3. Kapitulua

Dualtasuna

Programazio linealaren teoriaren garapenean, dualtasuna kontzepturik garrantzitsuenetarikoa da, bai teorikoki eta bai ikuspuntu praktikotik ere. Eredu lineal bat izanik, dagokion eredu duala idatzi ahal izango da beti. Ikusiko dugun bezala, bi ereduetako bat ebatziz bietarako soluzioa lortuko da, ebatzitako ereduaren taula optimoan dagokion eredu dualaren soluzio optimoa ere agertuko baita. Dualtasuna kontuan hartzea komenigarria da; hona hemen arrazoi batzuk.

1. Simplex algoritmoaren iterazio kopurua eredu linealak duen aldagai kopuruaren mende baino murrizketen mende dagoela kontuan izanik, eta eredu lineal bat ebazterakoan dagokion eredu dualaren soluzio optimoa ere lortuko denez, ereduen artean ebatzia izango dena aukera daiteke bietarako soluzioa lortzeko.

2. Dualtasunak problema linealaren interpretazio ekonomikoa ahalbidetzen du. Ikusiko dugun bezala, eredu dualaren soluzioak eredu primalaren soluzioari buruzko informazioa ematen du.

3. Dualtasunaren propietateak kontuan hartuz, algoritmo berri bat sortu da, simplex dual algoritmoa, zenbait eredu lineal ebazteko simplex algoritmoa baino eraginkorragoa dena. Gainera, algoritmo berri hori erabiliko da aurrerago aztertuko ditugun sentikortasunaren analisian eta programazio osoan.

3.1 Problema duala

3.1.1 Definizioa. (Maximizatze-forma simetrikoa) *Eredu lineala* maximizatze-forma simetrikoan *dagoela esaten da baldin*

- *Helburua maximizatzea bada*
- *Murrizketa guztiak* $\leq$ *modukoak badira*
- *Aldagai guztiak ez-negatiboak badira*

Adibidea. Ondoko eredua maximizatze-forma simetrikoan idatziko dugu:

$$\begin{aligned} \max\ z \ =\ & x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \text{hauen mende} & \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Maximizatze-forma simetrikoa honakoa da:

$$\begin{aligned} \max\ z \ =\ & x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \text{hauen mende} & \\ & -x_1 - x_2 - x_3 \leq -2 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \leq -1 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

□

3.1.2 Definizioa. (Minimizatze-forma simetrikoa) *Eredu lineala* minimizatze-forma simetrikoan *dagoela esaten da baldin*

- *Helburua minimizatzea bada*
- *Murrizketa guztiak* $\geq$ *modukoak badira*
- *Aldagai guztiak ez-negatiboak badira*

Adibidea. Har dezagun honako eredu lineala:

$$
\begin{aligned}
\max\ z \ &= \ x_1 - x_2 \\
\text{hauen mende} & \\
3x_1 + 2x_2 &\le 1 \\
x_1 - 2x_2 &\ge 3 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Minimizatze-forma simetrikoa honakoa da:

$$
\begin{aligned}
\min\ (-z) \ &= \ -x_1 + x_2 \\
\text{hauen mende} & \\
-3x_1 - 2x_2 &\ge -1 \\
x_1 - 2x_2 &\ge 3 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

□

3.1.1 Primal-dual erlazioa

Har dezagun maximizatze-forma simetrikoan dagoen eredu lineala.

$$
\begin{aligned}
\max\ z \ &= \ \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{hauen mende} & \\
\mathbf{A}\mathbf{x} &\le \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Eredu horri *primal* deituko diogu. Bere *duala* minimizatze-forma simetrikoan dagoen ondoko eredu lineala da:

$$
\begin{aligned}
\min\ G \ &= \ \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\
\text{hauen mende} & \\
\mathbf{A}^T\mathbf{y} &\ge \mathbf{c} \\
\mathbf{y} &\ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Adibidea. Har dezagun honako eredu lineala.

$$\begin{aligned} \max\ z \ &= \ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{hauen mende} & \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leq 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dagokion eredu duala honakoa da:

$$\begin{aligned} \min\ G \ &= \ 2y_1 + y_2 \\ \text{hauen mende} & \\ y_1 + 3y_2 &\geq 2 \\ -y_1 - y_2 &\geq -1 \\ y_1 + 2y_2 &\geq 3 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

□

3.1.2 Eredu primalaren eta dualaren osagaiak

Eredu lineal bat, primala, eta dagokion eredu duala izanik, bi eredu horien osagaien artean ondoko erlazioa dago.

- Eredu primalaren $\mathbf{A}$ matrizea $m \times n$ tamainakoa bada, eredu primalak m murrizketa eta n aldagai ditu. Eredu dualaren koefiziente teknologikoen matrizea $\mathbf{A}^T$ da, eta ondorioz, eredu dualak n murrizketa eta m aldagai izango ditu.
- $\mathbf{b}$ bektorea problema primalaren baliabide-bektorea da eta problema dualaren kostuen bektorea.
- $\mathbf{c}$ bektorea problema primalaren kostu-bektorea da eta problema dualaren baliabide-bektorea.
- Problema primalak duen murrizketa kopurua eta problema dualak duen aldagai kopurua berdinak dira.
- Problema primalak duen aldagai kopurua eta problema dualak duen murrizketa kopurua berdinak dira.

3.1.3 Dualtasuna. Kasu orokorra

Oro har, ereduaren murrizketak $\leq$, $=$ edo $\geq$ modukoak izan daitezke. Dagokion eredu duala kalkulatzeko, eredua forma simetrikoan idatzi eta primal-dual erlazioa erabil daiteke. Dena den, forma simetrikoan idatzi gabe 3.1. Taula erabiliz, kalkula daiteke maximizatze-forma simetrikoan ez dagoen eredu baten duala.

Helburu funtzioa: max	$\Longleftrightarrow$	Helburu funtzioa: min
i. murrizketa $\leq b_i$ modukoa	$\Longleftrightarrow$	i. aldagaia ≥ 0
i. murrizketa $= b_i$ modukoa	$\Longleftrightarrow$	i. aldagaia ez-murriztua
i. murrizketa $\geq b_i$ modukoa	$\Longleftrightarrow$	i. aldagaia ≤ 0
i. aldagaia ≥ 0	$\Longleftrightarrow$	i. murrizketa $\geq b_i$ modukoa
i. aldagaia ez-murriztua	$\Longleftrightarrow$	i. murrizketa $= b_i$ modukoa
i. aldagaia ≤ 0	$\Longleftrightarrow$	i. murrizketa $\leq b_i$ modukoa

3.1. Taula: Primal-dual erlazioa

Atal honetan taulako erlazio batzuk frogatuko ditugu; gainerakoak modu berean froga daitezke.

1. kasua. Helburu funtzioa maximizatze-forman duen eredu lineal batean murrizketak $\geq$ modukoak badira, eredu dualaren aldagaiak zero baino txikiagoak edo berdinak dira (≤ 0, taulako hirugarren errenkadan adierazten den bezala). Hau da, eredu lineala:

$$\max\ z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

hauen mende

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

izanik, dagokion duala ondokoa da:

$$\min\ G = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$$

hauen mende

$$\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$
$$\mathbf{y} \leq \mathbf{0}$$

Froga. Hasteko, eredu primala maximizatze-forma simetrikoan idatziko dugu.

$$
\begin{aligned}
\max\ z \ &= \ \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{hauen mende} & \\
-\mathbf{A}\mathbf{x} &\leq -\mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Aurreko 3.1.1. atalean emandako primal-dual erlazioa erabiliz, duala kalkula dezakegu.

$$
\begin{aligned}
\min\ G \ &= \ -\mathbf{b}^T\mathbf{y} \\
\text{hauen mende} & \\
-\mathbf{A}^T\mathbf{y} &\geq \mathbf{c}^T \\
\mathbf{y} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$\mathbf{y} = -\mathbf{y}$ aldagai-aldaketa eginez, honela geratuko da eredua:

$$
\begin{aligned}
\min\ G \ &= \ \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\
\text{hauen mende} & \\
\mathbf{A}^T\mathbf{y} &\geq \mathbf{c}^T \\
\mathbf{y} &\leq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

□

2. **kasua.** Eredu primalaren murrizketak $=$ modukoak badira, dualaren aldagaiak ez daude zeinuz murriztuak (ez-murriztuak, taulako bigarren errenkadan adierazten den bezala). Hau da, eredu lineala

$$
\begin{aligned}
\max\ z \ &= \ \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{hauen mende} & \\
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

izanik, dagokion duala ondokoa da:

$$
\begin{aligned}
\min\ G \ &= \ \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\
\text{hauen mende} & \\
\mathbf{A}^T\mathbf{y} &\geq \mathbf{c} \\
\mathbf{y} &: \text{ez-murriztua}
\end{aligned}
$$

Froga. Idatz dezagun eredua maximizatze-forma simetrikoan.

$$\begin{aligned} \max\ z\ =\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{hauen mende} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} & \leq \mathbf{b} \\ -\mathbf{A}\mathbf{x} & \leq -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Dagokion eredu duala honakoa da:

$$\begin{aligned} \min\ G\ =\ & (\mathbf{b}^T,\ -\mathbf{b}^T)\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \\ \text{hauen mende} & \\ (\mathbf{A}^T,\ -\mathbf{A}^T)\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} & \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{u},\ \mathbf{v} & \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\mathbf{u}$ eta $\mathbf{v}$ bektoreek m osagai dituztelarik. Eredu duala beste modu honetan idatzia izan daiteke:

$$\begin{aligned} \min\ G\ =\ & \mathbf{b}^T(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ \text{hauen mende} & \\ \mathbf{A}^T(\mathbf{u}-\mathbf{v}) & \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{u},\mathbf{v} & \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\mathbf{y} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ aldagai-aldaketa eginez, honakoa lortuko da:

$$\begin{aligned} \min\ G\ =\ & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{hauen mende} & \\ \mathbf{A}^T\mathbf{y} & \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} & : \text{ez-murriztua} \end{aligned}$$

$\mathbf{y}$ bektorearen osagaiak ez daude zeinuz murriztuta, osagai bakoitza bi aldagai positiboren kenketa delako.

Adibidea. Izan bedi honako eredu primala.

$$\begin{aligned} \max\ z \ &= \ x_1 - 4x_2 - x_3 \\ \text{hauen mende} & \\ x_1 + x_2 - x_3 &\geq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &\leq 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 &: \text{ez-murriztua} \end{aligned}$$

3.1. Taulako erlazioak erabiliz, dagokion duala kalkulatuko dugu.

$$\begin{aligned} \min\ G \ &= \ 4y_1 + 2y_2 + 6y_3 \\ \text{hauen mende} & \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 &\leq 1 \\ y_1 + 3y_2 - y_3 &\geq -4 \\ -y_1 - 5y_2 + 2y_3 &= -1 \\ y_1 \leq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 &: \text{ez-murriztua} \end{aligned}$$

□

3.2 Dualtasunerako teoremak

Atal honetan aztertuko ditugun teoremek problema primalaren, dualaren eta beren soluzioen arteko erlazioak ezarriko dituzte. Teoremen enuntziatuak ereduen forma primal-dual simetrikoetarako ematen dira.

$$\begin{array}{rr} \underline{\text{Primala}} & \underline{\text{Duala}} \\ \max\ z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \min\ G = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{hauen mende} & \text{hauen mende} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} & \mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

3.2.1 Teorema. *Problema dualaren duala problema primala da.*

Froga. Har dezagun problema primala.

$$\begin{aligned} \min\ G\ &=\ \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{hauen mende} \\ \mathbf{A}^T\mathbf{y} &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Problemaren duala kalkulatzeko, eredua maximizatze-forma simetrikoan idatzi eta primal-dual erlazioa erabiliko dugu.

$$\begin{aligned} -\max\,(-G)\ &=\ -\mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{hauen mende} \\ -\mathbf{A}^T\mathbf{y} &\leq -\mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Dagokion duala honakoa da:

$$\begin{aligned} -\min\,(-z)\ &=\ -\mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{hauen mende} \\ -\mathbf{A}\mathbf{x} &\geq -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Beste forma baliokide honetan jarriz gero, daukagun problema primala dela ikusten dugu.

$$\begin{aligned} \max\ z\ &=\ \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{hauen mende} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

□

Aurreko teorematik hau ondoriozta daiteke: eredu primalaren helburua minimizatzea bada forma dual simetrikoan gertatzen den bezala, eredu dualaren helburua maximizatzea izango dela. Hori hala izanik, helburua minimizatzea duen eredu baten duala kalkulatzeko, 3.1. Taula erabil daiteke erlazioak eskuinetik ezkerrera irakurriz.

Adibidea. Izan bedi honako eredu primala:

$$
\begin{aligned}
\min\ z\ =\ & x_1 - 4x_2 - x_3 \\
\text{hauen mende} & \\
& x_1 + x_2 - x_3 \geq 4 \\
& 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2 \\
& 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\
& x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 : \text{ez-murriztua}
\end{aligned}
$$

3.1. Taula erabiliz, dagokion duala kalkulatuko dugu.

$$
\begin{aligned}
\max\ G\ =\ & 4y_1 + 2y_2 + 6y_3 \\
\text{hauen mende} & \\
& y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 1 \\
& y_1 + 3y_2 - y_3 \leq -4 \\
& -y_1 - 5y_2 + 2y_3 = -1 \\
& y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3 : \text{ez-murriztua}
\end{aligned}
$$

□

3.2.2 Teorema. (Dualtasun ahula) *Izan bitez* $\mathbf{x}$ *eta* $\mathbf{y}$ *problema primalaren eta dualaren soluzio bideragarriak, hurrenez hurren. Honakoa betetzen da:*

$$z\ =\ \mathbf{c}^T\mathbf{x}\ \leq\ \mathbf{b}^T\mathbf{y}\ =\ G.$$

Froga.

$\mathbf{x}$ primalaren soluzio bideragarria denez, $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ eta $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ betetzen dira.
$\mathbf{y}$ dualaren soluzio bideragarria denez, $\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ eta $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ betetzen dira.

$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ desberdintzaren bi atalak ezkerretik $\mathbf{y}^T$ bektoreaz biderkatuz, eta $\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ desberdintzarenak $\mathbf{x}^T$ bektoreaz, hau daukagu:

$$\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\ \leq\ \mathbf{y}^T\mathbf{b}\ =\ \mathbf{b}^T\mathbf{y}.$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{y}\ \geq\ \mathbf{x}^T\mathbf{c}\ =\ \mathbf{c}^T\mathbf{x}.$$

$\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{y}\ =\ \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ denez, hau beteko da:

$$z\ =\ \mathbf{c}^T\mathbf{x}\ \leq\ \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\ \leq\ \mathbf{b}^T\mathbf{y}\ =\ G.$$

□

Aurreko teorematik hau ondoriozta daiteke: helburu primalaren balio maximoa helburu dualaren balio minimorako behe-bornea da. Eta, alderantziz, helburu dualaren balio minimoa helburu primalaren balio maximorako goi-bornea da. Datozen emaitzak aurreko teoremen ondorioak dira.

3.2.1 Korolarioa. $\mathbf{x}^*$ *eta* $\mathbf{y}^*$ *soluzio bideragarriek* $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$ *betetzen badute,* $\mathbf{x}^*$ *eta* $\mathbf{y}^*$ *primalaren eta dualaren soluzio optimoak dira, hurrenez hurren.*

Froga. Dualtasun ahularen teoremak ziurtatzen du $\mathbf{x}$ eta $\mathbf{y}$ soluzioetarako honakoa beteko dela:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}.$$

$\mathbf{y}^*$ dualaren soluzioa hartzen badugu, $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$ betetzen da. $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$ betetzen denez, problema primalaren edozein $\mathbf{x}$ soluziotarako hau beteko da:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*.$$

Hortik ondoriozta daiteke $\mathbf{x}^*$ problema primalaren soluzio optimoa dela.

Modu berean, eta $\mathbf{b}^T\mathbf{y}^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}$ betetzen denez, problema dualaren edozein $\mathbf{y}$ soluziotarako hau beteko da:

$$\mathbf{b}^T\mathbf{y}^* \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}.$$

Hortik ondoriozta daiteke $\mathbf{y}^*$ problema dualaren soluzio optimoa dela. □

3.2.2 Korolarioa. *Problema primala bideragarria eta bornegabea bada, duala bideraezina da.*

Froga. Edozein $\mathbf{x}$ eta $\mathbf{y}$ soluziok $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}$ betetzen dutela kontuan izanik, helburu primala bornegabea bada, ez da existitzen problema primalaren goi-borne izango den dualaren $\mathbf{y}$ soluziorik.

Modu berean ondorioztatuko da ondoko emaitza.

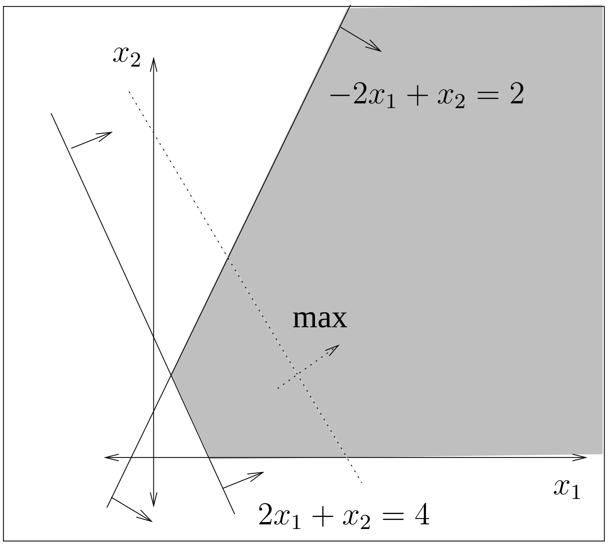
3.2.3 Korolarioa. *Problema duala bideragarria eta bornegabea bada, primala bideraezina da.*

Problema primala bideraezina bada, duala bideraezina edo bornegabea izan daiteke. Eta, problema duala bideraezina bada, primala bideraezina edo bornegabea izan daiteke.

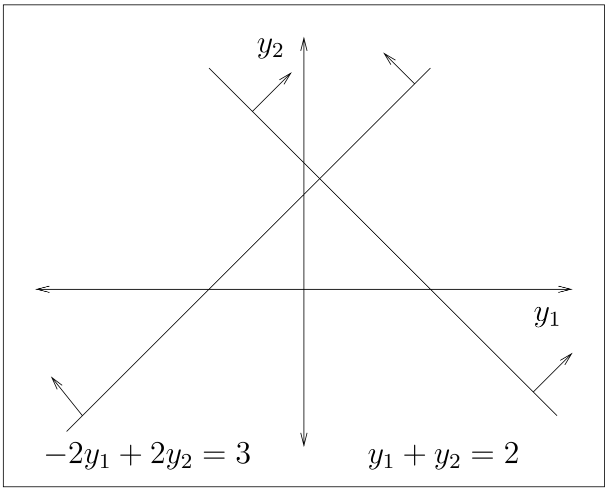
Adibidea. Honako problema primalerako eta dualerako 3.2.2. Korolarioa betetzen dela ikus daiteke. Kasu honetan primala bornegabea da eta duala bideraezina.

$$\begin{array}{rr} \max\ z = 3x_1 + 2x_2 & \min\ G = 2y_1 + 4y_2 \\ \text{hauen mende} & \text{hauen mende} \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 & -2y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 & y_1 + y_2 \geq 2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 & y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0 \end{array}$$

Problema primalaren ebazpen grafikoan bornegabea dela ikus daiteke.



Dualaren bideragarritasun eskualdean ez dago punturik; bideraezina da.



□

3.2.3 Teorema. (Dualtasunaren funtsezko printzipioa) *Problema primalaren* $\mathbf{x}^*$ *soluzio optimoa existitzen bada, problema dualaren* $\mathbf{y}^*$ *soluzio optimoa existitzen da. Modu berean, problema dualaren* $\mathbf{y}^*$ *soluzio optimoa existitzen bada, problema primalaren* $\mathbf{x}^*$ *soluzio optimoa existitzen da. Bi kasuetan* $z^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^* = G^*$ *betetzen da.*

Adibidea. Har ditzagun ondoko problema primala eta duala:

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2 \qquad\qquad \min\ G = 2y_1 + 3y_2 + 5y_3$$

hauen mende hauen mende

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 2 \\ y_1 - y_2 + 3y_3 &\geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Primalaren eta dualaren edozein bi soluzio hartuta $z \leq G$ betetzen da. Adibidez, $\mathbf{x}^T = (1,\ 1)$ primalaren soluzio bideragarria da murrizketak betetzen dituelako, eta $\mathbf{y}^T = (1,\ 1,\ 1)$ dualaren soluzio bideragarria da; $z = 5 \leq 10 = G$ betetzen da.

Problema primalaren eta dualaren soluzio optimoak hauek dira:

$$\mathbf{x}^{*T} = (\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}), \quad \mathbf{y}^{*T} = (\frac{3}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}).$$

Bi problemetarako helburu funtzioek balio bera hartuko dute soluzio optimoan, $z^* = \frac{11}{2} = G^*$. □

3.3 Osagarrizko nasaitasunaren baldintzak

Osagarrizko nasaitasunaren baldintzei esker, primalaren soluzio optimotik abiatuz dualaren soluzio optimoa kalkula daiteke, eta alderantziz. Baldintza horiek teorema honen ondorioak dira.

3.3.1 Teorema. (Osagarrizko nasaitasunarena) $\mathbf{x}^*$ *eta* $\mathbf{y}^*$ *problema primalaren eta dualaren soluzio bideragarriak izanik, hurrenez hurren, optimoak izango dira baldin ondoko baldintza betetzen badute:*

$$\mathbf{x}^{*T}(\mathbf{A}^T\mathbf{y}^* - \mathbf{c}) + \mathbf{y}^{*T}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) = 0.$$

Emaitza horren interpretaziotik lortuko dira osagarrizko nasaitasunaren baldintzak. Gogora dezagun ereduak primal-dual forma simetrikoan daudela.

3.3.1 Osagarrizko nasaitasunaren baldintzen interpretazioa

$\mathbf{x}^*$ eta $\mathbf{y}^*$ primalaren eta dualaren soluzio optimoak izanik, hurrenez hurren, bi problemen murrizketak honela idatz daitezke:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^* &\geq 0. \\ \mathbf{A}^T\mathbf{y}^* - \mathbf{c} &\geq 0. \end{aligned}$$

Bestalde, $\mathbf{x}^*$ eta $\mathbf{y}^*$ primalaren eta dualaren soluzio optimoak osagai negatiborik gabeko bektoreak dira. Ondorioz, aurreko desberdintzaren bi atalak $\mathbf{y}^{*T}$ eta $\mathbf{x}^{*T}$ bektoreez ezkerretik biderkatzen baditugu, hurrenez hurren, desberdintzak honela geratuko dira:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{*T}(\mathbf{A}^T\mathbf{y}^* - \mathbf{c}) &\geq 0. \\ \mathbf{y}^{*T}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) &\geq 0. \end{aligned}$$

Osagarrizko nasaitasunaren teoremak ziurtatzen du aurreko bi desberdintzen ezkerreko atalen batura zero dela. Bi batugaiak zero baino handiagoak edo berdinak direla kontuan izanik, ondoriozta daiteke biek zero izan behar dutela, hau da,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{*T}(\mathbf{A}^T\mathbf{y}^* - \mathbf{c}) &= 0. \\ \mathbf{y}^{*T}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) &= 0. \end{aligned}$$

Aurreko bi ekuazioen arabera, bi biderkagai ez-negatiboren biderkadura zero da; biderkagaietako bat ez bada zero, besteak izan beharko du. Horrela, problema baten soluzioa ezagututa beste problemaren soluzioa kalkulatzea ahalbidetuko duten ondoko ondorioak lortuko dira.

1. Aldagai primal bat hertsiki positiboa bada, dagokion murrizketa duala berdintzaz betetzen da; ez du nasaitze-aldagai positiborik behar, hau da,
$$\mathbf{x}^* > \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^T\mathbf{y}^* - \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$
2. Primalaren murrizketa bat ez bada berdintzaz betetzen, dagokion aldagai dualak zero balioa hartuko du, hau da,
$$\mathbf{A}\mathbf{x}^* < \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{y}^* = \mathbf{0}.$$
3. Aldagai dual bat hertsiki positiboa bada, dagokion murrizketa primala berdintzaz betetzen da, hau da,
$$\mathbf{y}^* > \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$
4. Dualaren murrizketa bat ez bada berdintzaz betetzen, dagokion aldagai primalak zero balioa hartuko du, hau da,
$$\mathbf{A}^T\mathbf{y}^* > \mathbf{c} \;\Rightarrow\; \mathbf{x}^* = \mathbf{0}.$$

Adibidea. Har dezagun ondoko problema lineala:

$$\begin{aligned} \max\ z = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \text{hauen mende} \qquad\qquad \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Problemaren soluzio optimoa $\mathbf{x}^{*T} = (\frac{13}{5},\ \frac{6}{5},\ 0)$ dela jakinda, osagarrizko nasaitasunaren teorema erabiliko dugu dualaren soluzio optimoa kalkulatzeko. Problema duala honakoa da:

$$\begin{aligned} \min\ G \ = \ 5y_1 + 4y_2 \\ \text{hauen mende} \qquad\qquad \\ y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ 2y_1 - y_2 \geq 1 \\ y_1 + 3y_2 \geq -2 \\ y_1,\ y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Nasaitze-aldagaiak kenduz, honela geratuko da:

$$\min\ G = 5y_1 + 4y_2 + 0y_3 + 0y_4 + 0y_5$$

hauen mende

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 \quad -y_3 \qquad\qquad\qquad &= 3 \\ 2y_1 - y_2 \qquad\qquad -y_4 \qquad\qquad &= 1 \\ y_1 + 3y_2 \qquad\qquad\qquad\qquad -y_5 \quad &= -2 \\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Osagarrizko nasaitasunaren teoremaren ondorioak erabiliz, problema dualaren soluzio optimoa kalkulatuko dugu.

Primalaren aldagaiak		Dualaren murrizketak
$x_1^* = \frac{13}{5} > 0$	$\Rightarrow$	$y_1^* + 2y_2^* = 3 \ \Rightarrow\ y_3^* = 0$
$x_2^* = \frac{6}{5} > 0$	$\Rightarrow$	$2y_1^* - y_2^* = 1 \ \Rightarrow\ y_4^* = 0$
$x_3^* = 0$	$\Rightarrow$	$y_1^* + 3y_2^* - y_5^* = -2$
Primalaren murrizketak		Dualaren aldagaiak
$\frac{13}{5} + 2 \times \frac{6}{5} = 5$	$\Rightarrow$	y_1^* aldagaiaren balioa kalkulatu
$2 \times \frac{13}{5} - \frac{6}{5} = 4$	$\Rightarrow$	y_2^* aldagaiaren balioa kalkulatu

Dualaren murrizketen sisteman y_3^* eta y_4^* nasaitze-aldagaien zero balioak ordezkatuz, sistema honela geratuko da:

$$\begin{aligned} y_1^* + 2y_2^* &= 3 \\ 2y_1^* - y_2^* &= 1 \\ y_1^* + 3y_2^* - y_5^* &= -2 \end{aligned}$$

Ekuazio-sistema ebatziz, eredu dualaren soluzio optimoa lortuko da.

$$y_1^* = 1,\ y_2^* = 1,\ y_3^* = 0,\ y_4^* = 0,\ y_5^* = 6.$$

□

3.4 Soluzio dual optimoa

3.4.1 Teorema. *Izan bitez bi eredu lineal primal-dual simetrikoak.* $\mathbf{B}$ *problema primalaren oinarri optimoa bada,* $\mathbf{y}^{*T} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ *problema dualaren soluzio optimoa da.*

Froga. Forma simetriko primalari nasaitze-aldagaien $\mathbf{x}_h$ bektorea gehituz, murrizketak honela geratuko dira:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{x}_h &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x}, \mathbf{x}_h &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\mathbf{B}$ primalaren oinarri optimoa bada, eta $\mathbf{x}_B$ oinarriko soluzio bideragarri optimoa, $\mathbf{A}$ matrizeko $\mathbf{a}_j$ bektore guztietarako $z_j - c_j \geq 0$ betetzen da.

$$z_j \;=\; \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_j \;=\; \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j.$$

$\mathbf{B}$ oinarri optimoa denez, $z_j \geq c_j$ betetzen da $\mathbf{A}$ matrizeko $\mathbf{a}_j$ bektore guztietarako, hau da,

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T.$$

Aurreko desberdintzaren atalak irauliz dualaren murrizketen sistema lortuko da:

$$\mathbf{A}^T (\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1})^T \geq \mathbf{c}.$$

Hortaz, $\mathbf{y}^* = (\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1})^T$ dualaren soluzioa da.

Bideragarria den edo ez egiaztatzeko, $\mathbf{I}$ matrizeko bektoreei dagozkien balio adierazleak kalkulatuko ditugu.

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{I} \geq \mathbf{c}_I^T.$$

$\mathbf{x}_h$ bektoreko aldagaiak nasaitze-aldagaiak direnez, $\mathbf{c}_I = \mathbf{0}$ da eta hau beteko da:

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{I} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \geq \mathbf{0}^T.$$

Ondorioz, $\mathbf{y}^* = (\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1})^T$ bektorearen osagaiak ez-negatiboak dira.

$\mathbf{y}^*$ optimoa dela egiaztatuko dugu orain, primalaren helburu funtzioaren balioa eta dualarena soluzio horretan berdinak direla egiaztatuz.

$$z^* = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{b}^T (\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1})^T = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = G^*.$$

Bi problemen helburu funtzioaren balioa bera denez, $\mathbf{y}^* = (\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1})^T$ dualaren soluzio optimoa dela frogatuta geratuko da. □

3.4.1 Soluzio dual optimoa taulan

Ikus dezagun problema primal bat ebazterakoan, taula optimoan problema dualaren optimoa ere lortzen dela.

3.4.1 Teoreman frogatu dugu problema primalaren oinarri optimoa $\mathbf{B}$ bada, eredu dualaren soluzio optimoa $\mathbf{y}^{*T} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ dela. Ikusiko dugu bektore hori taula optimoan agertzen dela, $z_j - c_j$ balioen errenkadan, eta hasierako $\mathbf{I}$ matrizeko $\mathbf{a}_j$ bektoreei dagozkien zutabeetan.

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j.$$

$\mathbf{I}$ matrizeko bektore guztiei dagozkien $z_j - c_j$ balio adierazleak batera kalkulatzen baditugu, honako bektorea lortuko dugu:

$$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{c}_I^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{c}_I^T.$$

Hortaz, dualaren soluzio optimoa den $\mathbf{y}^{*T} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ bektorea kalkulatzeko, hasierako taulako identitate matrizeari dagozkion zutabeetan taula optimoan dauden balio adierazleei $\mathbf{c}_I^T$ gehitu besterik ez da egin behar. Bi kasu gerta daitezke.

- $\mathbf{I}$ matrizea nasaitze-aldagaiez osaturik badago, $\mathbf{c}_I = \mathbf{0}$ da.
- Hasierako $\mathbf{I}$ oinarrian aldagai artifizialak badaude, helburu funtzioa zigortzeko erabili diren aldagai artifizialen M balioak daude $\mathbf{c}_I$ bektorean.

Adibidea. 101. orrialdeko problema har dezagun.

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \text{hauen mende} & \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nasaitze-aldagaiak gehitu ondoren, hasierako taula eraikiko da.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	-3	-1	2	0	0	0
$\mathbf{a}_4$	1	2	1	1	0	5
$\mathbf{a}_5$	2	-1	3	0	1	4

Simplex algoritmoa aplikatuz, honako taula optimoa lortuko da:

$$
\begin{array}{c|ccc|cc|c|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\cline{2-7}
 & 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 9 \\
\hline
\mathbf{a}_2 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\
\mathbf{a}_1 & 1 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\
\hline
\end{array}
$$

Primalaren soluzio optimoa honakoa da:

$$x_1^* = \frac{13}{5},\ x_2^* = \frac{6}{5},\ x_3^* = 0,\ z^* = 9.$$

Kalkula dezagun dualaren soluzio optimoa primalaren taula optimotik abiatuz. Hasierako oinarria, $\mathbf{B} = \mathbf{I} = (\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5)$, nasaitze-aldagaiez osaturik dago. Taula optimoan, x_4 eta x_5 aldagaiei dagozkien zutabeetan dago $\mathbf{B}^{-1}$ eta dualaren soluzio optimoa aldagai horiei dagozkien balio adierazleetan bilatu behar da.

$$(z_4 - c_4, z_5 - c_5) = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{c}_I^T = (1,\ 1) - \mathbf{c}_I^T.$$

$\mathbf{c}_I^T = (c_4\ ,\ c_5) = (0,\ 0)$ denez, problema dualaren soluzio optimoa honakoa da:

$$\mathbf{y}^{*T} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1} = (1,\ 1).$$

Problema dualaren helburu funtzioaren balioa $G^* = 9$ da. □

Adibidea. Har dezagun honako eredu lineala.

$$
\begin{array}{rl}
\min\ z = & x_1 + 2x_2 \\
\text{hauen mende} & \\
& 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\
& x_1 + 3x_2 \geq 6 \\
& 2x_1 + x_2 \geq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Simplex algoritmoa aplikatzen hasteko, nasaitze-aldagaiak gehitzeaz gain, bi aldagai artifizial gehitu behar dira, w_1 eta w_2.

$$
\begin{aligned}
\max\,(-z) \;&=\; -x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mw_1 - Mw_2 \\
&\text{hauen mende} \\
&4x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\
&x_1 + 3x_2 - x_4 + w_1 = 6 \\
&2x_1 + x_2 - x_5 + w_2 = 4 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, w_1, w_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Hasierako oinarria $\mathbf{B} = \mathbf{I} = (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_{w1}, \mathbf{a}_{w2})$ da.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	w_2		
		$-3M+1$	$-4M+2$	0	M	M	0	0	$-10M$	
0	$\mathbf{a}_3$	4	3	1	0	0	0	0	12	1
$-M$	$\mathbf{a}_{w1}$	1	$\boxed{3}$	0	-1	0	1	0	6	
$-M$	$\mathbf{a}_{w2}$	2	1	0	0	-1	0	1	4	$\frac{1}{3}$
		$-\frac{5}{3}M+\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}M+\frac{2}{3}$	M	$\frac{4}{3}M-\frac{2}{3}$	0	$-2M-4$	
0	$\mathbf{a}_3$	3	0	1	1	0	-1	0	6	$\frac{9}{5}$
-2	$\mathbf{a}_2$	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	2	$\frac{1}{5}$
$-M$	$\mathbf{a}_{w2}$	$\boxed{\frac{5}{3}}$	0	0	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	1	2	
		0	0	$\boxed{0}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\boxed{M-\frac{3}{5}}$	$\boxed{M-\frac{1}{5}}$	$-\frac{22}{5}$	
0	$\mathbf{a}_3$	0	0	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$\frac{12}{5}$	
-2	$\mathbf{a}_2$	0	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$	
-1	$\mathbf{a}_1$	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$	

Problema primalaren soluzio optimoa honakoa da:

$$x_1^* = \frac{6}{5}\;,\quad x_2^* = \frac{8}{5}\;,\quad -z^* = -\frac{22}{5} \qquad \Rightarrow \qquad z^* = \frac{22}{5}.$$

Kalkula dezagun dualaren soluzio optimoa primalaren taula optimotik abiatuz. Hasierako taulan, x_3, w_1 eta w_2 aldagaiei dagozkien zutabeetan dago identitate matrizea. Taula optimoan, zutabe horietan berberetan dago $\mathbf{B}^{-1}$ eta dualaren soluzio optimoa zutabe horietako balio adierazleetan bilatu behar da.

$$(z_3 - c_3,\ z_{w_1} - c_{w_1},\ z_{w_2} - c_{w_2}) = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{c}_I^T = (0,\ M - \frac{3}{5},\ M - \frac{1}{5}).$$

$\mathbf{c}_I^T = (c_3\ ,\ c_{w_1},\ c_{w_2}) = (0,\ -M,\ -M)$ dela kontuan izanik,

$$\mathbf{y}^{*T} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{c}_I^T + \mathbf{c}_I^T = (0,\ M - \frac{3}{5},\ M - \frac{1}{5}) + (0,\ -M,\ -M).$$

Hasiera batean, problema dualaren soluzio optimoa hau dela esan genezake:

$$\mathbf{y}^{*T} = (0, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}).$$

Hala ere, aldagaien zeinua zuzena den edo ez egiaztatu behar da. Adibideko problemari dagokion duala kalkulatzen badugu, y_2 eta y_3 aldagaiek ez-negatibo izan behar dutela ikusten da. Kasu honetan, aldagai horietarako taulatik lortu ditugun balioak negatiboak dira. Horren arrazoia hau da: simplex algoritmoa aplikatu ahal izateko ereduaren helburu funtzioari egindako aldaketak eragina sortzen duela taulako balio adierazleen errenkadan. Adibide honetan, hasierako helburua minimizatzea da eta maximizatzera egokitu dugu; horregatik ez dira zuzenak aldagaietarako zeinuak. Hortaz, problema dualaren soluzio optimoa honakoa da:

$$y_1^* = 0, \quad y_2^* = \frac{3}{5}, \quad y_3^* = \frac{1}{5}, \qquad G^* = \frac{22}{5}.$$

□

Simplex algoritmoa aplikatzen hasi baino lehen, ereduaren murrizketaren baten noranzkoa aldatzeak aldagai dualei egokituko zaien taulako balioren baten zeinua okerra izatea eragingo du. 91. orrialdeko 3.1. Taulako primal-dual erlazioak aztertuz azaldu daiteke zeinuak aldatzearen arrazoia. Baiezta daiteke $\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ bektorearen osagaien balio absolutuak bat datozela aldagai dual optimoen balio absolutuekin.

3.5 Dualtasunaren interpretazio ekonomikoa

Eredu lineal baten soluzio optimoak mugatuta dauden baliabideen esleipen optimoa zehazten du. Ikusiko dugun bezala, aldagai dualen balio optimoek baliabideen kopurua aldatzea komeni den ala ez adierazten dute. Informazio hori ondoko atalean aztertuko ditugun itzal-prezioek ematen dute.

3.5.1 Itzal-prezioak

Izan bedi eredu lineal bat, eta $\mathbf{B}$ oinarri optimoa. Oinarri optimo horri problema primalaren $\mathbf{x}^*$ soluzio optimoa eta z^* balio optimoa dagozkio, baita dualaren $\mathbf{y}^*$ soluzio optimoa eta G^* balio optimoa ere.

Demagun $\mathbf{b}$ baliabide-bektorea $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ izatera aldatzen dela. Ikus dezagun aldaketa horrek zein eragin sortzen duen $\mathbf{B}$ oinarriari dagokion taulako kalkuluen gain, bideragarritasun primala galtzen ez bada.

- Oinarri optimoari eta baliabide-bektore berriari dagokien soluzio primala honakoa da:
$$\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) = \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b}.$$

- Baliabide-bektorearen aldaketak ez du eraginik sortuko balio adierazleen errenkadan.
$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j.$$

- Helburu funtzio primalaren eta dualaren balioak aldatu egiten dira, baliabide-bektorearen gehikuntzaren arabera.

$$\hat{G}^* = \mathbf{y}^{*T}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) = \mathbf{y}^{*T}\mathbf{b} + \mathbf{y}^{*T}\Delta\mathbf{b} = G^* + \mathbf{y}^{*T}\Delta\mathbf{b} = z^* + \mathbf{y}^{*T}\Delta\mathbf{b}.$$

Ondorioz, bideragarritasun primalaren galera eragiten ez duen $\mathbf{b}$ baliabide-bektorearen aldaketak problemaren soluzioan ondoko aldaketak eragiten ditu:

- Dualaren soluzio optimoaren osagaiak mantendu egiten dira.

- Primalaren soluzioaren osagaiak aldatu egiten dira $\mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b}$ kantitatea.

- Helburu funtzio primalaren eta dualaren balioa $\mathbf{y}^{*T}\Delta\mathbf{b}$ kantitatea aldatuko dira.

Laburbilduz, baliabide-bektorea aldatu eta $\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) \geq 0$ betetzen bada, $\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B$ problema primalaren soluzio optimoa da eta dualaren y^* soluzioak optimo izaten jarraituko du. Bi helburuen balio optimoa $\mathbf{y}^{*T}\Delta\mathbf{b}$ kantitatea handituko da.

Aldagai dual bakoitzaren esanahia interpretatu ahal izateko, demagun $\Delta b_i = 1$ dela eta gainerakoak zero direla. Orduan, helburuaren gehikuntza honakoa da:

$$\mathbf{y}^{*T}\Delta\mathbf{b} = (y_1^*,\ \ldots,\ y_i^*,\ \ldots,\ y_m^*)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = y_i^*.$$

Hau da, i. baliabidea unitate bat handitzen bada eta gainerako baliabideak bere horretan mantentzen badira, y_i^* aldagai dualaren balio optimoak helburu funtzioaren balioaren gehikuntza adierazten du.

3.5.1 Definizioa. (Itzal-prezioa) y_i^*, $i = 1, \ldots,\ m$, *aldagai dual optimoa* i. *baliabidearen itzal-prezioa dela esaten da, baldin* i. *baliabidean unitate bateko aldaketa egitean eta gainerako baliabideak bere horretan mantentzean ez bada bideragarritasun primala galtzen.*

Adibidea. Har dezagun 104. orrialdeko adibidea, eta ikus dezagun ea dualaren soluzio optimo diren $y_1^* = 1$ eta $y_2^* = 1$ balioak b_1 eta b_2 baliabideen itzal-prezioak diren.

- $b_1 = 5$ balioa $b_1 + \Delta b_1 = 6$ balioaz ordezkatuz gero, hau da, $\Delta b_1 = 1$,

$$\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{\Delta b}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix}$$

  Ez da bideragarritasun primala galdu, $\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B \geq \mathbf{0}$ betetzen delako. Esan dezakegu b_1 baliabidearen itzal-prezioa y_1^* dela. Helburu funtzioaren balio optimo berria honakoa da:

$$\hat{z}^* = z^* + y_1^* = 9 + 1 = 10.$$

- b_2 baliabiderako interpretazio bera egingo dugu. Kasu honetan, demagun $b_2 = 4$ balioa $b_2 + \Delta b_2 = 3$ balioaz ordezkatzen dugula.

$$\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{\Delta b}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix}$$

Ez da bideragarritasun primala galdu, $\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B \geq 0$ betetzen delako. Esan dezakegu b_2 baliabidearen itzal-prezioa y_2^* dela. Helburu funtzioaren balio optimo berria honakoa da:

$$\hat{z}^* = z^* - y_2^* = 9 - 1 = 8.$$

Kasu honetan, helburu funtzioaren balio optimoa y_2^* itzal-prezioak adierazi adina txikituko da, bigarren baliabidearen gehikuntza negatiboa delako.

□

Adibidea. Har dezagun 105. orrialdeko adibidea. Problema dualaren soluzio optimoa honakoa da:

$$y_1^* = 0\ ,\ y_2^* = \frac{3}{5}\ ,\ y_3^* = \frac{1}{5}.$$

Demagun lehenengo baliabidearen kopurua unitate bat handitzen dela, $b_1 = 12$ izatetik $b_1 + \Delta b_1 = 13$ izatera pasatzen dela.

$$\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} \\ \frac{8}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} \geq 0.$$

Bideragarritasun primala mantendu egiten denez, y_1^* aldagaia lehenengo baliabidearen itzal-prezioa dela esan dezakegu. Dena den, helburu funtzioaren balioa ez dela aldatuko ikusten dugu, itzal-prezioa $y_1^* = 0$ delako.

$$\hat{z}^* = z^* + y_1^* = \frac{22}{5} + 0 = \frac{22}{5}.$$

Lehenengo baliabidearen itzal-prezioa zero dela ikustearekin batera, hau egiazta daiteke: eredu primalaren lehenengo murrizketa desberdintzaz betetzen dela. Ordezka ditzagun $x_1^* = \frac{6}{5}$, $x_2^* = \frac{8}{5}$ balio optimoak $4x_1 + 3x_2 \leq 12$ murrizketan:

$$4 \times \frac{6}{5} + 3 \times \frac{8}{5} < 12.$$

Horrek esan nahi du lehenengo baliabidea kantitate handiegian dagoela, eta ondorioz, lehenengo baliabidearen kantitatea handitzeak ez du inolako eraginik sortuko helburu funtzioaren balio optimoan. Kasu honetan, baliabide horren kantitatea txikitzearen aukera aztertu beharko genuke. □

3.5.2 Aldagai primalen kostu ekonomikoa eta simplex metodoaren interpretazioa

Primalaren aldagaien kostu ekonomikoa ulertzeko modu erraz bat adibide baten bidez aztertzea da.

Enpresa batean lau produktu mota ekoizten dira: 1, 2, 3 eta 4. Produktuen ekoizpenean hiru baliabide erabiliko dira: A, B eta C. Produktu unitate bakoitzaren ekoizpenerako behar diren baliabideen kantitateak, baliabideen erabilgarritasuna eta produktu unitate bakoitzetik lortuko den irabazia ondoko taulan adierazten dira:

	Produktuak				Baliabide
Baliabidea	1	2	3	4	erabilgarria
A	2	3	$\frac{3}{2}$	4	300
B	2	4	3	1	500
C	5	1	2	2	250
Irabazia	4	3	6	2	

Izan bedi x_j: ekoitziko den j produktu unitate kopurua, $j = 1, 2, 3, 4$. Ekoizpen-problema adierazteko ondoko eredu lineala plantea dezakegu:

$$\max\ z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4$$

hauen mende

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 4x_4 &\leq 300 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 500 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\leq 250 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Demagun orain enpresa lehiakide batek $b_1 = 300$, $b_2 = 500$ eta $b_3 = 250$ baliabideak erosi nahi dizkiola. Bigarren enpresa horren helburua baliabideak ahalik eta kosturik txikienean lortzea da; A, B eta C baliabideen unitate bakoitzagatik y_1, y_2 eta y_3 aldagaiek adierazitako prezioa ordaintzen badu, hurrenez hurren, helburua honakoa izango da:

$$\min\ G = 300y_1 + 500y_2 + 250y_3$$

Pentsa dezakegu lehenengo enpresak baliabideen erabilpenetik lortutakoa (irabazia) baino txikiagoa izango den prezioan (kostu ekonomikoan) ez dizkiola salduko bigarrenari.

1 produktuaren unitate bat ekoizteko, lehenengo enpresak 2 unitate A baliabide, 2 unitate B baliabide eta 5 unitate C baliabide erabiliko ditu, eta ekoizpenetik lortuko duen irabazia 4 unitatekoa da. Baliabideen unitate horiek bigarren enpresari saltzen badizkio, $2y_1 + 2y_2 + 5y_3$ unitateko irabazia lortuko du; hori da 1 jardueraren kostu ekonomikoa. Hortaz, enpresa baliabideak bigarren enpresari saltzeko prest egongo litzateke jarduera aurrera eramateak sortutako kostu ekonomikoa irabazia baino handiagoa balitz, hau da, ondoko murrizketa beteko balitz (eredu dualaren lehenengo murrizketa).

$$2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geq 4$$

Beste hiru produktuetarako interpretazio bera eginez, ekoizpen-problemari dagokion eredu duala lortuko dugu.

$$\begin{aligned}
\min\ G &= 300y_1 + 500y_2 + 250y_3 \\
\text{hauen mende} & \\
2y_1 + 2y_2 + 5y_3 &\geq 4 \\
3y_1 + 4y_2 + y_3 &\geq 3 \\
\frac{3}{2}y_1 + 3y_2 + 2y_3 &\geq 6 \\
4y_1 + y_2 + 2y_3 &\geq 2 \\
y_1, y_2, y_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Simplex algoritmoan, oinarrikoa ez den x_j aldagai bat oinarriko izatera pasa daiteke algoritmoaren hurrengo iterazio batean, bere $z_j - c_j$ balio adierazlea negatiboa bada. Baldintza horren arrazoia da x_j aldagaiaren balio adierazlea problema dualaren j. murrizketa dela; balio adierazlea negatiboa denean, j. jardueraren kostu ekonomikoa lortutako irabazia baino txikiagoa da, ekoizpena errentagarria gertatzen delarik. Arrazonamendu hori ondoko formuletan ikus daiteke:

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j = \mathbf{y}^T \mathbf{a}_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j.$$

Ondorioz, baldin $z_j - c_j < 0$ betetzen bada,

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i < c_j.$$

Hau da, j. jardueraren kostu ekonomikoa jardueraren ekoizpenari dagokion c_j irabazia baino txikiagoa da.

3.6 Simplex dual metodoa

2. Kapituluan ikusi dugunez, simplex algoritmoa aplikatzean soluzio primal bideragarri bat kalkulatzeko, hasierako oinarri moduan identitate matrizea aukeratuko da, behar izanez gero aldagai artifizialak erabiliko direlarik. Algoritmoaren ondoz ondoko iterazioetan oinarriko soluzio bideragarri batetik beste oinarriko soluzio bideragarri batera pasako da optimoa lortuko den arte, hau da, taulan $z_j - c_j \geq 0$ beteko den arte $\mathbf{A}$ matrizeko $\mathbf{a}_j$ bektore guztietarako. Baldintza hori eredu dualaren bideragarritasunarekin erlazionatuta dago. Hau da, simplex algoritmoa soluzio primal bideragarri batean hasten da eta dualarentzako bideragarritasuna lortzen denean amaituko da. Metodo horri *simplex primal* deituko diogu aurrerantzean.

Atal honetan *simplex dual* algoritmoa aurkeztuko dugu. Algoritmo hau ere hasierako oinarri moduan $\mathbf{I}$ matrizea aukeratuz hasten da, eta nasaitze-aldagaiez osaturik egongo da beti. Lehen urratsa eredu lineala maximizatze-forma simetrikoan idaztea eta murrizketa bakoitzean nasaitze-aldagai bat gehitzea da. Hasierako taulan bideragarritasun duala badago, beharrezko diren iterazio guztiak egingo dira bideragarritasun primala ere lortuko den arte (problemak soluziorik badu). Hasierako taulan hasierako oinarria horrela aukeratuz ez badago bideragarritasun dualik, ereduari murrizketa artifizial bat gehitzea beharrezkoa izango da, 3.7 atalean ikusiko dugun bezala.

3.6.1 Simplex dual algoritmoa

Helburua maximizatzea da. Hasierako $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ oinarria nasaitze-aldagaiez osatutako matrizea izango da.

1. **urratsa.** Hasierako taula eraiki, non $z_j - c_j \geq 0$ beteko den $\mathbf{A}$ matrizeko $\mathbf{a}_j$ bektore guztietarako.

2. **urratsa.** Bideragarritasun primalarekiko bi kasu gerta daitezke.

   - $x_{Bi} \geq 0, \; i = 1, \ldots, m$, bada, **soluzioa optimoa** da. Amaitu.
   - Existitzen bada $x_{Bi} < 0$, soluzioa hobe daiteke. 3. urratsera joan.

3. **urratsa.** Oinarri aldaketa.

- Ondoko baldintza betetzen duen $\mathbf{a}_r$ bektorea irtengo da oinarritik.

$$x_{Br} \;=\; \min_i \{\, x_{Bi} \;/\; x_{Bi} < 0 \,\}$$

  r. errenkada pibot-errenkada da.

- Ondoko baldintza betetzen duen $\mathbf{a}_k$ bektorea sartuko da oinarrian.

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} \;=\; \max_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \;/\; y_{rj} < 0 \right\}$$

  k. zutabea pibot-zutabea da. y_{rk} elementua pibota da.

y_{rj}, $j = 1, \ldots, n$, negatiborik ez bada existitzen, **problema bideraezina** da. Amaitu.

4. urratsa. Taula berria kalkulatu simplex algoritmoan definitu diren oinarrizko eragiketa berberen bidez. 2. urratsera joan.

Adibidea. Izan bedi honako eredu lineala:

$$\begin{aligned} \min\ z \;=\; & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{hauen mende} & \\ x_1 + 2x_2 & \geq 3 \\ -2x_1 + x_2 & \geq 2 \\ x_1 + 4x_2 & \geq 7 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

Eredua maximizatze-forma simetrikoan idatziko dugu simplex dual algoritmoa aplikatu aurretik.

$$\begin{aligned} \max\,(-z) \;=\; & -3x_1 - 2x_2 \\ \text{hauen mende} & \\ -x_1 - 2x_2 & \leq -3 \\ 2x_1 - x_2 & \leq -2 \\ -x_1 - 4x_2 & \leq -7 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

Murrizketak berdintzaz idazteko, bakoitzean nasaitze-aldagai bat gehituko dugu.

$$\begin{array}{rl}
\max\,(-z) \; = & -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
\text{hauen mende} & \\
& -x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad\qquad = -3 \\
& 2x_1 - x_2 \qquad + x_4 \qquad = -2 \\
& -x_1 - 4x_2 \qquad\qquad + x_5 = -7 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0
\end{array}$$

1. **urratsa.** Hasierako taula eraiki. $z_j - c_j$ guztiak ez-negatiboak dira, hau da, bideragarritasun duala dago.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
	3	2	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$
$\mathbf{a}_3$	-1	-2	1	0	0	-3	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{a}_4$	2	-1	0	1	0	-2	$\frac{1}{4}$
$\mathbf{a}_5$	-1	$\boxed{-4}$	0	0	1	-7	

2. **urratsa.** Taula horretan ez dago bideragarritasun primalik. Ondorioz, soluzioa hobe daiteke.

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \ngeq \mathbf{0}$$

3. **urratsa.** Oinarri aldaketa.

$$x_{B3} = \min\{-3, -2, -7\} = -7$$

$\mathbf{a}_5$ bektorea irtengo da oinarritik. 3. errenkada pibot-errenkada da.

$$\frac{z_k - c_k}{y_{ik}} = \max\left\{\frac{3}{-1}, \frac{2}{-4}\right\} = -\frac{1}{2} = \frac{z_2 - c_2}{y_{22}}$$

$\mathbf{a}_2$ bektorea sartuko da oinarrian. 2. zutabea pibot-zutabea da.

Pibota -4 balioa da.

4. urratsa. Taula berria kalkulatu. Lehenengo errenkadarako biderkatzailea $\frac{1}{2}$ da, bigarren errenkadarako biderkatzailea $\frac{1}{4}$ da eta balio adierazleen errenkadarako biderkatzailea $-\frac{1}{2}$ da.

Errenkaden artean oinarrizko eragiketak eginez, ondoko taula lortuko da:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
		$\frac{5}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	-2
0	$\mathbf{a}_3$	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
0	$\mathbf{a}_4$	$\frac{9}{4}$	0	0	1	$\boxed{-\frac{1}{4}}$	$-\frac{1}{4}$	
-2	$\mathbf{a}_2$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$	1

2. urratsera bueltatzean, taulan bideragarritasun primalik ez dagoela ikusten dugu. Hortaz, algoritmoaren beste iterazio bat egin beharko dugu. $\mathbf{a}_4$ bektorea irtengo da oinarritik eta $\mathbf{a}_5$ bektorea sartu. Taula berria honakoa da:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		7	0	0	2	0	-4
0	$\mathbf{a}_3$	-4	0	1	-2	0	1
0	$\mathbf{a}_5$	-9	0	0	-4	1	1
-2	$\mathbf{a}_2$	-2	1	0	-1	0	2

Berriro ere, 2. urratsera bueltatzean, taula horretan bideragarritasun primala badagoela egiaztatuko dugu eta, ondorioz, taula optimoa da. Problemaren soluzio optimoa $x_1^* = 0$ eta $x_2^* = 2$ da, eta helburu funtzioaren balio optimoa $z^* = 4$. □

3.7 Murrizketa artifizialaren metodoa

Simplex dual algoritmoa aplikatu ahal izateko, beharrezkoa da hasierako taulan bideragarritasun duala izatea, eta hori ez da horrela eredu lineal guztietarako. Horregatik, algoritmoaren aplikazioa murriztua geratzen da. Edozein eredu lineal simplex dual algoritmoaren bidez ebaztea posible egiten duen algoritmoaren hedapen bat murrizketa artifizialaren metodoa da.

Hasierako taulan bideragarritasun dualik ez dagoenean, ebatziko den eredu linealari murrizketa artifizial bat gehitzean datza metodoa. Murrizketa artifizial horrek ez luke problemaren bideragarritasun eskualdea aldatu beharko. Taulan bideragarritasun duala lortzeko helburuarekin gehituko da murrizketa artifiziala, eta hortik aurrera simplex dual algoritmoaren aplikazioarekin segi ahal izango da. Ereduari gehituko zaion murrizketa artifiziala honakoa da:

$$\sum_{j\in N} x_j \leq M.$$

non N izango den hasierako taulan $z_j - c_j$ negatiboa duten aldagaiek osatzen duten multzoa. Ereduari gehitutako murrizketa artifizialak soluzioen eskualdea alda ez dezan, M balio positibo oso handia izango da.

Adibidea. Har dezagun honako eredu lineala:

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 + 6x_2 \\ \text{hauen mende} & \\ x_1 + 2x_2 &\leq 20 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 &\geq \frac{1}{2} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Eredua maximizatze-forma simetrikoan idatziko dugu, eta murrizketa bakoitzean nasaitze-aldagai bat gehituko dugu.

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{hauen mende} & \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad &= 20 \\ -x_1 - \frac{1}{2}x_2 \qquad + x_4 &= -\frac{1}{2} \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{B} = \mathbf{I} = (\mathbf{a}_3,\ \mathbf{a}_4)$ oinarria aukeratu eta hasierako taula eraikiko dugu.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	-1	-6	0	0	0
$\mathbf{a}_3$	1	2	1	0	20
$\mathbf{a}_4$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$

Hasierako taula horretan ez dago simplex dual algoritmoa aplikatu ahal izateko behar dugun bideragarritasun duala. Horretarako ondoko murrizketa artifiziala gehituko diogu ereduari:

$$x_1 + x_2 \leq M.$$

Murrizketa artifizialari nasaitze-aldagai bat gehituz, horrela geratuko da eredua:

$$\begin{array}{rl} \max\ z = & x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{hauen mende} & \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ & -x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_4 = -\frac{1}{2} \\ & x_1 + x_2 + x_5 = M \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

$\mathbf{B} = \mathbf{I} = (\mathbf{a}_3,\ \mathbf{a}_4,\ \mathbf{a}_5)$ oinarria aukeratu eta murrizketa artifiziala duen ereduari dagokion hasierako taula eraikiko dugu.

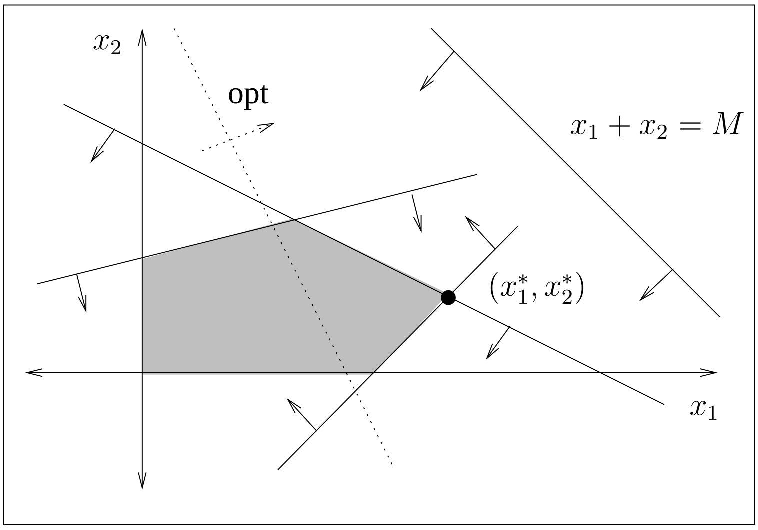
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
		-1	-6	0	0	0	0	-6
0	$\mathbf{a}_3$	1	2	1	0	0	20	2
0	$\mathbf{a}_4$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
0	$\mathbf{a}_5$	1	$\boxed{1}$	0	0	1	M	

Geroago ikusiko dugun murrizketa artifizialaren kasurako simplex dual algoritmoan zehaztuko dugu zein den hasierako taula horretan egin behar den oinarri-aldaketa, bideragarritasun duala duen taula bat lortzeko. □

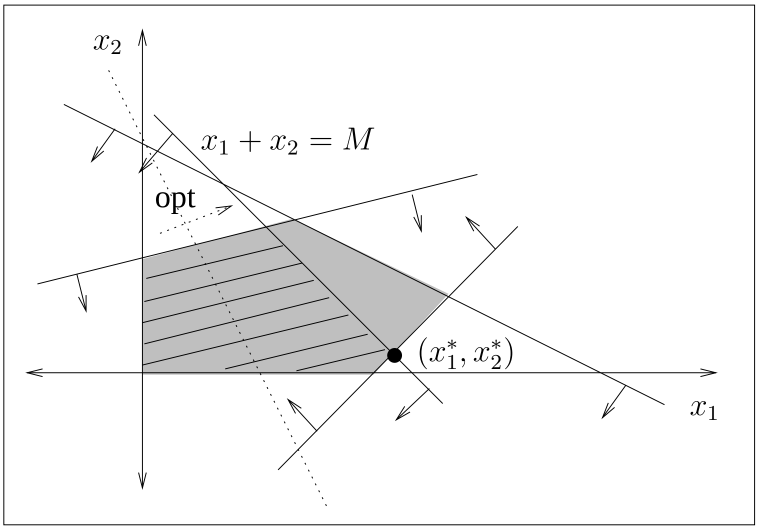
3.7.1 Murrizketa artifizialaren eragina

Modu laburrean esanda, murrizketa artifizialaren metodoak simplex dual algoritmoa osatu egiten du, hala behar den kasuetan. Baina, problemari murrizketa artifizial bat gehitzeak ez du soluzioen eskualdearen gain inolako eraginik sortu behar, eta horretarako M balioak behar bezain handia izan behar du.

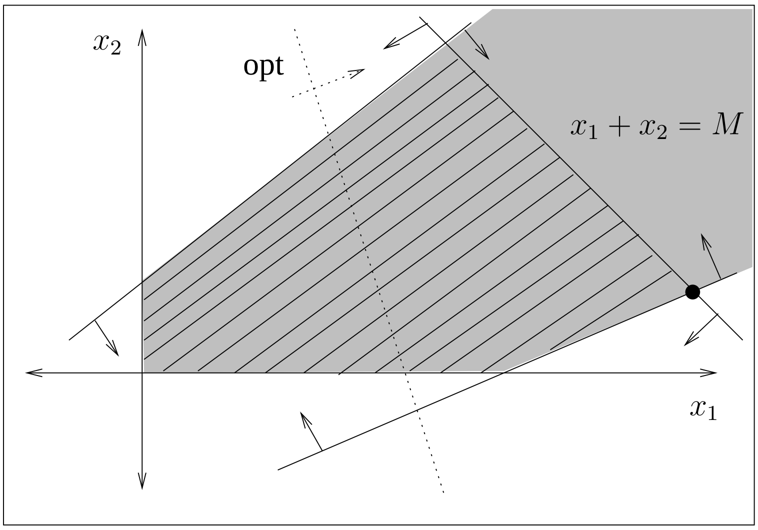
Ondoko grafikoan ikus daiteke murrizketa artifizialaren M balioa nahiko handia bada, honek ez duela problemaren soluzioen eskualdean eraginik sortuko, grisez margotutako poligonoan alegia.



Baina, M balioa ez bada nahiko handia, hurrengo grafikoan ikus daitekeen bezala, soluzioen eskualdeko puntu batzuk galdu egiten dira; poligono grisean dauden baina marratuan ez dauden puntuak ez dira $x_1 + x_2 \leq M$ murrizketa artifiziala gehitu ondoreneko problemaren soluzioen eskualdekoak.



Amaitzeko, problemaren bideragarritasun eskualdea bornegabea den kasuan murrizketa artifiziala gehitzen dugunean, M balioa oso handia izanda ere, bideragarritasun eskualdeak puntuak galdu egingo ditu. Ondoko grafikoan ikus daiteke kasu hau.



Aurreko bi kasuen ondorio gisa esan dezakegu murrizketa artifizialaren nasaitze-aldagaia oinarri optimoan ez dagoenean, bi arrazoirengatik izan daitekeela: M balioa behar bezain handia ez delako edo soluzioa bornegabea delako.

3.7.2 Simplex dual algoritmoa murrizketa artifizialarekin

Helburua maximizatzea da. Nasaitze-aldagaiez osatutako hasierako $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ oinarria aukeratu.

1. urratsa. Hasierako taula eraiki.

2. urratsa. Murrizketa artifizialari dagokionez,

- $\mathbf{A}$ matrizeko $\mathbf{a}_j$ bektore guztietarako $z_j - c_j \geq 0$ betetzen bada, 3. urratsera joan.
- $\mathbf{A}$ matrizean $z_j - c_j < 0$ duen $\mathbf{a}_j$ bektoreren bat existitzen bada, ereduari **murrizketa artifiziala gehitu**, eredu berriarentzat hasierako taula eraiki eta ondoko oinarri aldaketa egin:

  Oinarrian sartuko da ondoko baldintza betetzen duen $\mathbf{a}_k$ bektorea:

$$z_k - c_k \;=\; \min_j \,\{\; z_j - c_j \;/\; z_j - c_j < 0 \;\}.$$

  Murrizketa artifizialaren nasaitze-bektorea irtengo da oinarritik.

  Oinarrizko eragiketak egin errenkaden artean eta taulan bideragarritasun duala lortuko da. 3. urratsera joan.

3. urratsa. Bideragarritasun primala.

- Murrizketa artifizialik ez badago,
  - $x_{Bi} \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, bada, **soluzioa optimoa** da. Amaitu.
  - $x_{Bi} < 0$, $i = 1, \ldots, m$, existitzen bada, soluzioa hobe daiteke. 4. urratsera joan.
- Murrizketa artifiziala baldin badago,.
  - $x_{Bi} \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, bada, eta murrizketa artifizialaren nasaitze-aldagaia oinarrian badago balio positiboz, **soluzioa optimoa** da. Amaitu.
  - $x_{Bi} \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, bada, eta murrizketa artifizialaren nasaitze-aldagaia oinarrian ez badago edo oinarrian egonik zero balioa hartzen badu, **problema bornegabea** da. Amaitu.
  - $x_{Bi} < 0$, $i = 1, \ldots, m$, existitzen bada, soluzioa hobe daiteke. 4. urratsera joan.

4. urratsa. Oinarri-aldaketa.

- Oinarritik irtengo da ondoko baldintza betetzen duen $\mathbf{a}_r$ bektorea:

  $$x_{Br} \;=\; \min_i \,\{\, x_{Bi} \;/\; x_{Bi} < 0 \,\}.$$

  r. errenkada **pibot-errenkada** da.
- Oinarrian sartuko da ondoko baldintza betetzen duen $\mathbf{a}_k$ bektorea:

  $$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} \;=\; \max_j \,\{\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \;/\; y_{rj} < 0 \,\}.$$

  k. zutabea **pibot-zutabea** da. y_{rk} elementua **pibot**a da. 5. urratsera joan.

  r. errenkadan y_{rj} negatiborik ez bada existitzen, **problema bideraezina** da. Amaitu.

5. urratsa. Taula berria kalkulatu errenkaden artean oinarrizko eragiketak eginez. 3. urratsera joan.

3.8 Eredu linealen ebazpena

Atal honetan, simplex dual aplikatu ahal izateko, murrizketa artifizialaren erabilpena beharrezkoa duten hiru adibide ebatziko ditugu.

Adibidea. (**Problema bideragarria.**) 117. orrialdeko adibidea har dezagun. Ikusi dugu nasaitze-aldagaiez osatutako oinarri kanonikorako hasierako taulan ez dagoela ez bideragarritasun primalik, ezta dualik ere. Hortaz, beharrezkoa gertatuko da, simplex dual aplikatu ahal izateko, $x_1 + x_2 \leq M$ murrizketa artifiziala gehitzea.

Lehenengo iterazioa.

Hasierako taula eraikiko dugu (ikus 117. orrialdean).

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
		-1	-6	0	0	0	0	
0	$\mathbf{a}_3$	1	2	1	0	0	20	2
0	$\mathbf{a}_4$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
0	$\mathbf{a}_5$	1	$\boxed{1}$	0	0	1	M	

Bideragarritasun duala lortzeko, ondoko oinarri aldaketa egingo dugu. Oinarrian sartuko da $z_j - c_j$ negatiboen artean minimoari dagokion bektorea, $\mathbf{a}_2$, eta oinarritik irtengo da murrizketa artifizialari dagokion nasaitze-bektorea, $\mathbf{a}_5$. Errenkaden artean oinarrizko eragiketak eginez, ondoko taula lortuko dugu:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		5	0	0	0	6	$6M$
0	$\mathbf{a}_3$	-1	0	1	0	-2	$-2M+20$
0	$\mathbf{a}_4$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}M - \frac{1}{2}$
6	$\mathbf{a}_2$	1	1	0	0	1	M

Egiazta daiteke taulan bideragarritasun duala lortu dela eta, orain, simplex dual algoritmoaren urratsekin jarrai daiteke. Oinarritik $\mathbf{a}_3$ bektorea irtengo da eta $\mathbf{a}_5$ bektorea sartuko da, eta oinarrizko eragiketak eginez, ondoko taula lortuko da:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		2	0	3	0	0	60
0	$\mathbf{a}_5$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$M-10$
0	$\mathbf{a}_4$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{9}{2}$
6	$\mathbf{a}_2$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	10

Taula honetan bideragarritasun primala izatea lortu da, $\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}$, eta murrizketa artifizialaren nasaitze-bektorea oinarrian dago, $x_5^* = M - 10$ balioa hartzen duelarik. Hortaz, taulan ageri den soluzio optimoa jatorrizko ereduari dagokio. Problemaren soluzio optimoa $x_1^* = 0$, $x_2^* = 10$ da, eta $z^* = 60$. □

Adibidea. (**Soluzio bornegabeko problema.**) Izan bedi eredu lineal hau:

$$\begin{aligned} \max\ z\ =\ & -4x_1 + 5x_2 \\ \text{hauen mende} & \\ 2x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ x_1 - x_2 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Eredua maximizatze-forma simetrikoan idatzi ondoren, nasaitze-aldagaiak eta $x_2 \leq M$ murrizketa artifiziala gehituko dizkiogu, eta honela geratuko da:

$$\begin{aligned} \max\ z\ =\ & -4x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{hauen mende} & \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= -4 \\ -x_1 + x_2 \qquad + x_4 \qquad &= -3 \\ x_2 \qquad\qquad + x_5 &= M \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Simplex dual algoritmoa aplikatuz, ondoko taulak kalkulatuko ditugu:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
		4	-5	0	0	0	0	
0	$\mathbf{a}_3$	-2	-2	1	0	0	-4	-2
0	$\mathbf{a}_4$	-1	1	0	1	0	-3	1
0	$\mathbf{a}_5$	0	$\boxed{1}$	0	0	1	M	
		4	0	0	0	5	$5M$	
0	$\mathbf{a}_3$	-2	0	1	0	2	$2M-4$	2
0	$\mathbf{a}_4$	$\boxed{-1}$	0	0	1	-1	$-M-3$	
5	$\mathbf{a}_2$	0	1	0	0	1	M	0
		0	0	0	4	1	$M-12$	
0	$\mathbf{a}_3$	0	0	1	-2	4	$4M+2$	
-4	$\mathbf{a}_1$	1	0	0	-1	1	$M+3$	
5	$\mathbf{a}_2$	0	1	0	0	1	M	

Azkenengo taulan bideragarritasun primala eta duala daudenez, taula optimoa da. Dena den, murrizketa artifizialaren nasaitze-bektorea, $\mathbf{a}_5$, ez dago oinarri optimoan. Horrek esan nahi du problema bornegabea dela. □

Adibidea. (**Problema bideraezina.**) Izan bedi ondoko eredu lineala:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{hauen mende} & \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ -3x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ereduaren maximizatze-forma simetrikoari nasaitze-aldagaiak eta murrizketa artifiziala, $x_1 + x_2 \leq M$, gehituz, honela geratuko da:

$$
\begin{aligned}
\max\ z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5
\end{aligned}
$$

hauen mende

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 \quad +x_3 & & = 2 \\
3x_1 - x_2 \qquad\quad +x_4 & & = -3 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad +x_5 & & = M \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Ondoko taulan agertuko dira soluzio optimora iritsi arteko iterazioetan egindako kalkuluak:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
		-2	-1	0	0	0	0	
0	$\mathbf{a}_3$	1	1	1	0	0	2	1
0	$\mathbf{a}_4$	3	-1	0	1	0	-3	3
0	$\mathbf{a}_5$	$\boxed{1}$	1	0	0	1	M	
		0	1	0	0	2	$2M$	
0	$\mathbf{a}_3$	0	0	1	0	-1	$-M+2$	0
0	$\mathbf{a}_4$	0	$\boxed{-4}$	0	1	-3	$-3M-3$	
2	$\mathbf{a}_1$	1	1	0	0	1	M	$-\frac{1}{4}$
		0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}M-\frac{3}{4}$	
0	$\mathbf{a}_3$	0	0	1	0	$\boxed{-1}$	$-M+2$	
1	$\mathbf{a}_2$	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}M+\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$
2	$\mathbf{a}_1$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}M-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$

$$
\begin{array}{cc|cc|ccc|c|}
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\cline{3-8}
 & & 0 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{7}{4} \\
\cline{2-8}
0 & \multicolumn{1}{|c|}{\mathbf{a}_5} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & M-2 \\
1 & \multicolumn{1}{|c|}{\mathbf{a}_2} & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{9}{4} \\
2 & \multicolumn{1}{|c|}{\mathbf{a}_1} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\
\cline{2-8}
\end{array}
$$

Simplex dual algoritmoaren arabera, $\mathbf{a}_1$ bektoreak oinarritik irten beharko luke, baina ez dago pibotik. Hortaz, ez da lortu $\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}$ bideragarritasun primalik. Problema bideraezina da. □