5. Kapitulua

Garraio-problema eta Esleipen-problema

Gai honetan bi problema lineal berezi ebazteko erabiltzen diren algoritmoak aurkezten dira: garraio-problemarako algoritmoa eta esleipen-problemarako algoritmoa.

5.1 Garraio-problema

Programazio linealaren tekniken aplikazioan garraio-problema izan zen aztertu ziren problema garrantzitsuetatik lehena. Garraio-problema eredu lineal baten bidez adieraz daiteke, baita ebazpenerako simplex algoritmoa erabili ere. Dena den, eta garraio-problemari dagokion eredu linealaren egitura berezia kontuan hartuz, ebazpenerako eraginkorragoa den metodo bat eraiki daiteke. Kapitulu honetan metodo hori aztertuko dugu.

Garraio-problema produktu baten unitateak m iturburu-puntutatik, $I_1, \ldots, I_m$, n helburu-puntutara, $H_1, \ldots, H_n$, garraiatzean datza, ondoko baldintzapean:

- $I_i,\ i = 1, \ldots, m$, iturburu-puntu bakoitzaren produktu unitateen eskaintza a_i da.

- $H_j,\ j = 1, \ldots, n$, helburu-puntu bakoitzaren eskaria b_j da.

- I_i iturburu-puntutik H_j helburu-puntura produktu unitate bat garraiatzearen kostua c_{ij} da, $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$.

I_i iturburu-puntu bakoitzetik H_j helburu-puntu bakoitzera garraiatuko den x_{ij} produktu unitate kopurua erabakitzean datza problema, produktu unitateen garraioa kostu minimoan egingo delarik eta eskaintzek eta eskariek finkatutako murrizketak kontuan izango direlarik.

Garraio-problemari dagokion eredu lineala ondokoa da:

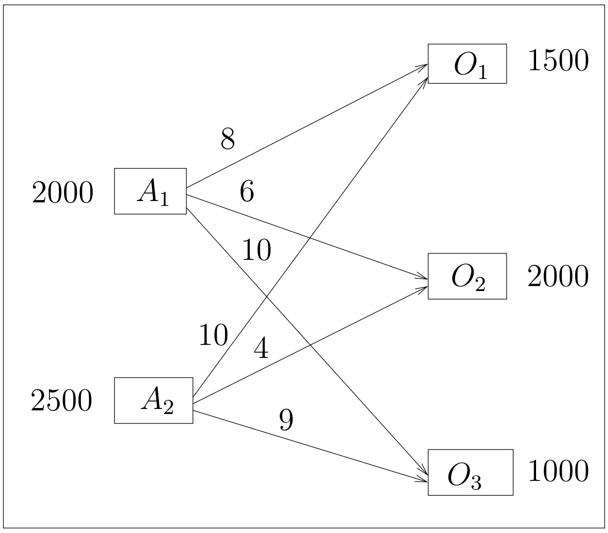
$$\begin{aligned} \min \quad z &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{hauen mende} & \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad i=1,\ldots,m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \quad j=1,\ldots,n \\ x_{ij} \geq 0, \quad & i=1,\ldots,m, \quad j=1,\ldots,n \end{aligned}$$

Ereduaren lehenengo m murrizketak iturburu-puntuen eskaintzei dagozkie, eta eskaintzak ezin direla gainditu adierazten dute. Hurrengo n murrizketek helburu-puntuen eskariak zerbitzatuak izango direla ziurtatzen dute. Aldagaiek ezin dituzte balio negatiboak hartu, garraiatuak izango diren produktu unitateak adierazten dituztelako.

Garraio-problemaren forma estandarra hau da:

$$\begin{aligned} \min \quad z &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{hauen mende} & \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=1,\ldots,m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j=1,\ldots,n \\ x_{ij} \geq 0, \quad & i=1,\ldots,m, \quad j=1,\ldots,n \end{aligned}$$

Adibidea. Demagun herrialde batean badirela ogia ekoizten duten 2 enpresa: A_1 eta A_2. Enpresa horietan ekoitzitako ogia 3 okindegitara bidaltzen da bertan saldua izateko: O_1, O_2 eta O_3. Enpresen eskaintzak, okindegien eskariak eta unitateko garraio-kostuak ondoko grafikoan emanak datoz.



Problema adieraziko duen eredu lineala idazteko, ondoko erabaki-aldagaiak definituko ditugu.

x_{ij}: A_i iturburu-puntutik O_j helburu-puntura garraiatuko den ogi kopurua, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$.

Eredu lineala ondokoa da:

$$\min\ z = 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 10x_{21} + 4x_{22} + 9x_{23}$$

hauen mende

$$\begin{array}{cccccccc}
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & & & & = 2000 \\
& & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & = 2500 \\
x_{11} & & & +x_{21} & & & = 1500 \\
& x_{12} & & & +x_{22} & & = 2000 \\
& & x_{13} & & & +x_{23} & = 1000
\end{array}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$$

Murrizketak berdintzaz idatz ditzakegu eskaintza totala eta eskari totala berdinak direlako. **A** matrizearen egitura aztertzeko, eredua matrize-forman jarriko dugu.

$$\min\ z \ = \ (8\ ,\ 6\ ,\ 10\ ,\ 10\ ,\ 4\ ,\ 9) \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}$$

hauen mende

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 2500 \\ 1500 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$$

Adibide honetan 2 iturburu-puntu, $m = 2$, eta 3 helburu-puntu, $n = 3$, daude. $\mathbf{A}$ matrizeak $2 + 3$ errenkada eta 2×3 zutabe ditu. Egiazta daiteke matrizearen heina 4 dela.

Bestalde, matrizeko zutabe guztietan 2 osagai besterik ez dago 1 balioarekin, gainerako osagaiak 0 direlarik. Garraio-problemen erabaki-aldagaiak izendatzeko bi azpi-indize erabili ditugun bezala, $\mathbf{A}$ matrizeko zutabe-bektoreak $\mathbf{a}_{11}$, $\mathbf{a}_{12}$, $\mathbf{a}_{13}$, $\mathbf{a}_{21}$, $\mathbf{a}_{22}$, $\mathbf{a}_{23}$ izendatuko ditugu, eta azter dezakegu bektore horietako bakoitzean zein posiziotan dauden batekoak. $\mathbf{a}_{11}$ bektoreak, adibidez, 1 posizioan eta $m + 1$ posizioan ditu batekoak, $\mathbf{a}_{21}$ bektoreak 2 eta $m + 1$ posizioetan, $\mathbf{a}_{23}$ bektoreak 2 eta $m + 3$ posizioetan. Oro har, esan dezakegu $\mathbf{A}$ matrizeko $\mathbf{a}_{ij}$ bektoreak i eta $m + j$ posizioetan dituela batekoak. $\square$

Hortaz, $\mathbf{A}$ matrizearen egitura iturburu-puntu kopuruaren eta helburu-puntu kopuruaren araberakoa da. m iturburu-puntu eta n helburu-puntu dituen edozein garraio-problemak $\mathbf{A}$ matrize berbera izango du. Matrize honek $m + n$ errenkada eta $m \times n$ zutabe ditu. $\mathbf{A}$ matrizearen heina $m+n-1$ da, hau da, oinarriak $m+n-1$ bektorez osatuta daude. $\mathbf{A}$ matrizearen zutabe-bektoreek bi 1eko besterik ez dituzte eta gainerako osagaiak 0 dira. $\mathbf{A}$ matrizeko $\mathbf{a}_{ij}$ bektorearen 1ekoak i eta $m+j$ posizioetan daude. Beraz, garraio-problemaren datu garrantzitsuak iturburu-puntu kopurua, helburu-puntu kopurua, eskaintzak, eskariak eta garraio-kostuak dira. Informazio hori guztia biltzen da garraio-problemarako matrize-forman.

5.2 Matrize-forma

Garraio-problemaren datuak taula moduan jasotzen dira. Taula honi *garraio-problemarako matrize-forma* edo *garraio-kostuen taula* deitzen zaio (ikus 5.1. Irudia). Bertan aurkitzen ditugu iturburuak eskaintzekin, helburuak eskariekin eta unitateko garraio-kostuak.

	H_1	H_2	$\cdots$	H_n	Eskaintza
I_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
I_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
I_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
Eskaria	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

5.1. Irudia: Garraio-problemarako matrize-forma edo Garraio-kostuen taula

Adibidea. 150. orrialdeko adibidearen matrize-forma honakoa da.

	O_1	O_2	O_3	Eskaintza
A_1	8	6	10	2000
A_2	10	4	9	2500
Eskaria	1500	2000	1000	

Taularen lehenengo zutabean problemaren iturburu-puntuak agertzen dira, A_1 eta A_2 enpresak, eta lehenengo errenkadan helburu-puntuak, O_1, O_2 eta O_3 okindegiak. Enpresen eskaintzak taulako azken zutabean agertzen dira, eta okindegien eskariak azken errenkadan. Taulako laukitxo bakoitzean agertzen da enpresa bakoitzetik okindegi bakoitzera ogi bat garraiatzearen kostua, c_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$. □

5.3 Adibide praktikoak

1. Adibidea. Enpresa batek bere ekoizpena antolatu behar du hurrengo urteko 4 hiruhilekoetarako. Izango dituen eskariak aurrikusi ditu: 200 unitate lehen hiruhilekoan, 150, 200 eta 100 hurrengo hiruetan, hurrenez hurren. Hiruhileko bateko ekoizpen-ahalmena 150 unitatekoa da. Hiruhileko bateko eskaria ezin daiteke geroagoko hiruhileko batean zerbitzatu. Produktu unitate bat ekoiztearen kostua 2koa da, eta ekoitzitako produktu unitate hori biltegiratu eta beste hiruhileko baten eskaria zerbitzatzeko erabiltzen bada, biltegiratutako hiruhileko bakoitzeko 0.5eko biltegiratze-kostua gehitu beharko zaio produktu unitate bakoitzari.

Problema hau garraio-problemarako matrize-forman planteatzeko, 4 hiruhilekoak iturburu-puntu eta helburu-puntu izango dira. x_{ij} erabaki-aldagaiek hau adierazten dute: j hiruhilekoaren eskaria zerbitzatzeko, i hiruhilekoan sortuko den produktu unitate kopurua, $i = 1, \ldots, 4$, $j = 1, \ldots, 4$.

- Iturburu-puntuen eskaintza: 150, 150, 150, 150.
- Helburu-puntuen eskaria: 200, 150, 200, 100.
- $i = j$ bada, ekoizpenaren kostua $c_{ij} = 2$ da, $i, j = 1, \ldots, 4$.
- $i < j$ bada, $c_{ij} =$ ekoizpen-kostua $+$ biltegiratze-kostua. Adibidez, $c_{12} = 2.5$, $c_{13} = 3$, eta modu berean kalkulatzen dira gainerakoak.
- $i > j$ bada, c_{ij} kostuari behar bezain handia den M kostua egokituko diogu, x_{ij} oinarriko izatea ekiditeko.

Problema honi dagokion garraio-kostuen taula hau da:

	1	2	3	4	Eskaintza
1	2	2.5	3	3.5	150
2	M	2	2.5	3	150
3	M	M	2	2.5	150
4	M	M	M	2	150
Eskaria	200	150	200	100	

□

2. Adibidea. Enpresa batek produktu mota bakar bat ekoizten du hiru ekoizpen-zentrotan, A_1, A_2 eta A_3. Ekoizpen-zentro hauetako bakoitzaren ekoizpen-ahalmena 1500 unitatekoa da hilabeteko. Enpresak lau bezerorentzat ekoizten du produktua, beren hilabeteko eskariak 1000, 1200, 1500 eta 1000 unitatekoak direlarik, hurrenez hurren.

Produktuak enpresari 110 unitateko irabazia sortzen dio, ekoizpen-kostua eta salmenta-prezioa kontuan izanik. Hiru ekoizpen-zentroetatik lau bezeroengana produktu unitatea garraiatzearen kostua ondoko taulan zehazten da:

	1	2	3	4
A_1	30	10	25	20
A_2	15	25	30	10
A_3	20	30	15	20

Enpresak ahalik eta irabazi handiena lor dezan, bere hilabeteko ekoizpena planifikatzen lagunduko dion garraiorako matrize-forma idatziko dugu.

- Eskaintzak: $a_1 = 1500,\ a_2 = 1500,\ a_3 = 1500.$
- Eskariak: $b_1 = 1000,\ b_2 = 1200,\ b_3 = 1500,\ b_4 = 1000.$
- Kostuen taulako c_{ij} balioak A_i ekoizpen-zentroan ekoitzi eta j bezeroari saltzeak sortutako irabazia adierazten du, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$, eta honela kalkulatzen da: c_{ij} = ekoizpen-irabazia $-$ garraio-kostua. Adibidez,

  $$c_{11} = 110 - 30 = 80, \quad c_{12} = 110 - 10 = 100, \quad c_{33} = 110 - 15 = 95.$$

  Gainerako irabaziak modu berean kalkulatzen dira.

Helburu funtzioa maximizatzea duen garraio-problema honi dagokion matrize-forma ondokoa da:

	1	2	3	4	Eskaintza
A_1	80	100	85	90	1500
A_2	95	85	80	100	1500
A_3	90	80	95	90	1500
Eskaria	1000	1200	1500	1000	

□

5.4 Teoremak eta definizioak

Garraio-problemarako soluzio optimo baten bilaketarako simplex metodoa egokitzeko, problema mota honetako soluzioek betetzen dituzten zenbait teorema aztertuko ditugu.

5.4.1 Teorema. *Garraio-problemak soluziorik izan dezan, baldintza beharrezkoa eta nahikoa da eskaintza totala eta eskari totala berdina izatea.*

Froga. Garraio-problemaren forma estandarraren arabera, iturburu-puntu bakoitzaren $a_i, \ i = 1, \ldots, m$, eskaintzak ondoko murrizketa betetzen du:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

Iturburu-puntu guztien eskaintzak batuz gero, eskaintza totala honakoa da:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i \tag{5.1}$$

Bestalde, helburu-puntuen $b_j, \ j = 1, \ldots, n$, eskariek ondoko murrizketak betetzen dituzte:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

Eskari totala honakoa da:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{5.2}$$

(5.1) eta (5.2) formuletan, berdintzaren ezkerreko atalak berdinak dira. Hortaz, formula horiek beteko dira baldin eta soilik baldin

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

□

Aurreko teoreman frogatzen da garraio-problema batek soluziorik izan dezan, eskaintza totala eta eskari totala berdinak izan behar direla. Dena den, hori ez da hala gertatzen garraio-problema guztietan. Eskaintza totala eta eskari totala berdinak ez diren kasuetan problema egokitzea beharrezkoa izango da, eta ondoren lortutako soluzioa interpretatuko da.

5.4.1 Definizioa. (Problema orekatua.) *Garraio-problema bat orekatua dela esaten da baldin* $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Garraio-problema baten soluzio bat kalkulatzeko eman beharreko lehen urratsa problema orekatzea da. Bi kasu gerta daitezke.

1. **Kasua.** Eskaintza eskaria baino txikiagoa da, $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$.

   Eskaintza totalarekin ezin daiteke eskari totala zerbitzatu. Kasu honetan, gezurrezko iturburu-puntu bat sortzen da, I_{m+1}. Bere gezurrezko eskaintza eta garraio-kostua honakoak izango dira:

   $$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

   $$c_{m+1,j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

   I_{m+1} gezurrezko iturburu-puntuaren a_{m+1} eskaintza benetakoa ez denez, soluzioren batean gezurrezko iturburu-puntutik produktu unitateak jasotzen dituzten helburu-puntuen eskariak behar bezala zerbitzatuak izan ez direla interpretatuko dugu. Zenbait kasu praktikotan posible da $c_{m+1,j}, \quad j =$

$1, \ldots, n$, gezurrezko garraio-kostuei zeroren desberdina den balioren bat esleitzea, baldin eta eskaria ez zerbitzatzeagatik zigorren bat adierazi nahi bada, adibidez.

Adibidea. Har dezagun ondoko garraio-problema matrize-forman:

	1	2	3	Eskaintza
1	2	4	3	10
2	6	1	4	20
Eskaria	20	20	20	

- Eskaintza totala = $a_1 + a_2 = 10 + 20 = 30$.
- Eskari totala = $b_1 + b_2 + b_3 = 20 + 20 + 20 = 60$.

Eskaintza totala eskari totala baino txikiagoa da. Problema orekatzeko C gezurrezko iturburu-puntua sortzen da, bere eskaintza $a_3 = 60 - 30 = 30$ izango delarik. c_{31}, c_{32} eta c_{33} garraio-kostuak zero dira. Garraio-problema orekaturako matrize-forma ondokoa da:

	1	2	3	Eskaintza
1	2	4	3	10
2	6	1	4	20
3	0	0	0	30
Eskaria	20	20	20	

□

2. Kasua. Eskaria eskaintza baino txikiagoa da. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

Eskaintza handiagoa izanik, gezurrezko helburu-puntu bat sortzen da, H_{n+1}, bere gezurrezko eskaria eta garraio-kostuak ondokoak direlarik:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

$$c_{i,n+1} = 0, \;\; i = 1, \ldots, m.$$

Gezurrezko helburu-puntuaren eskaria eskaintza totalaren eta eskari totalaren arteko diferentzia da. Gezurrezko helburu-puntura garraiatutako produktu unitateen garraio-kostua zero da, iturburu-puntua edozein delarik ere, produktu unitate horiek ez direlako errealak eta, beraz, garraioa ez delako gauzatuko. Zenbait kasutan, zeroren desberdina den garraio-kosturen bat esleitu daiteke, garraiatuak izango ez diren unitateek sortuko duten biltegiratze kostua adierazteko, adibidez.

Adibidea. Har dezagun ondoko garraio-problema matrize-forman.

	1	2	3	Eskaintza
1	3	2	1	50
2	6	4	4	50
Eskaria	20	20	20	

- Eskaintza totala = $a_1 + a_2 = 50 + 50 = 100.$

- Eskari totala = $b_1 + b_2 + b_3 = 20 + 20 + 20 = 60.$

Eskaintza totala eskari totala baino handiagoa da. Problema orekatzeko gezurrezko 4 iturburu-puntua sortzen da, bere eskaria $b_4 = 100 - 60 = 40$ izango delarik. c_{14} eta c_{24} garraio-kostuak zero dira. Garraio-problema orekaturako matrize-forma ondokoa da:

	1	2	3	4	Eskaintza
1	3	2	1	0	50
2	6	4	4	0	50
Eskaria	20	20	20	40	

□

5.4.2 Teorema. *Garraio-problema orekatu orok badu soluzio bideragarririk.*

Froga. Izan bedi garraio-problema orekatu bati dagokion eredu lineala forma estandarrean. 5.4.1 Teoreman frogatu da problemak baduela soluziorik. Froga dezagun orain soluzio bideragarria existitzen dela. Izan bedi

$$T = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Egiazta daiteke $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{T}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, soluzioa dela, hau da, murrizketak betetzen dituela. Gainera, bideragarria da, $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, betetzen delako. $\square$

5.4.3 Teorema. *Garraio-problema orekatu orok badu oinarriko soluzio bideragarririk. Soluzio horrek gehienez $m + n - 1$ aldagai positibo ditu.*

Hurrengo atalean bi metodo aztertuko ditugu garraio-problema baten oinarriko soluzio bideragarri bat kalkulatzeko: *Ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa* eta *Vogel-en metodoa*.

5.5 Hasierako oinarriko soluzio bideragarria

Garraio-problemarako soluzio bat kalkulatzeko, garraio-kostuen taularen dimentsio berberak dituen beste taula bat erabiliko dugu. Taula honek *garraio-fluxuen taula* izena du (ikus 5.2. Irudia), eta bertan kokatuko ditugu garraio-fluxuak, hau da, iturburu-puntu bakoitzetik helburu-puntu bakoitzera garraiatuko den produktu unitate kopuruak.

5.5.1 Ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa

Garraio-problema orekatu bat izanik, ondoko urratsei jarraituz hasierako oinarriko soluzio bideragarri bat lortzen da.

1. **urratsa**. Garraio-fluxuen taulan ipar-mendebaldeko (i, j) ertza aukeratu (hasieran $i = 1$, $j = 1$).

2. **urratsa**. Aukeratutako posizioan x_{ij} aldagaiari ahal den fluxurik handiena esleitu, $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$. Ondoren, a_i eskaintza eta b_j eskaria eguneratu honela:

	H_1	H_2	$\cdots$	H_n	Eskaintza
I_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}	a_1
I_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
I_m	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	x_{mn}	a_m
Eskaria	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

5.2. Irudia: Garraio-problemarako fluxuen taula

- Minimoa a_i bada, I_i iturburu-puntuaren eskaintza zero bihurtuko da. Ondoko kalkuluetarako taulako i. errenkada ezabatu behar da. b_j eskaria eguneratu egingo da honela: $b_j - a_i$.
- Minimoa b_j bada, H_j helburu-puntuaren eskaria zerbitzatua geratzen da, eskaria zero bihurtuko da eta taulako j. zutabea ezabatuko da, aurrerantzean egingo diren kalkuluetan kontuan ez izateko. a_i eskaintza eguneratu egingo da: $a_i - b_j$.
- a_i eskaintzak eta b_j eskariak balio berbera badute, iturburuaren eskaintza eta helburuaren eskaria aldi berean zero bihurtuko dira. Aurrerantzean egingo diren kalkuluetarako i. errenkada eta j. zutabea ezabatuko dira.

3. urratsa. Bi kasu gerta daitezke.

- Ezabatua izan ez den errenkada edo zutabe bakarra baldin badago taulan, geratzen diren produktuen eskaintza eta eskariak ezabatu gabeko posizioetara esleitzen dira. Amaitu.
- Bestela, 1. urratsera joan.

Adibidea. Har dezagun 153. orrialdeko garraio-problema orekatua matrize-forman.

	O_1	O_2	O_3	Eskaintza
A_1	8	6	10	2000
A_2	10	4	9	2500
Eskaria	1500	2000	1000	

$$\text{Eskaintza} = 2000 + 2500 = 1500 + 2000 + 1000 = \text{Eskaria}$$

Lehenengo iterazioa.

1. urratsa. Ipar-mendebaldeko ertza aukeratzen dugu, garraio-fluxuen taulako 1. errenkada eta 1. zutabea. Taulan izar batez erakusten dugu aukeratutako posizioa.

	O_1	O_2	O_3	Eskaintza
A_1	$*$			2000
A_2				2500
Eskaria	1500	2000	1000	

2. urratsa. Posizio horretan garraio-fluxu maximoa esleitu eta eskaintza eta eskaria eguneratu.

$x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{2000, 1500\} = 1500$

A_1 iturburuaren eskaintza eguneratua: $a_1 = 2000 - x_{11} = 500$.

O_1 helburuaren eskari eguneratua: $b_1 = 1500 - x_{11} = 0$.

O_1 helburu-puntuaren eskaria zerbitzatua izan da. Garraio-fluxuen taulako 1. zutabea ezabatuko dugu, aurrerantzean egingo ditugun kalkuluetan kontuan ez izateko.

	O_1	O_2	O_3	Eskaintza
A_1	1500	$*$		$\cancel{2000}$ 500
A_2				2500
Eskaria	$\cancel{1500}$	2000	1000	

3. urratsa. Garraio-fluxuen taulan ezabatu gabeko errenkada edo zutabe bat baino gehiago geratzen da. Algoritmoaren 1. urratsean jarraituko dugu iterazio berri batekin.

Bigarren iterazioa. Aurreko iterazioan egin bezala, taulan ezabatu gabeko ipar-mendebaldeko ertza aukeratuko dugu, bertan garraio-fluxua esleitzeko. Oraingoan 1. errenkada eta 2. zutabea aukeratuko ditugu (ikus aurreko taulako izarra). $x_{12} = \min\{500, 2000\} = 500$. Eskaintza eta eskaria eguneratuko ditugu, $a_1 = 500 - x_{12} = 0$ eta $b_2 = 2000 - 500 = 1500$. A_1 iturburu-puntuaren eskaintza agortu denez, taulako 1. errenkada ezabatzen dugu aurrerantzean emango diren urratsetan kontuan ez izateko. Garraio-fluxuen taula eguneratua honela geratzen da:

	O_1	O_2	O_3	Eskaintza
A_1	1500	500		$\cancel{2000}$ $\cancel{500}$
A_2				2500
Eskaria	$\cancel{1500}$	$\cancel{2000}$ 1500	1000	

Taulan ezabatua izan ez den errenkada bakarra geratzen denez, A_2 iturburuari dagokiona, esleituak izan ez diren produktu unitate guztiak ezabatu gabeko posizioetan esleitzen ditugu, $x_{22} = 1500$ eta $x_{23} = 1000$, eskaintza eta eskari guztiak zero bihurtuko direlarik. Honela lortzen da hasierako soluzio bat.

	O_1	O_2	O_3	Eskaintza
A_1	1500	500		2000
A_2		1500	1000	2500
Eskaria	1500	2000	1000	

Hasierako soluzio hau bideragarria eta oinarrikoa da. Taulan $m + n - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$ posiziotan esleitu dira garraio-fluxuak, oinarriko posizioak dira.

- Soluzioa.

$$x_{11} = 1500,\ x_{12} = 500,\ x_{13} = 0,\ x_{21} = 0,\ x_{22} = 1500,\ x_{23} = 1000.$$

- Garraio-kostua.

$$z = (1500 \times 8) + (500 \times 6) + (1500 \times 4) + (1000 \times 9) = 30000.$$

□

Ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa garraio-problemarako hasierako oinarriko soluzio bideragarri bat kalkulatzeko metodo sinplea da. Soluzioa kalkulatzeko prozesuan, metodo honek ez du garraio-kostuen taula kontuan hartzen, eta garraio-fluxuak ipar-mendebaldeko posizioetan kokatzen ditu uneoro. Metodo honen hobekuntza bat posizio bat aukeratzen denean, garraio-kostuak kontuan hartzean datza.

5.5.2 Vogel-en metodoa

Ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa eta Vogel-en metodoa garraio-fluxua kokatzeko posizioa aukeratzeko moduan desberdintzen dira, algoritmoaren 1. urratsean. Posizio hori aukeratzeko errenkadakako eta zutabekako diferentziak kalkulatzen dira modu honetan:

- ED_i = i errenkadako bi kosturik txikienen arteko diferentzia balio absolutuan, $i = 1, \ldots, m$.

- ZD_j = j zutabeko bi kosturik txikienen arteko diferentzia balio absolutuan, $j = 1, \ldots, n$.

Errendakako eta zutabekako diferentzien kalkulua erabiltzen da garraio-fluxu bat kokatzeko unean garraio-kostuen arabera egokia den posizio bat aukeratzeko. Vogel-en metodoa aplikatuz garraio-problema orekatu baten hasierako oinarriko soluzio bideragarri bat lortzeko, ondoko urratsak eman behar dira:

1. **urratsa**. Garraio-kostuen taulan ED_i errenkadakako eta ZD_j zutabekako diferentziak kalkulatu. Diferentziarik handieneko errenkada edo zutabea aukeratu, eta bertan c_{ij} kosturik txikieneko (i, j) posizioa.

2. **urratsa**. Aukeratutako posizioan, garraio-fluxuen taulan x_{ij} aldagaiari ahal den fluxurik handiena esleitu, $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$. Ondoren, a_i eskaintza eta b_j eskaria eguneratu honela:

    - Minimoa a_i bada, I_i iturburu-puntuaren eskaintza zero bihurtuko da. Ondoko kalkuluetarako taulako i. errenkada ezabatu behar da. b_j eskaria eguneratu egingo da honela: $b_j - a_i$.
    - Minimoa b_j bada, H_j helburu-puntuaren eskaria zero bihurtuko da, eta taulako j. zutabea ezabatuko da aurrerantzean egingo diren kalkuluetan kontuan ez izateko. a_i eskaintza eguneratu egingo da: $a_i - b_j$.
    - a_i eskaintzak eta b_j eskariak balio berbera badute, iturburuaren eskaintza eta helburuaren eskaria aldi berean egiten dira zero. Aurrerantzean egingo diren kalkuluetarako i. errenkada eta j. zutabea ezabatuko dira.

3. **urratsa**. Bi kasu gerta daitezke.

    - Ezabatua izan ez den errenkada edo zutabe bakarra baldin badago taulan, geratzen diren produktuen eskaintza eta eskariak ezabatu gabeko posizioetara esleitzen dira. Amaitu.
    - Bestela, 1. urratsera joan.

Adibidea. Vogel-en metodoa erabiliz 153. orrialdeko garraio-problema orekaturako hasierako oinarriko soluzio bideragarri bat kalkulatuko dugu.

Lehenengo iterazioa.

1. **urratsa**. Garraio-kostuen taulan ED_i errenkadakako eta ZD_j zutabekako diferentziak kalkulatuko ditugu. Diferentziarik handieneko errenkada edo zutabea aukeratuko dugu, ($\max\{2, 5, 2, 2, 1\} = 5$ duena, 2. errenkada) eta bertan kosturik txikieneko posizioa, ($\min\{10, 4, 9\} = 4$ duena, $(2, 2)$ posizioa).

Garraio-kostuen taula

	O_1	O_2	O_3	Eskain.	ED_i
A_1	8	6	10	2000	2
A_2	10	4	9	2500	5
Eskaria	1500	2000	1000		
ZD_j	2	2	1		

Garraio-fluxuen taula

	O_1	O_2	O_3	Eskain.
A_1				2000
A_2		*		2500
Eskaria	1500	2000	1000	

2. urratsa. Aukeratutako posizioan ahal den garraio-fluxurik handiena esleituko dugu.

$$x_{22} = \min\{2500, 2000\} = 2000.$$

Eskaintza eta eskaria eguneratuko ditugu, eta 2. zutabea ezabatuko dugu, O_2 helburu-puntuaren eskaria zerbitzatua izan delako.

Garraio-kostuen taula

	O_1	O_2	O_3	Eskain.
A_1	8	6	10	2000
A_2	10	4	9	2500
Eskaria	1500	2000	1000	

Garraio-fluxuen taula

	O_1	O_2	O_3	Eskain.
A_1				2000
A_2		2000		500
Eskaria	1500	0	1000	

3. urratsa. Taulan ezabatu gabeko errenkada bat eta zutabe bat baino gehiago daudenez, 1. urratsera goaz.

Bigarren iterazioa.

Aurreko iterazioan egin bezala, ED_i eta ZD_j diferentziak kalkulatuko ditugu garraio-kostuen taulan, ezabatu gabe dauden kostuak kontuan hartuz, eta diferentziarik handiena aukeratuko dugu. Kasu honetan, diferentziarik handiena aukeratzean lehenengo errenkadan eta lehenengo zutabean berdinketa dagoenez, horietako edozein aukeratuko dugu, adibidez 1. errenkada. Bertan kosturik txikiena $c_{11} = 8$ denez, $(1, 1)$ posizioa aukeratuta geratuko da. Posizio horretan garraio-fluxuen taulan fluxu maximoa kokatuko dugu, $x_{11} = \min\{1500, 2000\} = 1500$, eta eskaintza eta eskaria eguneratuko ditugu. Taulako 1. zutabea ezabatuko dugu, O_1 helburu-puntuaren eskaria zero bihurtu delako.

Garraio-kostuen taula

	O_1	O_2	O_3	Eskain.	ED_i
A_1	8	6	10	2000	2
A_2	10	4	9	2500	1
Eskaria	1500	2000	1000		
ZD_j	2		1		

Garraio-fluxuen taula

	O_1	O_2	O_3	Eskain.
A_1	1500			500
A_2		2000		500
Eskaria	0	0	1000	

Ezabatu gabeko zutabe bakarra geratzen denez, oraindik esleituak izan ez diren eskaintza eta eskarietako produktu unitateak ezabatu gabe dauden posizioetara esleituko ditugu, eta Vogel-en metodoaren aplikazioa amaituko da, fluxuen taulan garraio-problemarako hasierako oinarriko soluzio bideragarria dugularik.

Garraio-kostuen taula

	O_1	O_2	O_3	Eskain.
A_1	8	6	10	2000
A_2	10	4	9	2500
Eskaria	1500	2000	1000	

Garraio-fluxuen taula

	O_1	O_2	O_3	Eskain.
A_1	1500		500	2000
A_2		2000	500	2500
Eskaria	1500	2000	1000	

- Soluzioa.

$$x_{11} = 1500,\ x_{12} = 0,\ x_{13} = 500,\ x_{21} = 0,\ x_{22} = 2000,\ x_{23} = 500.$$

- Garraio-kostua.

$$z = (8 \times 1500) + (10 \times 500) + (4 \times 2000) + (9 \times 500) = 29500.$$

Hasierako soluzio hau ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa erabiliz kalkulatu duguna baino hobea da, garraio-kostua txikiagoa delako. □

5.6 Oinarriko soluzio bideragarrien hobekuntza

Oinarriko soluzio bideragarri bat hobetzeko, garraio-problemari dagokion eredu duala erabiltzen da. Izan bedi garraio-problema orekatua.

$$\min\ z\ = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

hauen mende

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n$$

Aldagai dualak $u_1, \ldots, u_m$ eta $v_1, \ldots, v_n$ izendatzen baditugu, dagokion eredu duala honela geratzen da adierazita:

$$\max \ G = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

hauen mende

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$u_i, v_j : \text{ez-murriztuak}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n$$

Adibidea. Har dezagun 150. orrialdeko garraio-problemari dagokion eredu lineala. Dagokion eredu duala kalkulatuko dugu.

$$\min \ z = 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 10x_{21} + 4x_{22} + 9x_{23}$$

hauen mende

$$\begin{array}{llllllll}
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & & & & = 2000 \\
 & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & = 2500 \\
x_{11} & & & +x_{21} & & & = 1500 \\
 & x_{12} & & & +x_{22} & & = 2000 \\
 & & x_{13} & & & +x_{23} & = 1000
\end{array}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{21}, x_{23} \geq 0$$

Aldagai dualak u_1, u_2, v_1, v_2 eta v_3 badira, problema duala honakoa da:

$$\max \ G = 2000u_1 + 2500u_2 + 1500v_1 + 2000v_2 + 1000v_3$$

hauen mende

$$\begin{array}{llllll}
u_1 & & +v_1 & & & \leq 8 \\
u_1 & & & +v_2 & & \leq 6 \\
u_1 & & & & +v_3 & \leq 10 \\
& u_2 & +v_1 & & & \leq 10 \\
& u_2 & & +v_2 & & \leq 4 \\
& u_2 & & & +v_3 & \leq 9
\end{array}$$

$$u_i, v_j : \text{ez-murriztuak}$$

□

Garraio-problema baten soluzio optimoa kalkulatzeko erabiltzen den garraio-problemarako algoritmoa simplex metodoaren egokitzapen bat da. Garraio-problemaren helburua minimizatzea da. Hasierako oinarriko soluzio bideragarri batetik abiatuz, helburu funtzioari balio txikiagoa emango dion beste bat kalkulatuko da. Horretarako, oinarri-aldaketa bat egin behar da, oinarritik irtengo den bektore bat eta oinarrian sartuko den beste bat aukeratuz. Aukeraketa hau hobekuntzaren teoremaren irizpideei jarraituz egiten da.

5.6.1 Oinarrian sartuko den bektorearen aukeraketa

Garraio-problemarako ereduan x_{ij} aldagaien bidez izendatu ditugu erabaki-aldagaiak, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, c_{ij} dira garraio-kostuak eta $\mathbf{a}_{ij}$ dira ereduko $\mathbf{A}$ matrizeko bektoreak.

Gogora dezagun oinarriko soluzio bideragarri bat hobe daitekeen edo ez erabakitzeko, oinarriko ez diren bektoreei dagozkien balio adierazleak kalkulatu behar direla. x_{ij} erabaki-aldagaiari dagokion balio adierazlea $z_{ij} - c_{ij}$ da.

$$z_{ij} - c_{ij} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_{ij} - c_{ij}.$$

Aldagai dualen bektorea $\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ dela kontuan hartuz,

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n)$$

orduan,

$$z_{ij} - c_{ij} = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n) \mathbf{a}_{ij} - c_{ij}.$$

$\mathbf{a}_{ij}$ bektoreak dituen 1eko bakarrak i eta $m+j$ posizioetan daude. Bektorearen gainerako osagaiak 0 dira. Ondorioz,

$$z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

Balio adierazleak dualaren aldagaien balioen bitartez kalkulatzen dira. Dualaren aldagaien balioak kalkula daitezke, kontuan hartuz $z_{ij} - c_{ij} = 0$ dela oinarriko diren x_{ij} aldagai guztietarako. Oinarrian $m + n - 1$ aldagai daudenez, $u_i + v_j - c_{ij} = 0$ moduko $m+n-1$ ekuazio daude $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ aldagai dualen $m+n$ balioak kalkulatzeko. Ekuazio-sistema hori aska daiteke aldagairen bati balioren bat emanez.

Behin aldagai dualen balioak kalkulatuak izan direnean, balio adierazle guztiak kalkulatu ahal izango dira. Helburua minimizatzea dela kontuan izanik, bi kasu gerta daitezke.

- $z_{ij} - c_{ij} \leq 0$ bada, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, soluzioa optimoa da.
- $z_{ij} - c_{ij} > 0$ existitzen bada, soluzioa hobe daiteke. Horretarako, $z_{ij} - c_{ij}$ positiboen artean maximoa duen aldagaia sartuko da oinarrian.

Adibidea. Har dezagun 163. orrialdeko garraio-problemarako ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa erabiliz kalkulatutako oinarriko soluzio bideragarria.

Garraio-kostuen taula

	O_1	O_2	O_3	Eskain.
A_1	8	6	10	2000
A_2	10	4	9	2500
Eskaria	1500	2000	1000	

Garraio-fluxuen taula

	O_1	O_2	O_3	Eskain.
A_1	1500	500		2000
A_2		1500	1000	2500
Eskaria	1500	2000	1000	

Oinarriko aldagaiak x_{11}, x_{12}, x_{22} eta x_{23} dira. Dualaren u_1, u_2, v_1, v_2 eta v_3 aldagaien balioak kalkulatzeko, ondoko ekuazio-sistema daukagu:

$$\begin{array}{lclcl}
x_{11} \text{ oinarrikoa da} & \Rightarrow & z_{11} - c_{11} = 0 & \Rightarrow & u_1 + v_1 - 8 = 0. \\
x_{12} \text{ oinarrikoa da} & \Rightarrow & z_{12} - c_{12} = 0 & \Rightarrow & u_1 + v_2 - 6 = 0. \\
x_{22} \text{ oinarrikoa da} & \Rightarrow & z_{22} - c_{22} = 0 & \Rightarrow & u_2 + v_2 - 4 = 0. \\
x_{23} \text{ oinarrikoa da} & \Rightarrow & z_{23} - c_{23} = 0 & \Rightarrow & u_2 + v_3 - 9 = 0.
\end{array}$$

Ekuazio-sistema honek lau ekuazio eta bost ezezagun dituenez, infinitu soluzio ditu. Soluzio horien guztien artetik edozein har dezakegu. Horretarako aldagairen bati balioren bat ematea nahikoa izango da, gainerako aldagaien balioak kalkulatu ahal izateko. Adibidez, $u_1 = 0$ bada, $v_1 = 8$, $v_2 = 6$, $u_2 = -2$ eta $v_3 = 11$ balioak lortzen dira, sistema askatuz.

Oinarriko ez diren x_{ij} aldagai guztietarako, kasu honetan x_{13} eta x_{21}, balio adierazleak kalkulatuko ditugu honela:

- $z_{13} - c_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 11 - 10 = 1 > 0.$
- $z_{21} - c_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -2 + 8 - 10 = -4 < 0.$

$z_{13} - c_{13}$ balio adierazlea positiboa da. Ondorioz, x_{13} aldagaia oinarrira sartuz hobea izango den beste oinarriko soluzio bideragarri bat kalkulatu ahal izango da.
□

5.6.2 Oinarritik aterako den bektorearen aukeraketa

Oinarritik aterako den bektorea zein izango den erabakitzeko, ondokoak kontuan izan behar dira.

1. Garraio-problemarako soluzio batean oinarrikoak diren aldagaiek ez dute ziklorik osatzen. Aurreko adibidean x_{11}, x_{12}, x_{22} eta x_{23} aldagaiek ez dute ziklorik osatzen.

2. Oinarriko diren aldagaien eta oinarrian sartzea erabaki den aldagaiaren artean ziklo bakar bat sortzen da.

   Ziklo hori aurkitzeko erregela bat honakoa da. Oinarrian sartzea erabaki den aldagaia fluxu positibotzat hartzen da. Garraio-fluxuen taulan fluxu positibo bakarreko errenkadak eta zutabeak ezabatu egingo ditugu, ezabatze-prozesua honela burutzen delarik: hasteko, fluxu positibo bakarreko errenkadak ezabatu; ondoren, zutabeak, eta ondoren, berriro ere errenkadak, harik eta fluxu positibo bakarreko errenkadarik edo zutaberik geratzen ez den arte. Ezabatuak izan ez diren eta fluxu positiboa duten posizioek ziklo bakar bat osatzen dute.

Zikloa zein fluxuk osatzen duten zehaztu denean, oinarrian sartzea erabaki den aldagaiari fluxu positibo bat esleitu behar zaio. Gainera, zikloa osatzen duten aldagaien artetik batek zero balioa hartu beharko du, eta oinarria utzi. Aldagai hori zein den erabaki ahal izateko, zikloko fluxuek duten joera aztertu behar da. Oinarrian sartuko den aldagaitik hasita, honek hazteko joera duela ikusten da, zero izatetik balio positibo bat izatera pasako delako. Eskaintza eta eskariak bete behar direnez, errenkada edo zutabe berean dauden zikloko beste fluxuek jaisteko joera izan behar dute. Modu berean, zikloan jaisteko joera duten aldagai horien alboko direnek igotzeko joera erakusten dute.

Jaisteko joera duten aldagaien balioak txikitu egingo dira horietako bat zero bihurtutzen den arte, garraio-fluxu negatiboak ez baitira onartzen. Hain zuzen ere, zero bihurtu den aldagai hori izango da oinarritik aterako dena. Zikloko ez diren aldagaien balioak ez dira aldatzen. Jaisteko joera duten fluxuen artetik minimoa izango da oinarrian sartuko den aldagaiari esleituko zaion balioa.

Adibidea. 170. orrialdeko adibidearekin jarrai dezagun. Esan dugunez, x_{13} aldagaia oinarrian sartuko da, eta bertan fluxu positibo bat esleituko da. Taulan 1. zutabea ezabatu egingo dugu, fluxu bakarra dagoelako bertan. Ezin daiteke errenkada edo zutabe gehiago ezabatu, guztietan baitaude fluxu positibo bat baino gehiago, x_{13} fluxu positibotzat hartuz. Hortaz, zikloa x_{12}, x_{13}, x_{22} eta x_{23} aldagaiek osatzen dute (ikus taulan grisez dauden lau laukitxoak).

Irten Sartu

	O_1	O_2	O_3	Eskaintza
A_1	1500	500 ↓	↑	2000
A_2		1500 ↑	1000 ↓	2500
Eskaria	1500	2000	1000	

x_{13} aldagaiak hazteko joera duenez, zikloko diren eta bere errenkada eta zutabe berean dauden x_{12} eta x_{23} aldagaiek jaisteko joera dute. Azken bi horien alboko da zikloan x_{22}, igotzeko joera izango duelarik. Garraio-fluxuak beti positibo direnez, jaisteko joera dutenen artetik minimoak esango digu zenbat hazi edo txikituko diren zikloko fluxuak: $\min\{x_{12} = 500, x_{23} = 1000\} = 500$. Hortaz, x_{12} aldagaia izango da oinarria utziko duena.

Oinarrian sartuko den eta oinarritik irtengo den aldagaia aukeratuak izan direnean, zikloko fluxuak eguneratu egin behar dira. Eguneraketa burutzearekin batera zikloa desagertu egingo da eta eskaintzak eta eskariak beteko dira, zikloko fluxuak eguneratu aurretik betetzen ziren bezalaxe. Kasu honetan, oinarria utziko duen aldagaiaren fluxua 500ekoa denez, zikloko fluxuak 500 unitate hazi edo txikituko dira, fluxuek duten joeraren arabera. Fluxuak eguneratuz lortzen da beste oinarriko soluzio bideragarri hau:

	O_1	O_2	O_3	Eskaintza
A_1	1500		500	2000
A_2		2000	500	2500
Eskaria	1500	2000	1000	

- Soluzioa.

$$x_{11} = 1500,\ x_{12} = 0,\ x_{13} = 500,\ x_{21} = 0,\ x_{22} = 2000,\ x_{23} = 500.$$

- Garraio-kostua.

$$z = (8 \times 1500) + (10 \times 500) + (4 \times 2000) + (9 \times 500) = 29500.$$

Soluzio hau oinarri-aldaketa egin aurretik genuena baino hobea da, garraio-kostua txikiagoa delako (ikus 164. orrialdeko garraio-kostua). □

5.7 Garraio-taula

Orain arte, bi taularekin egin dugu lan: garraio-kostuen taula eta garraio-fluxuen taula. Gainera, soluzioa hobetzerakoan, dualaren u_i eta v_j aldagaiak eta $z_{ij} - c_{ij}$ balio adierazleak ere behar izan ditugu, eta kalkuluak tauletatik kanpo egin behar izan ditugu.

Kalkulu guztiak taula bakar batean egin ahal izateko, *garraio-taula* erabiltzen da, eta bertan jasotzen dira garraio-problemarako soluzio optimoa kalkulatzeko prozesuan beharrezko gertatzen diren balio guztiak. Garraio-taulak egitura hau dauka:

	v_1	v_2	$\cdots$	v_n	
u_1	$z_{11}-c_{11}$ c_{11} x_{11}	$z_{12}-c_{12}$ c_{12} x_{12}	$\cdots$	$z_{1n}-c_{1n}$ c_{1n} x_{1n}	a_1
u_2	$z_{21}-c_{21}$ c_{21} x_{21}	$z_{22}-c_{22}$ c_{22} x_{22}	$\cdots$	$z_{2n}-c_{2n}$ c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$			$\ddots$		$\vdots$
u_m	$z_{m1}-c_{m1}$ c_{m1} x_{m1}	$z_{m2}-c_{m2}$ c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	$z_{mn}-c_{mn}$ c_{mn} x_{mn}	a_m
	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

Adibidea. Jarrai dezagun aurreko adibidearekin. Dagokion garraio-taula idatziko dugu.

Irten

Sartu

	$v_1 = 8$	$v_2 = 6$	$v_3 = 11$	
$u_1 = 0$	8 1500	6 500	1 10 	2000
$u_2 = -2$	-4 10 	4 1500	9 1000	2500
	1500	2000	1000	

Bertan kokatu ditugu problemaren matrize-formako datuak (ikus 153. orrialdea), ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa erabiliz kalkulatutako hasierako oinarriko soluzio bideragarria (ikus 163. orrialdeko garraio-fluxuen taula), eta 5.6 Atalean oinarrian sartuko den bektorea erabakitzeko kalkulatu diren u_i, v_j, eta $z_{ij} - c_{ij}$ balioak (ikus 171. orrialdea). Gainera, oinarritik irtengo den bektorea erabakitzeko, zikloa ere adierazten dugu (ikus 172. orrialdeko taula). $\square$

5.8 Garraio-problemarako algoritmoa

Atal honetan ematen dira garraio-problema baten soluzio optimoa kalkulatzeko eman beharreko urratsak, helburua minimizatzea denean.

1. **urratsa**. Garraio-problema orekatu.

2. **urratsa**. Hasierako oinarriko soluzio bideragarri bat kalkulatu.

3. **urratsa**. Une honetan daukagun oinarriari dagozkion $u_1, \ldots, u_m$ eta $v_1, \ldots, v_n$ aldagaien balioak kalkulatu.

4. **urratsa**. Oinarriko ez diren bektoreei dagozkien $z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ balio adierazleak kalkulatu.

   - $z_{ij} - c_{ij} > 0$ existitzen bada, soluzioa hobe daiteke. Balio adierazle positiboen artetik maximoa duen aldagaia aukeratu oinarrian sartzeko. 5. urratsera joan.
   - Oinarriko ez diren aldagai guztietarako $z_{ij} - c_{ij} < 0$ bada, une honetan daukagun soluzioa optimoa eta bakarra da. Amaitu.
   - Oinarriko ez diren aldagai guztietarako $z_{ij} - c_{ij} \leq 0$ bada, eta oinarrikoa ez den aldagai bat existitzen bada, zeinarentzat $z_{ij} - c_{ij} = 0$ den, soluzio optimo anizkoitza dago. Azken aldagai hori aukeratuko da oinarrian sartzeko. 5. urratsera joan.

5. **urratsa**. Une honetan oinarrian dauden aldagaiek eta oinarrian sartzeko aukeratua izan den aldagaiak osatzen duten ziklo bakarra aurkitu. Zikloa osatzen duten fluxuak eguneratuz soluzio berria kalkulatu. 3. urratsera joan.

5.9 Garraio-problemarako algoritmoaren aplikazioa

Garraio-kostuen taula hau duen garraio-problemarako soluzio optimoa kalkulatuko dugu.

	1	2	3	4	Eskaintza
1	5	9	$-$	4	28
2	6	10	3	$-$	32
3	4	2	5	7	60
Eskaria	48	29	40	33	

$(1,3)$ eta $(2,4)$ posizioetako marratxoek iturburu-puntu eta helburu-puntu horien arteko garraioa ezin daitekeela gauzatu adierazten dute. Posizio horietan garraio-fluxurik kokatua izan ez dadin, M garraio-kostu oso altu bat egokituko dugu.

Lehenengo iterazioa

1. urratsa. Garraio-problema orekatu. Eskaintza $= 28 + 32 + 60 = 120$, Eskaria $= 48 + 29 + 40 + 33 = 150$. Eskaintzan 30 produktu unitate falta direnez, eskaria zerbitzatu ahal izateko, 30 unitateko eskaintza eta garraio-kostuak zero izango dituen gezurrezko iturburu-puntu bat sortuko dugu. Garraio-kostuen taulako datuak garraio-taulan kokatuko ditugu.

5	9	M	4	28
6	10	3	M	32
4	2	5	7	60
0	0	0	0	30
48	29	40	33	

2. urratsa. Vogel-en metodoa erabiliz hasierako oinarriko soluzio bideragarri bat kalkulatuko dugu. Taulan ED_i errenkadakako eta ZD_j zutabekako diferentziak kalkulatuko ditugu, $i = 1, \ldots, 4$, $j = 1, \ldots, 4$. Diferentziarik handiena 1. eta 4. zutabeetan dago. 1. zutabea aukeratuko dugu, adibidez. Bertan kosturik txikieneko posizioa 0 kostua duena da, $(4,1)$ posizioan. Posizio horretan eskaintzaren eta eskariaren arteko minimoa, $\min\{30, 48\} = 30$ esleituko dugu. Eskaintza eta eskaria eguneratu eta 4. errenkada ezabatuko dugu, eskaintza zero egin delako. Honela geratuko da taula Vogel-en metodoaren hurrengo iterazioari ekiteko:

						ED_i
	5	9	M	4	28	1
	6	10	3	M	32	3
	4	2	5	7	60	2
	0 30	0	0	0	0	0
	18	29	40	33		
ZD_j	4	2	3	4		

Vogel-en metodoaren bigarren iterazioan, diferentziak kalkulatuko ditugu ezabatu gabeko kostuen artean. Handiena 2. zutabean dago, $ZD_2 = 7$, eta bertan ezabatu gabeko kosturik txikiena 2koa da, $(3, 2)$ posizioan. $\min\{60, 29\} = 29$ unitateko garraio-fluxua kokatu, eskaintza eta eskaria eguneratu eta 2. zutabea ezabatuko dugu, eskaria zero egin delako. Taula honela geratuko da:

						ED_i
	5	9	M	4	28	1
	6	10	3	M	32	3
	4	2 29	5	7	31	2
	0 30	0	0	0	0	
	18	0	40	33		
ZD_j	1	7	2	3		

Prozesua errepikatuko dugu. Diferentziarik handienak $ED_2 = ZD_4 = 3$ dira. 2. errenkada aukeratuko dugu, adibidez. Kosturik txikiena bertan $c_{23} = 3$ da, $(2, 3)$ posizioan. $\min\{32, 40\} = 32$ garraio-fluxua kokatu, eskaintza eta eskaria eguneratu eta 2. errenkada ezabatuko dugu, eskaintza zero egin delako.

					ED_i
5	9	M	4	28	1
6	10	3 (32)	M	0	3
4	2 (29)	5	7	31	1
0 (30)	0	0	0	0	
18	0	8	33		
ZD_j: 1		2	3		

Oraingoan, diferentziarik handiena 3. zutabean dago, $ZD_3 = M - 5$. Zutabean ezabatu gabe dauden kostuen artetik minimoa $\min\{c_{13}, c_{33}\} = \min\{M, 5\} = 5$ da. $(3,3)$ posizioan $\min\{31, 8\} = 8$ garraio-fluxua kokatuko dugu. Eskaintza eta eskaria eguneratu eta 3. zutabea ezabatu.

					ED_i
5	9	M	4	28	1
6	10	3 (32)	M	0	
4	2 (29)	5 (8)	7	23	1
0 (30)	0	0	0	0	
18	0	0	33		
ZD_j: 1		$M-5$	3		

Oraindik, taulan bi errenkada eta bi zutabe daude ezabatu gabe. Diferentziarik handienak $ED_3 = ZD_4 = 3$ dira. 3. errenkada aukeratuko dugu, eta bertan ezabatu gabeko kostuen artetik minimoa $\min\{c_{31}, c_{34}\} = \min\{4, 7\} = 4$ da. $(3,1)$ posizioan $\min\{23, 18\} = 18$ garraio-fluxua kokatuko dugu. Eskaintza eta eskaria eguneratu eta 1. zutabea ezabatuko dugu.

						ED_i
	5	9	M	4	28	1
	6	10	3 32	M	0	
	4 18	2 29	5 8	7	5	3
	0 30	0	0	0	0	
	0	0	0	33		
ZD_j	1			3		

Dagoeneko, ezabatu gabeko zutabe bat besterik ez da geratzen taulan. Esleituak izan ez diren garraio-fluxuak $(1,4)$ eta $(3,4)$ posizioetan kokatu eta lortu dugu, Vogel-en metodoa erabiliz, hasierako oinarriko soluzio bideragarria.

5	9	M	4 28	28
6	10	3 32	M	32
4 18	2 29	5 8	7 5	60
0 30	0	0	0	30
48	29	40	33	

3. urratsa. Aldagai dualen balioak kalkulatu. Taulan bertan egingo dugu, $u_3 = 0$ eginez. Horrela, adibidez, oinarrikoa den x_{31} aldagairako $z_{31} - c_{31} = 0$ betetzen denez, $u_3 + v_1 - c_{31} = 0 + v_1 - 4 = 0$ ekuaziotik $v_1 = 4$ balioa lortzen da. Gainerako aldagaien balioak askatzeko, modu berean egingo dugu.

	$v_1 = 4$	$v_2 = 2$	$v_3 = 5$	$v_4 = 7$	
$u_1 = -3$	[5]	[9]	[M]	28 [4]	28
$u_2 = -2$	[6]	[10]	32 [3]	[M]	32
$u_3 = 0$	18 [4]	29 [2]	8 [5]	5 [7]	60
$u_4 = -4$	30 [0]	[0]	[0]	[0]	30
	48	29	40	33	

4. urratsa. Oinarriko ez diren aldagaiei dagozkien $z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ balio adierazleak kalkulatu. Adibidez, $z_{21} - c_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -2 + 4 - 6 = -4$. Modu berean kalkulatuko ditugu gainerako balio adierazleak.

	$v_1 = 4$	$v_2 = 2$	$v_3 = 5$	$v_4 = 7$	
$u_1 = -3$	-4 [5]	-10 [9]	$2-M$ [M]	28 [4]	28
$u_2 = -2$	-4 [6]	-10 [10]	32 [3]	$5-M$ [M]	32
$u_3 = 0$	18 [4]	29 [2]	8 [5]	5 [7]	60
$u_4 = -4$	30 [0]	-2 [0]	1 [0]	$\boxed{3}$ [0] Sartu	30
	48	29	40	33	

Aurreko taulan ikus daiteke $z_{43} - c_{43} = 1$ eta $z_{44} - c_{44} = 3$ balio adierazleak positiboak direla. Bien artetik handienari dagokion aldagaia aukeratuko dugu oinarrian sartzeko, $(4, 4)$ posizioko x_{44} alegia.

5. urratsa. Zikloa x_{31}, x_{34}, x_{41} eta x_{44} aldagaiek osatzen dute. Taulako laukitxoetan gezien bidez adierazten da garraio-fluxuek duten hazteko edo txikitzeko joera. Txikitzeko joera dutenen artetik minimoa $\min\{5, 30\} = 5$ denez, x_{34} aldagaia irtengo da oinarritik. Zikloko fluxuak eguneratu eta taula berri bat lortuko dugu. Ondoren, 3. urratsera joan eta prozesua errepikatuko da.

	$v_1 = 4$	$v_2 = 2$	$v_3 = 5$	$v_4 = 7$	
$u_1 = -3$	-4 5	-10 9	$2-M$ M	4 / 28	28
$u_2 = -2$	-4 6	-10 10	3 / 32	$5-M$ M	32
$u_3 = 0$	4 / 18 ↑	2 / 29	5 / 8	7 / 5 ↓ (Irten)	60
$u_4 = -4$	0 / 30 ↓	-2 0	1 0	$\boxed{3}$ 0 / ↑ (Sartu)	30
	48	29	40	33	

	5	9	M	4 / 28	28
	6	10	3 / 32	M	32
	4 / 23	2 / 29	5 / 8	7	60
	0 / 25	0	0	0 / 5	30
	48	29	40	33	

Bigarren iterazioa

Prozesua errepikatu behar da: aldagai dualen balioak eta balio adierazleak kalkulatu, sartuko den aldagaia aukeratu, zikloa aurkitu, irtengo den aldagaia zein izango den erabaki (ezkerreko taulan daude kalkulu guztiak) eta zikloko fluxuak eguneratuz, hobea den beste soluzio bat izango dugu (eskuineko taulan).

	$v_1 = 4$	$v_2 = 2$	$v_3 = 5$	$v_4 = 4$	
$u_1 = 0$	-1 5	-7 9	$5-M$ M	4 / 28	28
$u_2 = -2$	-4 6	-10 10	3 / 32	$2-M$ M	32
$u_3 = 0$	4 / 23 ↑	2 / 29	5 / 8 ↓ (Irten)	-3 7	60
$u_4 = -4$	0 / 25 ↓	-2 0	$\boxed{1}$ 0 / ↑ (Sartu)	0 / 5	30
	48	29	40	33	

	5	9	M	4 / 28	28
	6	10	3 / 32	M	32
	4 / 31	2 / 29	5	7	60
	0 / 17	0	0 / 8	0 / 5	30
	48	29	40	33	

Hirugarren iterazioa.

Berriro ere, prozesua errepikatzen da eta garraio-problemarako soluzio optimora iristen gara. Taula honetan ikus daiteke $z_{ij} - c_{ij}$ balio adierazle guztiak negatiboak direla. Hori dela eta, soluzio optimoa bakarra da.

	$v_1 = 0$	$v_2 = -2$	$v_3 = 0$	$v_4 = 0$	
$u_1 = 4$	-1 $\boxed{5}$	-7 $\boxed{9}$	$4-M$ $\boxed{M}$	$\boxed{4}$ 28	28
$u_2 = 3$	-3 $\boxed{6}$	-9 $\boxed{10}$	$\boxed{3}$ 32	$3-M$ $\boxed{M}$	32
$u_3 = 4$	$\boxed{4}$ 31	$\boxed{2}$ 29	-1 $\boxed{5}$	-3 $\boxed{7}$	60
$u_4 = 0$	$\boxed{0}$ 17	-2 $\boxed{0}$	$\boxed{0}$ 8	$\boxed{0}$ 5	30
	48	29	40	33	

- Soluzio optimoa: $x^*_{14} = 28$, $x^*_{23} = 32$, $x^*_{31} = 31$, $x^*_{32} = 29$, $x^*_{41} = 17$, $x^*_{43} = 8$, $x^*_{44} = 5$. Gezurrezko 17 produktu unitate jasotzen ditu 1 helburu-puntuak, gezurrezko 8 unitate 3 helburuak eta gezurrezko 5 unitate 4 helburuak. Hortaz, beren eskariak ez dira osotasunean zerbitzatuak izan, eskaintza totala nahikoa ez zelako.

- Garraio-kostu minimoa:

$$z^* = (4\times28)+(3\times32)+(4\times31)+(2\times29)+(0\times17)+(0\times8)+(0\times5) = 390$$

$\square$

5.9.1 Soluzio endekatua

m iturburu-puntu eta n helburu-puntu dituen garraio-problema orekatu batean, soluzio batek zero baino handiagoak diren $m + n - 1$ aldagai baino gutxiago baditu, soluzio hori endekatua dela esaten da. Endekatzea ondoko bi kasuetan gerta daiteke.

- Hasierako oinarriko soluzio bideragarri baten kalkuluan, Vogel-en metodoa edo ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa aplikatzerakoan, azkena ez den urrats batean errenkada eta zutabea aldi berean ezabatzen badira, eskaintza eta eskaria biak batera zero egin direlako.

- Garraio-problemarako algoritmoa aplikatzerakoan, oinarritik irtengo den aldagaia aukeratzeko irizpidean berdinketa gertatzen bada.

Soluzio bat endekatua denean, beharrezkoa gertatzen da bereiztea zero diren garraio-fluxuen artean zeintzuk diren oinarriko aldagaiei dagozkienak, eta zeintzuk ez. Zenbait kasutan, garraio-fluxua zero duten aldagaien artean bereizketa egiteko aukera bat baino gehiago izaten da.

Adibidea. Ondoko garraio-kostuen taula emanik, hasierako oinarriko soluzio bideragarri bat kalkulatuko dugu:

	1	2	3	Eskaintza
1	3	2	1	15
2	1	2	3	10
3	2	3	1	14
Eskaria	10	6	12	

Problema orekatu eta Vogel-en metodoa aplikatuz, ondoko hasierako oinarriko soluzio bideragarria lortzen dugu.

$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$ 4	$\boxed{0}$ 11	15
$\boxed{1}$ 10	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$	10
$\boxed{2}$	$\boxed{3}$ 6	$\boxed{1}$ 8	$\boxed{0}$	14
10	6	12	11	

Aurreko garraio-taulan, zero baino balio handiagoa duten 5 garraio-fluxu daude: x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{32} eta x_{33}. Oinarrian $m + n - 1 = 6$ aldagai daudenez, soluzioa endekatua da. Hortaz, garraio-fluxua zero duten aldagaien artean bat aukeratu beharko da oinarriko izateko, beti ere aldagai horiek zikloa osatuko ez dutelarik. Kasu honetan, x_{11}, x_{22}, x_{23}, x_{24} eta x_{31} aldagaien artetik bat aukera daiteke, baina ezingo dugu inolaz ere oinarriko aldagai izateko x_{12} edo x_{34} aukeratu, horietako edozein aukeratuz gero, zikloa osatuko litzatekeelako. $x_{22} = 0$ aukeratuz gero, adibidez, ondoko soluzio endekatua lortuko da:

3	2	1	0	
		4	11	15
1	2	3	0	
10	0			10
2	3	1	0	
	6	8		14
10	6	12	11	

Soluzio horretatik abiatuz, algoritmoaren aplikazioarekin jarraituko da.

□

Adibidea. Demagun garraio-problema baten ebazpen-prozesuan ondoko taulan agertzen den soluzio bideragarria daukagula, eta $z_{ij} - c_{ij}$ balio adierazleak kalkulatu ditugula.

	$v_1 = 6$	$v_2 = 4$	$v_3 = 1$	$v_4 = 4$	
	6	4	-3 / 4	-4 / 8	
$u_1 = 0$	10	12			22
	9 / 2	9	6	0 / 9	
$u_2 = 5$		10	8		18
	3 / 6	-4 / 11	4	7	
$u_3 = 3$			15	5	20
	10	22	23	5	

Balio adierazle positiboen artetik handiena $z_{21} - c_{21} = 9$ da; x_{21} aldagaia oinarrian sartuko da. Zikloa x_{11}, x_{12}, x_{21} eta x_{22} aldagaiek osatzen dute. Zikloko fluxuak eguneratu eta oinarriko bi aldagai aldi berean zero egiten direla ikusten dugu: $x_{11} = 0$ eta $x_{22} = 0$. Dena den, bi aldagaiek batera ezin dute oinarria utzi, oinarrian ez genukeelako behar adina aldagai izango. Hortaz, bi horietako bat oinarrian mantenduko dugu, x_{11} adibidez, eta bestea oinarritik irtengo da; eskuineko taulan ikusten den soluzio endekatua lortuko dugu.

	$v_1 = 6$	$v_2 = 4$	$v_3 = 1$	$v_4 = 4$	
$u_1 = 0$	[6] 10 ↓	[4] 12 ↑	−3 [4]	−4 [8]	22
Sartu $u_2 = 5$	9 [2] ↑	[9] 10 ↓	[6] 8	0 [9]	18
Irten $u_3 = 3$	3 [6]	−4 [11]	[4] 15	[7] 5	20
	10	22	23	5	

[6] 0	[4] 22	[4]	[8]	22
[2] 10	[10]	[6] 8	[9]	18
[6]	[11]	[4] 15	[7] 5	20
10	22	23	5	

Algoritmoaren aplikazioarekin aurrera jarraitu behar da optimora iritsi arte. □

5.9.2 Soluzio optimo anizkoitza

Ondoko garraio-kostuen taula emanik, soluzio optimo guztiak kalkulatuko ditugu:

	1	2	3	4	5	Eskaintza
1	4	1	2	6	9	100
2	6	4	3	5	7	120
3	5	2	6	4	8	120
Eskaria	40	50	70	90	90	

Garraio-problemarako algoritmoaren iterazioak egin ondoren, ondoko soluzioa lortzen da:

	$v_1 = 4$	$v_2 = 1$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	$v_5 = 6$	
$u_1 = 0$	[4] 40	[1] 20	[2] 40	−3 [6]	−3 [9]	100
$u_2 = 1$	−1 [6]	−2 [4]	[3] 30	−1 [5]	[7] 90	120
$u_3 = 1$	0 [5]	[2] 30	−3 [6]	[4] 90	−1 [8]	120
	40	50	70	90	90	

Oinarriko ez diren aldagai guztietarako $z_{ij} - c_{ij} \leq 0$ betetzen da, eta gainera $z_{31} - c_{31} = 0$ da. Hortaz, problemak soluzio optimo anizkoitza du.

- Soluzio optimoa: $x^*_{11} = 40$, $x^*_{12} = 20$, $x^*_{13} = 40$, $x^*_{23} = 30$, $x^*_{25} = 90$, $x^*_{32} = 30$, $x^*_{34} = 90$.

- Garraio-kostu minimoa:

  $$z^* = (4{\times}40)+(1{\times}20)+(2{\times}40)+(3{\times}30)+(7{\times}90)+(2{\times}30)+(4{\times}90) = 1400.$$

Beste soluzio optimo bat kalkulatzeko, x_{31} aldagaia aukeratuko dugu oinarrian sartzeko, eta x_{32} oinarritik ateratzeko. Zikloko garraio-fluxuak eguneratuz, beste soluzio optimo bat lortuko dugu.

$\boxed{4}$ 10	$\boxed{1}$ 50	$\boxed{2}$ 40	$\boxed{6}$	$\boxed{9}$	100
$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 30	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$ 90	120
$\boxed{5}$ 30	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$ 90	$\boxed{8}$	120
40	50	70	90	90	

- Soluzio optimoa: $x^*_{11} = 10$, $x^*_{12} = 50$, $x^*_{13} = 40$, $x^*_{23} = 30$, $x^*_{25} = 90$, $x^*_{31} = 30$, $x^*_{34} = 90$.

- Garraio-kostu minimoa:

  $$z^* = (4{\times}10)+(1{\times}50)+(2{\times}40)+(3{\times}30)+(7{\times}90)+(5{\times}30)+(4{\times}90) = 1400.$$

Prozesu hau errepikatuz lortuko dira soluzio optimo guztiak.

□

5.10 Esleipen-problema

Garraio-problemaren kasu partikular bat da esleipen-problema. Lortu nahi dena hau da: iturburu-puntuen (izaki, eginkizun etab.) eta helburu-puntuen (eginkizun, makina etab.) arteko esleipena, esleipen honek kostu-funtzioa optimizatuko duelarik. Esleipen honek iturburu-puntu bakoitza helburu-puntu bakar batekin eta helburu-puntu bakoitza iturburu-puntu bakarrarekin esleituko ditu. I_i iturburu-puntua eta H_j helburu-puntua elkarri esleitzeak c_{ij} kostua eragiten du.

Erabaki-aldagaiak honela daude definituak:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{baldin } I_i \text{ iturburua eta } H_j \text{ helburua elkarri esleitu badira} \\ 0 & \text{bestelakoetan} \end{cases}$$

Formalki esateko, n iturburu-puntu eta n helburu-puntu izanik, eta I_i iturburu-puntua H_j helburu-puntuari esleitzeko kostua c_{ij} bada, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, kostu-totala minimo egingo duen esleipena aurkitzean datza esleipen-problema. Esleipen-problemari dagokion eredu lineala forma estandarrean ondokoa da:

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

hauen mende

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= 1, & i &= 1, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} &= 1, & j &= 1, \ldots, n \\ x_{ij} &= 0, 1, & i, j &= 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Iturburu-puntu bakoitza helburu-puntu bakar bati esleitzen zaiola adierazten dute lehenenego n murrizketek; hurrengo n murrizketek, aldiz, helburu-puntu bakoitzari iturburu-puntu bakar bat esleitzen zaiola.

Problemaren iturburu-puntu kopurua eta helburu-puntu kopurua berdinak ez direnean, kopuru horiek berdinak izan daitezen behar adina iturburu-puntu edo helburu-puntu erantsiko dira problema orekatzeko. Iturburu-puntu edo helburu-puntu horiek gezurrezkoak izateagatik, zero esleipen-kostua izango dute.

Esleipen-problemaren informazio esanguratsua *esleipen-kostuen taula*-n ematen da, eskaintza eta eskari guztiak 1 direlako.

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & H_1 & H_2 & \ldots & H_n \\
\hline
I_1 & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\
I_1 & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\
I_n & c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \\
\hline
\end{array}
$$

5.3. Irudia: Esleipen-kostuen taula

5.10.1 Metodo hungariarra

Esleipen-problema ebazteko algoritmoa ondoko bi teorematan oinarritzen da.

5.10.1 Teorema. *Esleipen-problema baten helburu funtzioa*

$$z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

izanik, x_{ij} soluzio optimo badira, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, aldagaietarako balio horiek soluzio optimo dira baita aurreko helburu funtzio horren ordez

$$z' = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c'_{ij} x_{ij}$$

helburu funtzioa duen problemarako, $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ izanik eta u_i eta v_j konstanteak izanik.

Froga.

$$z' = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c'_{ij} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} u_i x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} v_j x_{ij} =$$

$$= z - \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij} =$$

$$= z - \sum_{i=1}^{n} u_i - \sum_{j=1}^{n} v_j = z - k.$$

z eta z' helburu funtzioen arteko aldea k konstantea da. Horregatik lortzen dute optimoa x_{ij} erabaki-aldagaien balioen multzo berberean. □

5.10.1 Teoremari esker, esleipen-kostuen taula eraldatu ahal izango dugu errenkadaka edota zutabeka eragiketak eginez, horrek soluzio optimoaren gain eraginik sortuko ez duelarik; adibidez, errenkada edota zutabe bateko elementuei konstante bat kendu ahal izango diegu.

5.10.2 Teorema. $c_{ij} \geq 0$ *badira,* $i, j = 1, \ldots, n$ *eta* x_{ij} *aldagaiek hartutako balioek*

$$z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = 0$$

betetzen badute, x_{ij} *problemarako soluzio optimoa dira,* $i, j = 1, \ldots, n$.

Froga. $c_{ij} \geq 0$ badira, $i, j = 1, \ldots, n$, $x_{ij} = 0, 1$ izanik, $i, j = 1, \ldots, n$, helburu funtzioaren balioa $z \geq 0$ izango da. Hortaz, x_{ij} aldagaien balioek, $i, j = 1, \ldots, n$, $z = 0$ egiten badute, balio hori helburu funtzioaren minimo absolutua izanik, soluzioa optimoa da. □

Esleipen-problema baten ebazpenean 5.10.1 Teoremaren arabera egiten dira eragiketak, esleipen-kostuen taulan zeroak lortzeko. Helburu funtzioari zero balioa emango dion esleipen bat lortzen bada, 5.10.2 Teoremaren arabera, esleipen hori optimoa dela esango dugu.

Ikusi dugunez, errenkada edota zutabe bateko elementuei konstante bat kentzeak ez du problemaren soluzio optimoa aldatzen; eta horretan oinarritzen da metodo hungariarra, esleipen-kostuen taula eraldatuz, esleipena egin ahal izateko behar adina zero lortzeko.

Esleipen-problema ebazteko erabiltzen den metodo hungariarra König-en teoreman oinarritzen da. Teorema honek baieztatzen du: *errenkadetan eta zutabeetan modu independentean esleitu daitekeen zero kopurua, zero guztiak estaltzeko behar den errenkada edota zutabe kopuru minimoaren berdina da.*

Helburu funtzioaren balioa minimizatzeko eman beharreko urratsak ondoko algoritmoak ematen ditu.

5.10.2 Esleipen-problemarako algoritmoa

Helburua minimizatzea da

1. **urratsa.** Problema orekatu.

2. **urratsa.** Zeroak lortu esleipen-kostuen taulako errenkadatan. Errenkada bakoitzeko elementuei errenkadako minimoa kendu, $u_i = \min_j\{c_{ij}\}$. Taulako elementu berriak $c'_{ij} = c_{ij} - u_i$ dira, $i, j = 1, \ldots, n$.

3. **urratsa.** Zeroak lortu esleipen-kostuen taulako zutabeetan. Zutabe bakoitzeko elementuei zutabeko minimoa kendu, $v_j = \min_i\{c'_{ij}\}$. Taulako elementu berriak $c''_{ij} = c'_{ij} - v_j$ dira, $i, j = 1, \ldots, n$.

4. **urratsa.** Zeroak esleitu. Zero kopuru txikieneko errenkada edo zutabea aukeratu. Bertan zero bat esleitu eta errenkada edo zutabe berean dauden gainerako zeroak ezabatu. Zeroen esleipenarekin jarraitu, ezabatu gabeko zero kopuru txikiena duen errenkadatik edo zutabetik hasita.

   - Zeroak esleitzearen prozesuaren amaieran errenkada guztiek esleitutako zero bat badute, soluzioa optimoa da. Amaitu.
   - Zeroak esleitzearen prozesuaren amaieran esleitutako zerorik ez duen errenkadaren edo zutaberen bat existitzen bada, 5. urratsera joan.

5. **urratsa.** Taulako zero guztiak estaltzen dituen errenkada edo zutabe kopuru minimoa aukeratu behar da. Aukeraketarako ondoko prozedura erabiltzen da.

   5.1 Esleitutako zerorik ez duen errenkada oro markatu.

   5.2 Aurreko 5.1 urratsean markatutako errenkadetan ezabatutako zeroa duten zutabeak markatu.

   5.3 Aurreko 5.2 urratsean markatutako zutabeetan zero bat esleituta duten errenkadak markatu.

   5.2 eta 5.3 urratsak errepikatu, errenkada edo zutabe gehiago markatu ahal izango ez dugun arte.

   Markatuak izan ez diren errenkadek eta markatutako zutabeek zero guztiak estaltzen dituzte. Errenkada eta zutabe horiek estali eta 6. urratsera joan.

6. urratsa. Zero berriak sortu. Estali gabeko elementuen artetik minimoa aukeratu. Estali gabeko errenkadetako elementuei balio hori kendu, eta estalitako zutabeetako elementuei gehitu. 4. urratsera joan.

Adibidea. Demagun A, B, C eta D eraikinen eraikuntzarako lehiaketara lau kontratistek aurkeztu dituztela beren proiektuak, kontratista bakoitzari eraikin baten eraikuntza esleituko zaiolarik. Ondoko taulan zehazten da kontratista bakoitzak eraikuntza bakoitza altxatzeko beharko lukeen denbora. Lau eraikuntzak denbora minimoan altxatzea helburu izanik, kalkula ezazu eraikuntzen eta kontratisten arteko esleipen optimoa.

	1	2	3	4
A	58	58	60	54
B	66	70	70	78
C	106	104	100	95
D	52	54	64	54

1. urratsa. Problema orekatua da.

2. urratsa. Errenkada bakoitzeko elementuei errenkadako minimoa kenduko diegu, hau da, 54, 66, 95 eta 52 lehenengo, bigarren, hirugarren eta laugarren errenkadetan, hurrenez hurren.

	1	2	3	4
A	4	4	6	0
B	0	4	4	12
C	11	9	5	0
D	0	2	12	2

3. urratsa. Zutabe bakoitzeko elementuei zutabeko minimoa kenduko diegu: 0, 2, 4 eta 0, hurrenez hurren.

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline
A & 4 & 2 & 2 & 0 \\
B & 0 & 2 & 0 & 12 \\
C & 11 & 7 & 1 & 0 \\
D & 0 & 0 & 8 & 2 \\ \hline
\end{array}$$

4. urratsa. Zeroak esleitu.

- Lehenengo errenkadak zero bakarra dauka; $(A, 4)$, eta esleitu egingo dugu. Esleitutako zeroaren zutabe berean dagoen zeroa, $(C, 4)$ posiziokoa alegia, ezabatu egingo dugu. Honela geratzen da taula:

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline
A & 4 & 2 & 2 & \boxed{0} \\
B & 0 & 2 & 0 & 12 \\
C & 11 & 7 & 1 & \cancel{0} \\
D & 0 & 0 & 8 & 2 \\ \hline
\end{array}$$

  Bigarren errenkadan ezabatu gabeko bi zero daude, hirugarrengoan ez dago ezabatu gabeko zerorik, eta laugarrengoan bi daude.

- Zutabeak aztertuz gero, lehenengo zutabean bi zero daude. Bigarren zutabean zero bakarra dagoenez, bigarren zutabeko $(D, 2)$ posizioko zeroa esleitua izango da, eta ondorioz, $(D, 1)$ posizioko zeroa ezabatua errenkada berean egoteagatik. Taula honela geratuko da:

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline
A & 4 & 2 & 2 & \boxed{0} \\
B & 0 & 2 & 0 & 12 \\
C & 11 & 7 & 1 & \cancel{0} \\
D & \cancel{0} & \boxed{0} & 8 & 2 \\ \hline
\end{array}$$

  Zutabeekin jarraituz, hirugarrengoan esleitua izan daitekeen zero bakarra dagoenez, $(B, 3)$ posizioko zeroa esleitua izango da, eta $(B, 1)$

posiziokoa ezabatua errenkada berean egoteagatik. Taula honela geratuko da:

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4\\ \hline
A & 4 & 2 & 2 & \boxed{0}\\
B & \cancel{0} & 2 & \boxed{0} & 12\\
C & 11 & 7 & 1 & \cancel{0}\\
D & \cancel{0} & \boxed{0} & 8 & 2\\ \hline
\end{array}$$

Ez da lortu errenkada eta zutabe guztietan esleitutako zero bat izatea, ez dugulako lau zero esleitzerik lortu. Hortaz, taulan ez daukagu esleipen optimoa, eta algoritmoaren hurrengo urratsarekin jarraitu beharko da.

5. **urratsa.** Zero guztiak estaltzen dituen errenkada edo zutabe kopuru minimoa aukeratu.

   5.1 C errenkada markatuko dugu, esleitutako zerorik ez duelako.

   5.2 Markatutako errenkadan, ezabatutako zero bat dago laugarren zutabean; zutabea markatu.

   5.3 Laugarren zutabeak esleitutako zeroa dauka lehenengo errenkadan; markatu errenkada eta 5.2 urratsa errepikatuko dugu.

   5.2 Lehenengo errenkadan ez dago ezabatutako zerorik.

Errenkadak eta zutabeak markatzeko prozesua amaitu da. Markatu gabeko errenkadak eta markatutako zutabeak estaliko ditugu.

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline
A & 4 & 2 & 2 & \boxed{0} & X\\
B & \cancel{0} & 2 & \boxed{0} & 12 & \\
C & 11 & 7 & 1 & \cancel{0} & X\\
D & \cancel{0} & \boxed{0} & 8 & 2 & \\ \hline
 & & & & X &
\end{array}$$

Hiru lerro estali ditugu (bi errenkada eta zutabe bat), taulako zero guztiak estaltzen dituztenak. Hala ere, lau iturburu-puntu eta lau helburu-puntu ditugunez, lau zero esleitzea lortu behar dugu. 6. urratsera goaz.

6. urratsa. Zero berriak sortu. Estali gabeko elementuen arteko minimoa 1 da. Lehenengo eta hirugarren errenkadetako elementuei 1 kenduko diegu, estaliak izan ez direlako, eta laugarren zutabeko elementuei (estalia izan den zutabea) 1 gehitu. Taula eguneratua honela geratuko da.

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline A & 3 & 1 & 1 & 0 \\ B & 0 & 2 & 0 & 13 \\ C & 10 & 6 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & 8 & 3 \\ \hline \end{array}$$

4. urratsera joan.

4. urratsa. Zeroak esleitu.

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline A & 3 & 1 & 1 & \boxed{0} \\ B & \boxed{0} & 2 & \cancel{0} & 13 \\ C & 10 & 6 & \boxed{0} & \cancel{0} \\ D & \cancel{0} & \boxed{0} & 8 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Lau zero esleitzea lortu denez, taulako soluzioa optimoa da.

- Soluzio optimoa.

  $A \rightarrow 4$: 4 kontratistak A eraikina altxako du.

  $B \rightarrow 1$: 1 kontratistak B eraikina altxako du.

  $C \rightarrow 3$: 3 kontratistak C eraikina altxako du.

  $D \rightarrow 2$: 2 kontratistak D eraikina altxako du.

- Esleipen-kostu minimoa:

  $c_{A4} + c_{B1} + c_{C3} + c_{D2} = 54 + 66 + 100 + 54 = 274$

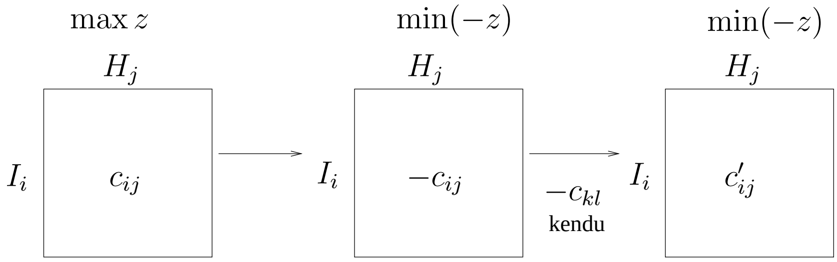
□

5.10.3 Maximizatze-problema

Esleipen-problemaren helburu funtzioa minimizatzea denean bakarrik aplika daiteke metodo hungariarra. Problemaren helburua maximizatzea den kasuetan, ondoko problema ebatzi beharko litzateke.

$$\min(-z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} -c_{ij} x_{ij}$$

Hala ere, helburu funtzioaren eraldaketa honek esleipen-kostuak negatibo bihurtzen ditu. 5.10.2 Teorema erabili ahal izateko, beharrezkoa da $c_{ij} \geq 0$ betetzea. Taulan balio negatiborik ez izateko modu bat taulako kostu negatiboen artetik minimoa aukeratu ($-c_{kl} = \min\{\ -c_{ij}\ /\ -c_{ij} < 0\ \}$) eta taulako elementu guztiei balio hori kentzea da. Horrela lortuko dira taulako $c'_{ij} \geq 0$ balio berriak, $c'_{ij} = -c_{ij} + c_{kl}$.



Adibidea. Enpresa batek hiru lanpostu bete behar ditu: A, B eta C. Lanpostu horiek betetzeko asmoz, 5 langile aurkeztu dira hautapen frogara: 1, 2, 3, 4 eta 5. Ondoko taulan agertzen dira langile bakoitzak lanpostu bakoitzerako egindako frogan lortutako puntuaketa, 1etik 10era neurtuta. Taulako $(C, 4)$ posizioan ez dago puntuaketarik, 4 langilea ez delako C lana egiteko gai izan.

	1	2	3	4	5
A	2	4	10	3	6
B	7	7	5	6	4
C	8	6	7	–	9

Langile eta lanpostu arteko esleipen optimoa aurkitu nahi da, hau da, puntuaketa totala maximo egingo duen hiru langile eta hiru lanpostuen arteko esleipena. Helburua maximizatzea izanik, c_{ij} balioak $-c_{ij}$ balioez ordezkatzen badira, aurreko taulan maximizatzea ondoko taulan minimizatzearen baliokidea da.

	1	2	3	4	5
A	-2	-4	-10	-3	-6
B	-7	-7	-5	-6	-4
C	-8	-6	-7	$-$	-9

Taulan balio negatiboak daude; balio guztiei minimoa kenduz, -10, ondoko taula lortzen da:

	1	2	3	4	5
A	8	6	0	7	4
B	3	3	5	4	6
C	2	4	3	$-$	1

Eraldaketa horiek egin ondoren, taula minimizatzeko egokituta dago, eta ez dago balio negatiborik. Bestalde, 4 langilea C lanpostuarekin esleitua izan ez dadin, $(C, 4)$ posizioan kostu handi bat kokatuko dugu: M. Horrekin guztiarekin taula prest dago esleipen-problemarako algoritmoa aplikatzeko. $\square$

5.10.4 Soluzio optimo anizkoitza. Adibidea

Har dezagun aurreko adibidean egokitutako taula, esleipen-algoritmoa aplikatzen hasteko prest dagoena.

	1	2	3	4	5
A	8	6	0	7	4
B	3	3	5	4	6
C	2	4	3	M	1

1. **urratsa.** Problema ez da orekatua. Iturburu-puntu kopurua eta helburu-puntu kopurua berdinak izan daitezen, gezurrezko bi iturburu-puntu (gezurrezko bi lanpostu) berri sartu behar dira. Beren esleipen-kostuak zero izango dira, praktikan esleipen horiek ez direlako gauzatuko.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{8} & 6 & 0 & 7 & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \multicolumn{1}{|c}{3} & 3 & 5 & 4 & \multicolumn{1}{c|}{6} \\ \multicolumn{1}{|c}{2} & 4 & 3 & M & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \multicolumn{1}{|c}{0} & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \multicolumn{1}{|c}{0} & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array}$$

2. urratsa. Bigarren eta hirugarren errenkadetako elementuei errenkadako minimoa kenduko diegu, errenkadetan zeroak sortzeko. Taula honela geratuko da:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{8} & 6 & 0 & 7 & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \multicolumn{1}{|c}{0} & 0 & 2 & 1 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \multicolumn{1}{|c}{1} & 3 & 2 & M & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \multicolumn{1}{|c}{0} & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \multicolumn{1}{|c}{0} & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array}$$

3. urratsa. Taulako zutabe guztietan zeroren bat badagoenez, ez da eragiketarik egin behar, eta bere horretan geratzen da.

4. urratsa. Zeroen esleipena. Lehenengo errenkadatik hasiko gara, zero kopuru txikiena duenetako bat delako. $(A, 3)$ posizioan dagoen zeroa esleituko dugu, errenkada edota zutabe berean dauden gainerako zeroak ezabatuko ditugu, eta modu berean jarraituko dugu zeroak esleitzen, errenkada eta zutabe guztiek esleitutako zero bat izango duten arte.

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline
A & 8 & 6 & \boxed{0} & 7 & 4 \\
B & \boxed{0} & \cancel{0} & 2 & 1 & 3 \\
C & 1 & 3 & 2 & M & \boxed{0} \\
D & \cancel{0} & \boxed{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\
E & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \boxed{0} & \cancel{0} \\ \hline
\end{array}$$

Taulan esleitutako bost zero dagoenez, soluzioa optimoa da.

- Soluzioa: $A \to 3,\ B \to 1,\ C \to 5,\ D \to 2$ eta $E \to 4$.

  2 eta 4 langileei gezurrezko lanpostua esleitu zaienez, lanposturik ez dutela lortu interpretatu behar da.

- Kostua: $c_{A3} + c_{B1} + c_{C5} + c_{D2} + c_{E4} = 10 + 7 + 9 + 0 + 0 = 26.$

Zeroen esleipena egiterakoan, bigarren errenkadan B lanpostua 1 langilearekin esleitu daiteke (aurreko soluzioa), edo 2 langilearekin. Bigarren aukera eginez gero, ondoko soluzio optimoa lortzen da:

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline
A & 8 & 6 & \boxed{0} & 7 & 4 \\
B & \cancel{0} & \boxed{0} & 2 & 1 & 3 \\
C & 1 & 3 & 2 & M & \boxed{0} \\
D & \boxed{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\
E & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \boxed{0} & \cancel{0} \\ \hline
\end{array}$$

- Soluzioa: $A \to 3$, $B \to 2$, $C \to 5$, $D \to 1$, $E \to 4$.

  Kasu honetan, 1 eta 4 langileak geratu dira lanik gabe.

- Kostua: $c_{A3} + c_{B2} + c_{C5} + c_{D1} + c_{E4} = 10 + 7 + 9 + 0 + 0 = 26.$

Modu berean, laugarren eta bostgarren errenkadetan beste esleipen batzuk egin daitezke. Eman dugun lehen soluzio optimoan $A \to 3$, $B \to 1$, $C \to 5$,

$D \to 2$ eta $E \to 4$ esleipena egin beharrean $A \to 3$, $B \to 1$, $C \to 5$, $D \to 4$ eta $E \to 2$ egin daiteke. Eman dugun bigarren soluzio optimoan aldiz $A \to 3$, $B \to 2$, $C \to 5$, $D \to 1$, $E \to 4$ esleipena egin beharrean, $A \to 3$, $B \to 2$, $C \to 5$, $D \to 4$, $E \to 1$ egin daiteke. Dena den, D eta E gezurrezko lanpostuak izanik, praktikan langile berberak geratuko dira lanik gabe. $\square$