe bat aurkitzen ez badugu. Problema horren helburu funtziorako balio optimoa $z_{P2} = 420$ da eta problema osorako *behe-bornea* finkatzen du: $z_b = 420$.

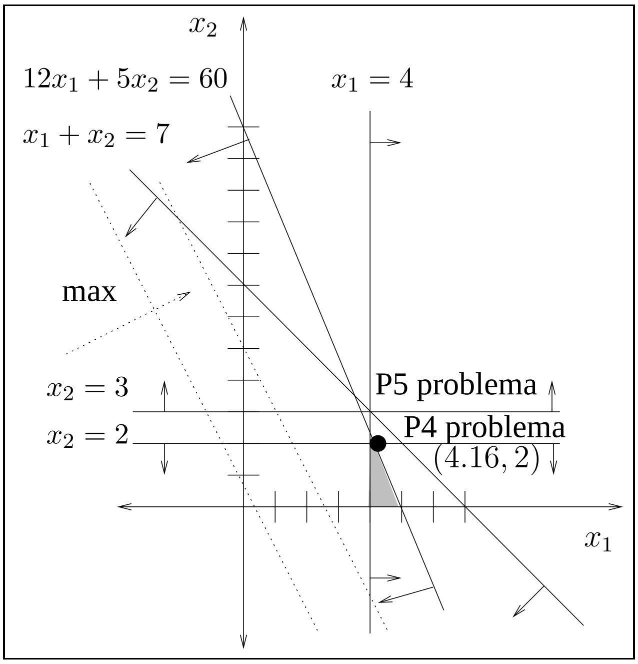


P3 problemaren soluzioa ez da problema osoaren soluzioa, ez delako osoa; x_2 aldagaiak $\frac{12}{5} = 2.4$ balioa hartzen du. Helburu funtzioak puntu horretan $z_{P3} = 428$ balioa hartzen du, eta $z_{P3} > z_b$ betetzen denez, problema adarkatu egingo dugu, P2 problemaren ebazpenetik lortu dugun soluziogaia baino hobea den beste soluzio oso bat aurkitzeko aukera dagoelako.

Adarkaketa egiteko, x_2 aldagaia aukeratuko dugu, aldagaia osoa izanik oraindik ez duelako balio osorik optimoan. P3 problema adarkatuz, hau da, bere soluzioen multzotik $2 < x_2 < 3$ balioak kenduz, P4 problema eta P5 problema lortzen dira.

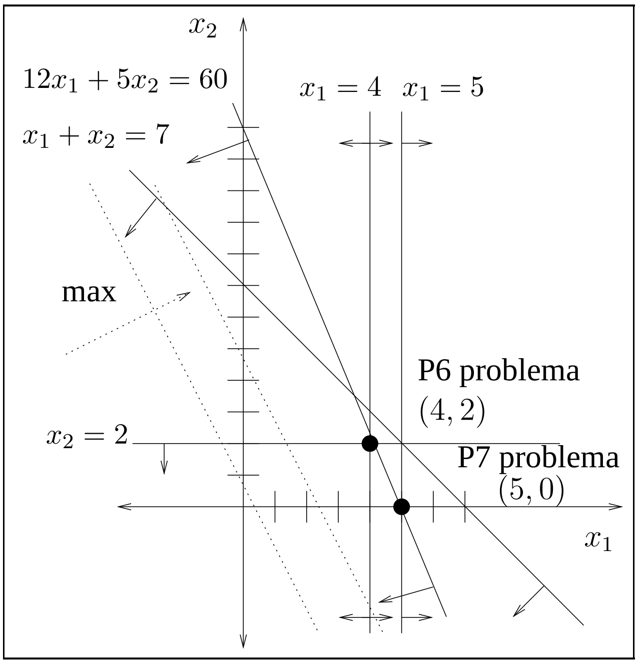
P4 problema	P5 problema
$\max\ z = 80x_1 + 45x_2$	$\max\ z = 80x_1 + 45x_2$
hauen mende	hauen mende
$x_1 + x_2 \leq 7$	$x_1 + x_2 \leq 7$
$12x_1 + 5x_2 \leq 60$	$12x_1 + 5x_2 \leq 60$
$x_1 \geq 4,\ x_2 \leq 2$	$x_1 \geq 4,\ x_2 \geq 3$
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2 \geq 0$

Hurrengo grafikoan P4 problemaren eta P5 problemaren soluzio optimoak kalkulatu dira, eta ikusten den bezala, P5 problemak ez du soluziorik; ondorioz, azkeneko problema da, eta ez da problema horretatik abiatuta adarkaketa gehiagorik egingo.



P4 problemaren soluzio optimoa $\mathbf{x}_{P4} = (\frac{25}{6}, 2) = (4.166, 2)$ da, eta helburu funtzioaren balio optimoa $z_{P4} = \frac{1270}{3} = 423.33$. Balio hori behe-bornearekin konparatuz, $z_{P4} > z_b = 420$ betetzen dela ikusten da. Hori dela eta, P4 problema ez da azkeneko problema eta adarkatzea erabakitzen da; x_1 aldagaia aukeratuz eta problemari $x_1 \leq 4$ eta $x_1 \geq 5$ murrizketak gehituz sortzen dira P6 problema eta P7 problema.

P6 problema	P7 problema
$\max\ z = 80x_1 + 45x_2$	$\max\ z = 80x_1 + 45x_2$
hauen mende	hauen mende
$x_1 + x_2 \leq 7$	$x_1 + x_2 \leq 7$
$12x_1 + 5x_2 \leq 60$	$12x_1 + 5x_2 \leq 60$
$x_1 \geq 4,\ x_2 \leq 2,\ x_1 \leq 4$	$x_1 \geq 4, x_2 \leq 2, x_1 \geq 5$
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2 \geq 0$



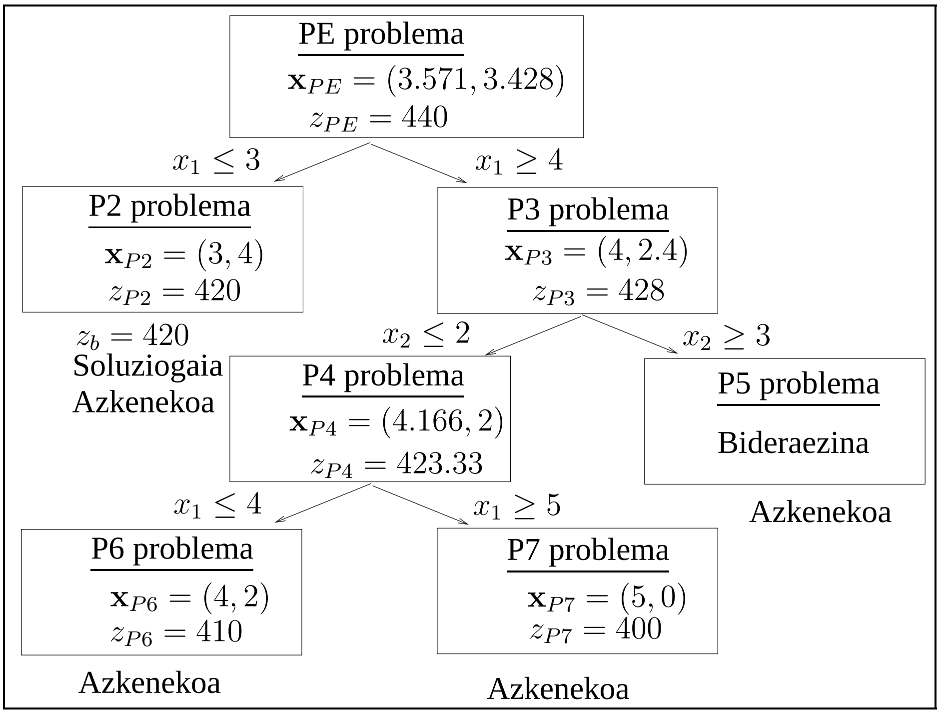
P6 problemaren soluzioen multzoa segmentu bat da, eta $\mathbf{x}_{P6} = (4, 2)$ puntua da soluzio optimoa, $z_{P6} = 410$ delarik. $z_{P6} < z_b = 420$ betetzen denez, problema azkenekoa da.

P7 problemaren soluzioen multzoan puntu bat besterik ez dago, eta bera da problemaren soluzio optimoa: $\mathbf{x}_{P7} = (5, 0)$. Helburu funtzioak bertan hartzen duen balioa $z_{P7} = 400$ izanik, $z_{P7} < z_b = 420$ betetzen denez, problema azkenekoa da.

Hortaz, biak azkeneko problemak dira, eta ez da adarkaketekin jarraitu behar. Problema osoaren soluzio optimoa P2 problema ebatziz lortutako soluziogaia da,

$$\mathbf{x}^*_{PO} = \mathbf{x}_{P2} = (x_1^*, x_2^*) = (3, 4) \quad \text{eta} \quad z^*_{PO} = z_b = 420.$$

Adibide honen ebazpen osoaren diagrama 6.1 Irudian dago. Bertan ikus daitezke adarkatze- eta bornatze-algoritmoa erabiliz sortutako problema erlaxatu guztien soluzio optimoak. Problema erlaxatu bakoitzerako kalkulatutako helburu funtzioaren balio optimoa problema osoaren goi-borne bat da ebazpenaren adar horretan.



6.1. Irudia: Adibideko eredu osoaren ebazpenaren diagrama.

6.4 Adarkatze- eta bornatze-metodoa

Aurreko atalean grafikoki ikusi dugun adarkatze- eta bornatze-algoritmoan *problema erlaxatua*, *soluziogaia* eta *azkeneko problema* kontzeptuak erabili ditugu.

6.4.1 Definizioa. (Problema erlaxatua) *Problema lineal oso bat emanik, aldagaiak osoak izatearen murrizketa kenduta lortzen den ereduari problema erlaxatua esaten zaio.*

Problema Osoa: PO	Problema Erlaxatua: PE
$\max\ z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$	$\max\ z\ = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$
hauen mende	hauen mende
$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$	$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ eta osoa	$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Problema erlaxatuak problema osoak baino murrizketa gutxiago ditu. Horrek esan nahi du problema osoaren bideragarritasun-eskualdea dagokion problema erlaxatuaren bideragarritasun-eskualdearen parte dela, hau da, maximizatze kasurako balio optimoen artean honako erlazioa betetzen da:

$$z^*_{PE} \geq z^*_{PO}.$$

6.4.2 Definizioa. (Soluziogaia) *Problema oso bat izanik, problemaren ebazpenaren iterazio bakoitzean ordura arte lortutako soluzio oso onenak soluziogai izena hartzen du.*

Soluziogaia problema osoaren soluzio optimoa izan daitekeenez gorde egin behar da, hobea izango den beste bat lortu arte. Helburu funtzioak soluziogaian hartzen duen balioak problema osorako z_b *behe-bornea* finkatzen du. Ebazpenean problema baten helburu funtzioaren balioa z_b baino txikiagoa edo berdina denean, adar hori moztu egingo dugu, eta problema ez da gehiago adarkatua izango, problema osoaren soluzio optimoa adar horretatik ezin izango delako lortu. Adarkatua izango ez den problema horri *azkeneko problema* esaten zaio eta honela definitzen da.

6.4.3 Definizioa. (Azkeneko problema) *Problema oso bat ebazterakoan, ondoko baldintzetako bat betetzen duen problema erlaxatu oro azkeneko problema dela esaten da: (1) bideraezina bada, (2) helburu funtzioaren balio optimoa z_b behebornea baino txikiagoa edo berdina bada, (3) soluzioa osoa bada.*

Adibidez, 6.1 Irudian P2 problema, P5 problema, P6 problema eta P7 problema azkeneko problemak dira.

Adarkatze- eta bornatze-algoritmoan, problema erlaxatu bakoitzaren helburu funtzioaren balio optimoa z_g notazioaz adieraziko dugu, esan bezala, problema osoaren balio optimorako *goi-borne* bat finkatuko duelako adarrean.

6.4.1 Adarkatze- eta bornatze-algoritmoa

Algoritmo hau maximizatze-helburua duten programazio osoko problemak ebazteko diseinatua izan da. Algoritmoaren urratsak ondokoak dira:

1. **urratsa. Hasieraketa**

   Problema osoari dagokion problema erlaxatua ebatzi.

   – Problema erlaxatuaren soluzio optimoa osoa bada, hori izango da problema osoaren soluzio optimoa. Amaitu.

   – Bestela, problema osoaren helburu funtziorako z_b behe-bornea hasieratu. Problema osorako soluziogairik ez bada ezagutzen, $z_b = -\infty$ hasieratuko da.

2. **urratsa. Adarkatzea**

   Azkenekoa ez den problema bat aukeratu. Aukeratutako probleman osoa izan behar duen eta problemaren soluzio optimoan ez den x_j aldagai bat aukeratu. Problema adarkatu, $x_j \leq [x_j]$ eta $x_j \geq [x_j] + 1$ murrizketak erantsiz, bi problema berri sortzeko[1].

3. **urratsa. Bornatzea**

   Aurreko adarkatze-urratsean sortu berri ditugun bi problemak ebatzi[2] eta problema bakoitzerako z_g kalkulatu.

4. **urratsa. Azkeneko problemak**

   Azkeneko ez diren problema guztiak aztertu. Azkeneko dira ondoko baldintzetako bat betetzen dutenak.

   (1) Problema bideraezina da.

[1] $[x_j]$ balioa x_j aldagaiaren zati osoa da

[2] Ebazteko sentikortasunaren analisia erabiltzen da, eta simplex dual algoritmoa aplikatzen da.

(2) $z_g \leq z_b$.

(3) Problemaren soluzioa osoa da eta $z_g > z_b$. Behe-bornea eguneratu z_b $=z_g$ eginez; soluzio oso hori soluziogaia da.

Azkeneko ez den problemarik existitzen bada, algoritmoaren 2. urratsean jarraitu behar da adarkatze berri batekin. Problema guztiak azkeneko badira, soluziogaia problema osoaren soluzio optimoa da. Soluziogairik ez badago, problema osoa bideraezina da.

Problema oso baten soluzio optimoaren bilaketa adarkatze- eta bornatze-algoritmoaren bidez egiteak kalkulu asko eskatzen badu ere, algoritmo hau da problema osoak, bai hutsak eta bai mistoak, ebazteko gehien erabiltzen dena.

Algoritmoaren 2. urratsean adarkatua izango den problema eta bornatua izango den aldagaia irizpideren baten arabera aukeratzen badira, soluzio optimoaren bilaketan algoritmoaren zenbait iterazio aurreztu ahal izango dira. Adarkatua izango den problema aukeratzeko irizpide erraz bat azkenekoa ez den z_g handieneko problema aukeratzea da. Bornatua izango den aldagaia aukeratzeko, aldiz, irizpideak konplexuagoak dira. Ondoko adibidean zoriz, hau da, irizpiderik jarraitu gabe, aukeratuko dugu aldagaia.

Adibidea. 205. orrialdeko problema osoaren soluzio optimoa kalkulatuko dugu adarkatze- eta bornatze-algoritmoa erabiliz.

Lehenengo iterazioa

1. urratsa. Hasieraketa. PE problema erlaxatua ebatzi. Taula optimoa ondokoa da:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	0	0	20	5	440
$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{12}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{24}{7}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{25}{7}$

Behe-bornea hasieratuko dugu, $z_b = -\infty$.

2. urratsa. Adarkatzea. PE problema erlaxatuaren soluzioa ez da osoa. Adarkatzeko aldagai bat aukeratuko dugu, x_1, eta bi problema berri sortuko ditugu: P2 problema eta P3 problema (ikus 208. orrialdea).

3. urratsa. Bornatzea. Sentikortasunaren analisia erabiliz, bi problema horiek ebatziko ditugu.

- **P2 problemaren ebazpena.** $x_1 \leq 3$ murrizketari dagokion nasaitze-aldagaia gehitu eta P1 problemari dagokion taula optimoan sartu. Ondoko taula lortzen da:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	20	5	0	440
$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{12}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{24}{7}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{25}{7}$
$\mathbf{a}_5$	1	0	0	0	1	3

Taulako 3. errenkada egokitzeko, 3. errenkada − 2. errenkada eragiketa egingo dugu.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	20	5	0	440
$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{12}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{24}{7}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{25}{7}$
$\mathbf{a}_5$	0	0	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	$-\frac{4}{7}$

Taulan ez dago bideragarritasun primalik. Simplex dual algoritmoa aplikatuz, P2 problemarako optimoa den taula lortzen da.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	45	0	35	420
$\mathbf{a}_2$	0	1	1	0	-1	4
$\mathbf{a}_1$	1	0	0	0	1	3
$\mathbf{a}_4$	0	0	-5	1	-7	4

- **P3 problemaren ebazpena.** $x_1 \geq 4$ murrizketa -1 balioaz biderkatuko dugu P1 problemaren taula optimoan sartzeko, $-x_1 \leq -4$, eta ondoren, x_5 nasaitze-aldagaia gehituko dugu. Hau da lortuko dugun taula:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	20	5	0	440
$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{12}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{24}{7}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{25}{7}$
$\mathbf{a}_5$	-1	0	0	0	1	-4

3. errenkada eguneratu, 3. errenkada $+$ 2. errenkada eragiketa eginez.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	20	5	0	440
$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{12}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{24}{7}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{25}{7}$
$\mathbf{a}_5$	0	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	$-\frac{3}{7}$

Taulan ez dago bideragarritasun primalik. Simplex dual algoritmoa aplikatuz, P3 problemarako taula optimoa lortzen da.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	0	9	28	428
$\mathbf{a}_2$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{5}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	0	0	-1	4
$\mathbf{a}_3$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$

Horrela, P2 problema eta P3 problema ebatzi dira (ikus soluzioak 212. orrialdeko 6.1 Irudian).

4. urratsa. Azkeneko problemak.

P2 problema azkenekoa da $z_g = 420 > z_b$ izanik soluzioa osoa delako: $x_1 = 3$ eta $x_2 = 4$. Oraingoz kalkulatu den soluzio osorik onena izateagatik soluziogaia da, eta behe-bornea eguneratu egin behar da: $z_b = z_g = 420$.

P3 problema ez da azkenekoa, ez duelako 4. urratseko irizpide bat bera ere betetzen.

Problema guztiak azkenekoak ez direnez, algoritmoaren iterazio berri bat egin behar da 2. urratsean jarraituz.

Bigarren iterazioa

2. urratsa. Adarkatzea. Azkenekoa ez den problema bakarra aukeratuko dugu: P3 problema. Bertan, x_2 aldagaia aukeratuko dugu bornatua izateko. Problema adarkatuko dugu P3 problemari $x_2 \leq 2$ murrizketa erantsiz P4 problema sortzeko, eta $x_2 \geq 3$ erantsiz P5 problema sortzeko (ikus 210. orrialdea).

3. urratsa. Bornatzea. Sortutako bi problemak ebatzi. Aurreko iterazioan egin bezala, sentikortasunaren analisia eta simplex dual algoritmoa aplikatuko ditugu. Kasu honetan, P3 problemaren taula optimotik abiatuko gara P4 problemaren eta P5 problemaren soluzio optimoak kalkulatzeko (ikus soluzioak 212. orrialdeko 6.1 Irudian).

4. urratsa. Azkeneko problemak.

P5 problema azkenekoa da bideraezina delako.

P4 problemaren soluzio optimoa ez da osoa, eta $z_g = 423.33 > 420 = z_b$ betetzen da. Hortaz, problema ez da azkenekoa. 2. urratsera joan behar da algoritmoaren iterazio berri bati ekiteko.

Hirugarren iterazioa

2. urratsa. Adarkatzea. Oraingoan, P4 problema da azkenekoa ez den bakarra, eta adarkatua izateko aukeratuko dugu. Bertan, x_1 aldagaia aukeratuko dugu. Bi problema berri sortuko ditugu: P6 problema eta P7 problema (ikus ereduak 211. orrialdean).

3. urratsa. Bornatzea. Sortutako bi problema berriak ebatzi, aurreko urratsetan egin bezala. Kasu honetan, P4 problemaren taula optimotik abiatuko gara (ikus soluzio optimoak 212. orrialdeko 6.1 Irudian).

4.urratsa. Azkeneko problemak.

P6 problema azkenekoa da, $z_g = 410 < 420 = z_b$ betetzen delako.

P7 problema ere azkenekoa da, $z_g = 400 < 420 = z_b$ betetzen delako.

Problema guztiak azkeneko bihurtu direnez, algoritmoaren aplikazioa amaitu da. Problema osoaren soluzio optimoa, P2 problemaren ebazpenetik lortu den soluziogaia da.

$$x_1^* = 3, \;\; x_2^* = 4, \;\; z_{PO}^* = z_b = 420.$$

□

6.5 0-1 programazio osoa

Praktikan aldagai bitarrak besterik ez dituzten problemak existitzen dira. Mota horretako problemak ebazteko, algoritmo desberdinak garatu izan dira. Atal honetan, funtsean adarkatze- eta bornatze-algoritmoaren egitura bera duen algoritmo horietako bat azalduko dugu.

Aztertuko dugun algoritmoa erabiltzeko, 0-1 eredu lineal osoaren helburu funtzioaren koefizienteek ondoko baldintza bete behar dute:

$$0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n \tag{6.1}$$

Eredu lineala beti idatz daiteke (6.1) baldintza beteko duen idazkeran; hori hala izan dadin, beharrezkoak diren aldaketa linealak egin beharko dira.

Adibidea. Izan bedi ondoko 0-1 eredu lineal osoa:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 6x_1 - 4x_2 \\ \text{hauen mende} & \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ -x_1 + x_2 &\leq 17 \\ x_1, x_2 &= 0 \text{ edo } 1 \end{aligned}$$

Helburu funtzioaren koefizienteek (6.1) baldintza betetzen ez dutenez, ondoko aldaketa lineala egin behar dugu: helburu funtzioan koefiziente minimoa aukeratuko dugu balio absolutuan, c_2 kasu honetan. $x_2 = y_1$ egingo dugu baldin koefizientea positiboa bada, eta $x_2 = 1 - y_1$ baldin c_2 negatiboa bada. Kasu honetan c_2 negatiboa denez, $x_2 = 1 - y_1$ aldagai-aldaketa egingo dugu. Hurrengo koefiziente txikiena balio absolutuan c_1 da; positiboa denez, $x_1 = y_2$ egingo dugu.

Aldagai-aldaketa eginez lortzen den eredu linealean helburu funtzioaren koefizienteek (6.1) baldintza betetzea lortzen dugu, hau da, positiboak izatea eta goranzko ordenean egotea.

$$\begin{aligned} \max\ z &= 4y_1 + 6y_2 - 4 \\ \text{hauen mende} & \\ -2y_1 + 3y_2 &\leq 8 \\ -y_1 - y_2 &\leq 16 \\ y_2, y_2 &= 0 \text{ edo } 1 \end{aligned}$$

□

6.5.1 Definizioa. (Problema erlaxatua) *0-1 eredu lineal bat izanik, dagokion problema erlaxatua lortzeko problemari murrizketa guztiak kendu behar zaizkio, aldagaiak bitarrak izatearena izan ezik.*

6.5.2 Definizioa. (Soluzio partziala) *0-1 eredu lineal bat emanik, aldagairen bat balio finkorik gabe duen soluzioari eredu linealaren soluzio partziala deitzen zaio.*

6.5.3 Definizioa. (Soluzio partzial baten osaketa) *0-1 eredu lineal oso baten soluzio partzial bat emanik, finkatu gabe dauden aldagaiei balio finkoa ematen zaienean lortzen den soluzioa soluzio partzialaren osaketa dela esaten da.*

Adibidea. Izan bedi ondoko 0-1 eredu lineala:

$$
\begin{aligned}
\max\ z = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
\text{hauen mende} \qquad \\
x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\
3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \\
x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ edo } 1
\end{aligned}
$$

Dagokion problema erlaxatua ondokoa da:

$$
\begin{aligned}
\max\ z = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
\text{hauen mende} \qquad \\
x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ edo } 1
\end{aligned}
$$

Adibidez, $\mathbf{x} = (1, 1, -)$ soluzioa problema erlaxatuaren soluzio partzial bat da. Soluzio horrek bi osaketa posible ditu: $(1, 1, 0)$ eta $(1, 1, 1)$. $\mathbf{x} = (0, -, -)$ soluzioa ere problema erlaxatuaren soluzio partzial bat da, eta lau osaketa posible ditu: $(0, 1, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ eta $(0, 0, 0)$.

Problema erlaxatua ebaztea erraza gertatzen da, jakinda problemari murrizketa guztiak kendu zaizkiola, aldagaiak bitarrak izatearena izan ezik. Gainera, helburu funtzioaren koefiziente guztiak positiboak direnez, garbi ikusten da problema erlaxatuaren soluzio optimoa $\mathbf{x}^* = (1, 1, 1)$ dela. Soluzio horrek 0-1 problema osoaren murrizketak beteko ez balitu, helburu funtzioaren koefizienteak txikienetik handienera ordenatuta daudenez, problema erlaxatuaren hurrengo soluziorik onenarekin, hau da, $\mathbf{x} = (0, 1, 1)$ soluzioarekin probatuko genuke, eta gero hurrengoarekin $\mathbf{x} = (1, 0, 1)$, eta abar. Problema erlaxatuaren soluzioak onenetik okerrenera ordena ditzakegu, eta ordena horretan 0-1 problema osoaren murrizketa betetzen duten egiaztatu, betetzen duen bat aurkitu arte.

□

Ondoko atalean azaltzen den 0-1 adarkatze- eta bornatze- algoritmoak, hain zuzen ere, hori egiten du: algoritmoa problema erlaxatuaren soluzio optimotik hasten da, eta 0-1 problema osoaren murrizketak betetzen dituen egiaztatzen du. Problemak adarkatuz, 0-1 problema osorako soluzio optimoa aurkituko da. Ebatzitako problema guztiak erlaxatuak dira.

6.5.1 0-1 adarkatze- eta bornatze-algoritmoa

Algoritmo hau helburua maximizatzea duten 0-1 problema linealak ebazteko diseinatua izan da. Helburu funtzioaren koefizienteek $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$ baldintza bete behar dute algoritmoa aplikatzen hasi aurretik.

1. **urratsa. Hasieraketa**

   Problema erlaxaturako soluzio optimoa den $\mathbf{x} = (1, \ldots, 1)$ soluzioak 0-1 problema osoaren murrizketak betetzen dituen egiaztatu. Hala bada, $(1, \ldots, 1)$ soluzioa optimoa da. Amaitu.

   Bestela, aztertu ea murrizketak betetzen diren $\mathbf{x} = (0, 1, \ldots, 1)$ balioetarako. Hala bada, $(0, 1, \ldots, 1)$ soluzioa optimoa da. Amaitu.

   Bestela, $z_b = z(\mathbf{x})$ behe-bornea hasieratu, non $\mathbf{x} = (0, \ldots, 0)$ den.

   $z_g = z(\mathbf{x}_g)$ da, non $\mathbf{x}_g = (0, 1, \ldots, 1)$ den. Problemari $k = 1$ indizea esleitu.

2. **urratsa. Adarkatzea**

   Azkenekoa ez den problema bat aukeratu. Aukeratutako problema adarkatu, $x_k = 0$ eta $x_k = 1$ murrizketak erantsiz, bi problema berri sortzeko.

3. **urratsa. Bornatzea**

   Bi problema berri horietarako $k + 1$ osagaia 0 duten eta hurrengoak 1 dituzten $\mathbf{x}_g$ osaketak egin. Bi problemek osaketa horietan hartzen dituzten z_g balioak kalkulatu. Problema berri horiei $k = k + 1$ indizea esleitu.

4. urratsa. Azkeneko problemak

Azkeneko ez diren problema guztiak aztertu. Azkeneko dira ondoko baldintzetako bat betetzen dutenak:

(1) $z_g \leq z_b$.

(2) $z_g > z_b$ bada, eta $\mathbf{x}_g$ soluzioak problema osoaren murrizketak betetzen baditu, x_g soluziogaia da, eta $z_b = z_g$ eguneratuko da.

(3) Problemaren murrizketa guztiak aldi berean beteko dituen osaketarik ez da existitzen. Problema bideraezina da.

Problema guztiak azkenekoak badira, amaitu. Problema osoaren soluzio optimoa z_b behe-borneak erakutsitako soluziogaia da.

Bestela, 2. urratsera joan.

Adibidea. 203. orrialdeko motxilaren problema ebatziko dugu 0-1 adarkatze- eta bornatze-algoritmoa erabiliz.

$$\begin{aligned} \max\ z = 15x_1 + 25x_2 + 12x_3 + 10x_4 \\ \text{hauen mende} \qquad\qquad \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 \leq 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ edo } 1 \end{aligned}$$

Helburu funtzioaren koefizienteak ordenatzeko, ondoko aldagai-aldaketa egin behar da: $x_4 = y_1$, $x_3 = y_2$, $x_1 = y_3$ eta $x_2 = y_4$. Beste 0-1 problema osoa eta dagokion eredu erlaxatua ondokoak dira:

<u>0-1 Problema Osoa: PO</u>

$$\begin{aligned} \max\ z = 10y_1 + 12y_2 + 15y_3 + 25y_4 \\ \text{hauen mende} \qquad\qquad \\ 5y_1 + 5y_2 + 3y_3 + 6y_4 \leq 12 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 = 0 \text{ edo } 1 \end{aligned}$$

<u>Problema Erlaxatua: PE</u>

$$\begin{aligned} \max\ z = 10y_1 + 12y_2 + 15y_3 + 25y_4 \\ \text{hauen mende} \qquad\qquad \\ y_1, y_2, y_3, y_4 = 0 \text{ edo } 1 \end{aligned}$$

226. orrialdeko 6.2 Irudiko diagraman laburbilduko ditugu 0-1 problema osoaren soluzio optimoaren bilaketarako 0-1 adarkatze- eta bornatze- algoritmoa aplikatzean lortutako problema erlaxatu guztiak, eta bertan zehaztuko ditugu problema bakoitzerako soluzio partzial bat eta problemarako goi-borne bat kalkulatzeko balioko digun osaketa.

Lehenengo iterazioa

1. urratsa. Hasieraketa.

Problema erlaxatuaren $(1, 1, 1, 1)$ soluzio optimoak ez du 0-1 problema osoaren murrizketa betetzen.

Problema erlaxatuaren hurrengo soluzio onena den $(0, 1, 1, 1)$ soluzioak ere ez du 0-1 problema osoaren murrizketa betetzen. Soluzio horri dagokion helburu funtzioaren balioa $z_g = 52$ da.

Problemari $k = 1$ indizea esleitu eta behe-bornea $z_b = 0$ balioarekin hasieratuko dugu.

2. urratsa. Adarkatzea.

PE problema erlaxatua bi problematan adarkatuko dugu, $y_1 = 0$ eta $y_1 = 1$ murrizketak erantsiz. Horrela lortuko ditugu P2 problema eta P3 problema, hurrenez hurren.

P2 problema	P3 problema
$\max\ z = 10y_1 + 12y_2 + 15y_3 + 25y_4$	$\max\ z = 10y_1 + 12y_2 + 15y_3 + 25y_4$
hauen mende	hauen mende
$y_1 = 0$	$y_1 = 1$
$y_2, y_3, y_4 = 0$ edo 1	$y_2, y_3, y_4 = 0$ edo 1

3. urratsa. Bornatzea.

$\mathbf{y}_g = (0, 0, 1, 1)$ osaketarekin P2 problemaren helburu funtzioak $z_g = 40$ balioa hartzen du; balio hori problema osorako goi-borne bat izango da adar honetan.

$\mathbf{y}_g = (1, 0, 1, 1)$ osaketarekin P3 problemaren helburu funtzioak $z_g = 50$ balioa hartzen du; balio hori problema osorako goi-borne bat izango da adar honetan.

Problema hauei $k = 2$ indizea esleituko diegu.

4. urratsa. Azkeneko problemak.

P2 problemarako dugun $\mathbf{y}_g = (0, 0, 1, 1)$ osaketak 0-1 problema osoaren murrizketa betetzen du. Gainera, $z_g = 40 > 0 = z_b$ betetzen denez, soluzio hori soluziogai bihurtuko da, eta P2 problema azkeneko. Behe-bornea eguneratuko dugu, $z_b = 40$.

P3 problemaren $\mathbf{y}_g = (1,0,1,1)$ osaketak, aldiz, ez du 0-1 problema osoaren murrizketa betetzen. Gainera, P3 problema ez da bideraezina, existitzen delako 0-1 problema osoaren murrizketa beteko duen osaketaren bat, $\mathbf{y} = (1,0,0,0)$ adibidez. $z_g = 50 > z_b$ izanik, ez da azkeneko problema izateko bete behar den baldintzarik betetzen. Beraz, P3 problema ez da azkenekoa, eta algoritmoaren iterazio berri bati ekin behar zaio.

Bigarren iterazioa.

P3 problema adarkatuko dugu, $y_2 = 0$ murrizketa erantsiz P4 problema sortzeko eta $y_2 = 1$ murrizketa erantsiz P5 problema.

P4 problema

$$\max\ z = 10y_1 + 12y_2 + 15y_3 + 25y_4$$

hauen mende

$$y_1 = 1$$
$$y_2 = 0$$
$$y_3, y_4 = 0 \text{ edo } 1$$

P5 problema

$$\max\ z = 10y_1 + 12y_2 + 15y_3 + 25y_4$$

hauen mende

$$y_1 = 1$$
$$y_2 = 1$$
$$y_3, y_4 = 0 \text{ edo } 1$$

Algoritmoan zehazten diren osaketak eta osaketa horietarako helburu funtzioaren balioak kalkulatuko ditugu bi problematarako:

P4 problemarako $\mathbf{y}_g = (1,0,0,1)$ eta $z_g = 35$ ditugu. Problema azkenekoa da, $z_g < z_b = 40$ betetzen delako.

P5 problemarako $\mathbf{y}_g = (1,1,0,1)$ eta $z_g = 47$ ditugu. Problema ez da azkenekoa.

Problema hauei $k = 3$ indizea esleituko diegu. P5 problema azkenekoa ez denez, 2. urratsera joan eta algoritmoaren iterazio berri bati ekingo diogu.

Hirugarren iterazioa.

P5 problema adarkatuko dugu, $y_3 = 0$ murrizketa erantsiz P6 problema sortzeko eta $y_3 = 1$ erantsiz P7 problema sortzeko.

P6 problema	P7 problema
$\max\ z = 10y_1 + 12y_2 + 15y_3 + 25y_4$	$\max\ z = 10y_1 + 12y_2 + 15y_3 + 25y_4$
hauen mende	hauen mende
$y_1 = 1$	$y_1 = 1$
$y_2 = 1$	$y_2 = 1$
$y_3 = 0$	$y_3 = 1$
$y_4 = 0$ edo 1	$y_4 = 0$ edo 1

Bi problemetarako osaketak eta osaketa horietarako helburu funtzioaren balioa kalkulatuko ditugu.

P6 problemarako $\mathbf{y}_g = (1, 1, 0, 0)$ eta $z_g = 22$ ditugu. Problema azkenekoa da, $z_g < z_b = 40$ betetzen delako.

P7 problemarako $\mathbf{y}_g = (1, 1, 1, 0)$ eta $z_g = 37$ ditugu. Problema azkenekoa da, $z_g < z_b = 40$ betetzen delako.

Problema hauei $k = 4$ indizea esleituko diegu.

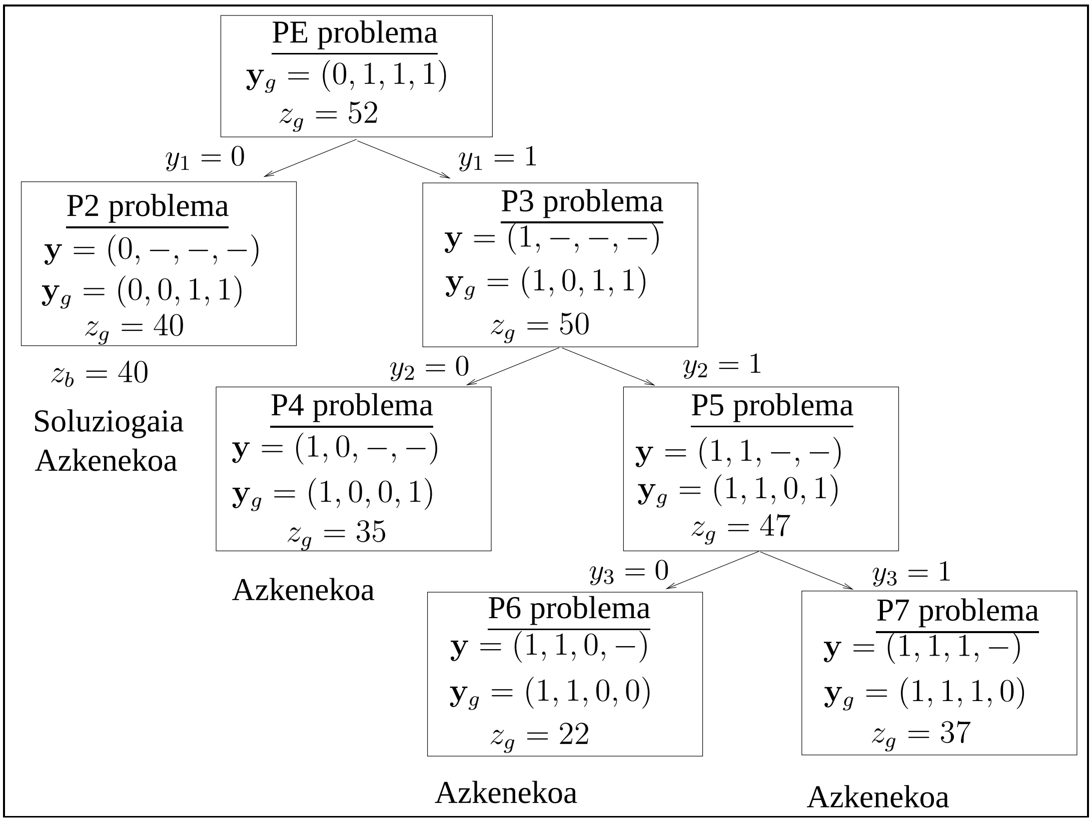
Azkenekoa ez den problemarik ez dagoenez, adarkaketak amaitu dira. 0-1 problema osoaren soluzio optimoa $z_b = 40$ behe-borneari dagokion soluziogaia da, hau da, $\mathbf{y}_g = (0, 0, 1, 1)$.

Egindako aldagai-aldaketak deseginez, 0-1 problema osoaren soluzio optimoa lortzen da:

$$x_1^* = 1, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = 0, \quad x_4^* = 0, \quad z^* = 40.$$

Ebazpen osoa erakusten duen diagrama 6.2 Irudian ikus daiteke.

□



6.2. Irudia: Adibideko 0-1 problema osoaren ebazpenaren diagrama.