2. Kapitulua

Simplex metodoa

Bi edo hiru aldagai dituzten eredu linealak grafikoki ebatz daitezke. 1. Kapituluan bi aldagaiko eredu linealen ebazpen grafikoa aztertu dugu. Hiru aldagai baino gehiago dituzten eredu linealak ebazteko ezin da metodo grafikoa erabili, prozedura aljebraiko bat erabiltzea beharrezkoa gertatuko delarik. Programazio linealeko problemen zenbakizko soluzioa kalkulatzeko simplex algoritmoa argitaratu zuen 1949. urtean George B. Dantzig-ek.

Programazio linealerako teoria eredu linealaren ondoko forman oinarrituko da.

Forma estandarra. Eredu lineal bat forma estandarrean dagoela esaten da baldin murrizketa guztiak $=$ modukoak badira eta $\mathbf{b}$ bektorearen osagai guztiak eta ereduaren aldagai guztiak ez-negatiboak badira, hau da,

$$\begin{aligned} \max(\min) z = \ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{hauen mende} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Helburua maximizatzea bada, ereduaren maximizatze-forma estandarra daukagula esaten da, eta minimizatzea bada minimizatze-forma estandarra.

2.1 Aldaketak ereduan

Problema linealak ebazteko prozesuan lehenengo urratsa eredua forma estandarrera pasatzea izango da. Eredu gehienak ez dira hasieratik forma estandarrean idatzita egoten; baina, helburu funtzioan, murrizketetan eta aldagaietan aldaketak egin daitezke, forma estandarrera egokitzeko.

1. **Helburu funtzioa.**

   z funtzioaren minimoa kalkulatzea $-z$ funtzioaren maximoa kalkulatzearen baliokidea da.

   $$\min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \Longleftrightarrow \quad \max\,(-z) = \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j$$

   Adibidez, $\min\ z = 3x_1 - 5x_2$ eta $\max\,(-z) = -3x_1 + 5x_2$ baliokideak dira; z balioa minimo egingo duten x_1 eta x_2 aldagaien balio berberek egingo dute $-z$ maximo, $\min\ z = -\max\,(-z)$ beteko delarik.

2. **Murrizketak.**

   (a) Eredu lineal baten murrizketa guztiak noranzko berean idatziak izan daitezke ondokoa betetzen delako:

   $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} -a_{ij} x_j \leq -b_i$$

   Adibidez, $2x_1 + 3x_2 \leq -2$ ekuazioan desberdintzaren bi aldeak -1 balioaz biderkatuz gero, $-2x_1 - 3x_2 \geq 2$ lortuko da.

   (b) Murrizketak berdintzaz idatziak izan daitezke.

   $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y = b_i$$

   $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - y = b_i$$

   Aurreko bi aldaketetan erabili den y aldagaiak *nasaitze-aldagaia* izena du; bi kasuetan y aldagaia zero baino handiagoa edo berdina da.

   Adibidez, $x_1 - 4x_2 \leq 4$ eta $x_1 - 4x_2 + y = 4$ murrizketak baliokideak dira, y aldagaia ez-negatiboa izanik.

(c) Berdintzaz betetzen den murrizketa oro bi murrizketen bidez adierazia izan daiteke modu honetan:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad \text{eta} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$$

Adibidez, $-2x_1 + x_2 = 2$ murrizketa idaztearen baliokidea da ondoko beste biak idaztea: $-2x_1 + x_2 \leq 2$ eta $-2x_1 + x_2 \geq 2$.

3. **Aldagaiak.**

   Aldagaiek ez-negatibotasunaren murrizketa betetzeko, aldaketa hauek erabili beharko dira.

   - $x_j \leq 0$ bada, $x_j = -x'_j$ aldagai-aldaketa egin daiteke, non $x'_j \geq 0$ den.
   - x_j aldagaia zeinuz murriztugabea bada, bi aldagai positiboren arteko diferentzia moduan idatz daiteke horrela.

     $$x_j = x'_j - x''_j, \quad \text{non} \quad x'_j, x''_j \geq 0.$$

     – $x'_j > x''_j$ bada, $x_j > 0$ da.
     – $x'_j < x''_j$ bada, $x_j < 0$ da.
     – $x'_j = x''_j$ bada, $x_j = 0$ da.

Adibidea. Aurreko baliokidetasunak erabiliz ondoko eredu lineala maximizatze-forma estandarrean idatziko dugu:

$$\begin{aligned}
\min \quad z &= x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\text{hauen mende} & \\
x_1 + x_2 - x_3 &\geq 2 \\
x_1 - 2x_2 + 5x_3 &\leq -1 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \leq 0,\ x_3 &: \text{murriztugabea}
\end{aligned}$$

- Helburu funtzioa.

  Maximizatze-forman honela jarriko dugu:

  $$-\max\,(-z) = -x_1 - 2x_2 - x_3$$

- Murrizketak.

  Lehenengo murrizketan x_4 nasaitze-aldagaia kenduko dugu,

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2.$$

  Bigarren murrizketan x_5 nasaitze-aldagaia gehituko dugu,

$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_5 = -1.$$

  Desberdintzaren eskuineko atala positibo bihurtzeko, bi atalak -1 balioaz biderkatuko ditugu,

$$-x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_5 = 1.$$

  Hirugarren murrizketa forma estandarrean emana dator:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4.$$

- Aldagaiak.

  $x_1 \geq 0$ aldagaiak ez-negatibotasunaren murrizketa betetzen du. $x_2 \leq 0$ aldagairako $x_2' = -x_2$ aldaketa egingo dugu, eta murriztugabe dagoen x_3 aldagairako $x_3 = x_3' - x_3''$ aldaketa egingo dugu.

Aldaketa horiek guztiak egin eta gero, eredu lineala maximizatze-forma estandarrean ondokoa da:

$$\begin{aligned}
-\max\,(-z)\ &= -x_1 + 2x_2' - x_3' + x_3'' + 0x_4 + 0x_5 \\
\text{hauen mende}& \\
x_1 - x_2' - x_3' + x_3'' - x_4 &= 2 \\
-x_1 - 2x_2' - 5x_3' + 5x_3'' - x_5 &= 1 \\
x_1 - x_2' + x_3' - x_3'' &= 4 \\
x_1, x_2', x_3', x_3'', x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

□

Nasaitze-aldagaiak gehitzeak edo kentzeak ez du helburu funtzioa aldatu behar. Hori dela eta, nasaitze-aldagaiek helburu funtzioan zero koefizientea izango dute.

2.2 Eredu linealen soluzioak

Ikusi dugun bezala, eredu lineal guztiak forma estandarrean idatziak izan daitezke. Kapitulu honetan azalduko dugun simplex algoritmoa maximizatzeko diseinatua izan da, eta horregatik, hemendik aurrera forma estandarra aipatzen dugunean, maximizatze-forma estandarraz ari garela ulertu behar da; gogora dezagun forma estandarrean $\mathbf{b}$ bektorearen osagaiak ez-negatiboak direla.

Izan bedi ondoko eredu lineala forma estandarrean:

$$\begin{aligned} \max \quad z = \; & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{hauen mende} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

non $\mathbf{x}$ eta $\mathbf{c}$ bektoreak $n \times 1$ tamainakoak diren, $\mathbf{b}$ bektorea $m \times 1$ tamainakoa eta $\mathbf{A}$ matrizea $m \times n$ tamainakoa.

Demagun $m < n$ betetzen dela, eta $\mathbf{A}$ matrizearen heina m dela. Horrelako sistemek infinitu soluzio dituzte. Helburu funtzioari balio optimoa emango dion soluzioa kalkulatzean datza problema.

Ikus ditzagun simplex metodoaren garapenean erabiliko diren definizio hauek.

1. definizioa. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ murrizketak betetzen dituen $\mathbf{x}$ bektorea eredurako *soluzioa* dela esaten da.

2. definizioa. Problemarako soluzio den $\mathbf{x}$ bektorea, hau da, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ betetzen duena, *bideragarria* dela esaten da baldin $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ bada.

3. definizioa. $\mathbf{A}$ matrizearen m zutabez osatutako $\mathbf{B}$ oinarri-matrize bat emanik, $\mathbf{x}_B$ *oinarriko soluzioa* dela esaten da baldin $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ betetzen badu. Oinarrikoak ez diren aldagai guztiak 0 dira, $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ (ikus A. Eranskina). Hortaz, oinarriko soluzioak zeroren desberdinak diren m osagai izango ditu gehienez.

Gainera, $\mathbf{x}_B$ bektorearen osagai guztiak ez-negatiboak badira, *oinarriko soluzio bideragarria* esaten zaio.

4. definizioa. Oinarriko soluzio bideragarri bat *endekatua* dela esaten da baldin oinarrikoa den aldagairen batek 0 balioa hartzen badu, hau da, 0 baino handiagoak diren m osagai baino gutxiago baditu. 0 baino handiagoak diren m osagai dituen oinarriko soluzio bideragarria *ez-endekatua* dela esaten da.

5. definizioa. Problema linealaren soluzio bideragarri guztien multzoari *bideragarritasun-eskualdea* edo *soluzio bideragarrien multzo ganbila* esaten zaio eta F hizkiaren bidez adierazten da.

6. definizioa. Problema linealaren *soluzio optimoa* $\mathbf{x}^*$ notazioaz adierazten da, eta helburu funtzioaren *balio optimoa* $z^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$ notazioaz.

7. definizioa. Problema lineala *bornegabea* dela esaten da helburu funtziorako balio optimo finiturik ez duenean, hau da, $z^* \to +\infty$ edo $z^* \to -\infty$ denean.

8. definizioa. Problema lineal batek *soluzio optimo anizkoitza* duela esaten da soluzio optimo bat baino gehiago dituenean.

Hemendik aurrera oinarriari egiten zaizkion aipamenetan oinarri-matrizeari buruz ari garela ulertuko da.

Adibidea. Har dezagun ondoko eredu lineala forma estandarrean.

$$\begin{aligned} \max\ z\ &= 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 + x_5 \\ \text{hauen mende} & \\ 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

non

$$\mathbf{c}^T = (3,\ 6,\ 5,\ 4,\ 1), \quad \mathbf{x}^T = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

A matrizearen heina 2 da, ezezagun kopurua baino txikiagoa. Hortaz, murrizketen sistemak infinitu soluzio ditu. Hala ere, oinarriko soluzio kopurua finitua da. Gogora dezagun oinarriko soluzioak kalkulatzeko $\mathbf{B}$ oinarri guztiak aukeratu behar direla **A** matrizeko zutabeen artean (ikus A. Eranskina), eta honako sistema ebatzi behar dela:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b},$$

non $\mathbf{x}_B$ oinarriko aldagaiez osatutako bektorea den. Hiru oinarri desberdinetarako soluzioak kalkulatuko ditugu.

1. $\mathbf{A}$ matrizeko lehenengo eta laugarren zutabeek osatutako matrizea aukeratuz lortzen den $\mathbf{B}$ matrizea ez-singularra da, eta, ondorioz, oinarria.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Horrela,

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad \mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Orduan,

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

x_2, x_3 eta x_5 aldagai askeei balio posible guztiak emanez kalkulatzen dira sistemaren infinitu soluzioak. Kalkula ditzagun horietako bi.

- (2.1) ekuazioan $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ eta $x_5 = 0$ balioak hartzen baditugu, kalkuluak eginez ondoko oinarriko soluzioa lortuko da:

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  Lortu dugun $x_1 = 2$, $x_4 = 2$ oinarriko soluzioa bideragarria da, osagai negatiborik ez duelako.

- (2.1) ekuazioan $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ eta $x_5 = 0$ balioak hartzen baditugu, kalkuluak eginez ondoko soluzioa lortuko da:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hau da, $\mathbf{x}^T = (1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0)$ bektorea soluzioa da. Bideragarria da osagai negatiborik ez duelako. Dena den, ez da oinarriko soluzioa x_3 aldagai askeak zeroren desberdina den balio bat hartzen duelako soluzio horretan.

2. $\mathbf{A}$ matrizeko lehenengo bi zutabeek osatutako $\mathbf{B}$ matrizea hartzen badugu,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

oinarria da, eta aldagai aske guztiei zero balioa emanez, ondoko oinarriko soluzioa lortuko da:

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Kalkulatu dugun oinarriko soluzioa ez da bideragarria, $x_2 = -\frac{1}{3}$ aldagaiak balio negatiboa hartzen duelako.

3. $\mathbf{A}$ matrizeko hirugarren eta bosgarren zutabeek osatutako matrizea hartuz,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

oinarria da eta aldagai aske guztiei zero balioa emanez, ondoko oinarriko soluzioa lortuko da:

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soluzio hau bideragarria da. Horretaz gain, endekatua da oinarrikoa den aldagai batek zero balioa hartzen duelako, $x_5 = 0$.

□

2.3 Mutur-puntuak eta oinarriko soluzioak

Eredu linealen soluzio grafikoan ikusi dugun bezala, soluzio bideragarrien multzo ganbileko mutur-puntu batean dago soluzio optimoa. Problemak soluzio optimo anizkoitza badu, horietako bat gutxienez mutur-puntua izango da. Hiru aldagai baino gehiago dituzten eredu linealak ebazteko ezin da interpretazio geometrikoa erabili, eta problema aljebraikoki ebaztea beharrezkoa egiten da. Ondoko bi teoremetan geometriatik aljebrara igarotzea ahalbidetzen duten oinarrizko emaitzen frogak azalduko dira. Frogetan multzo ganbilen ondoko emaitzak erabiltzen dira:

1. Forma estandarrean dagoen eredu lineal baten soluzio bideragarrien F multzoa *multzo ganbil eta itxia* da.

2. F multzo ganbileko $\mathbf{x}$ puntua *mutur-puntua* da baldin $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$, $0 \leq \lambda_i \leq 1$ betetzen duten F-ko bi puntu $\mathbf{x}_1$ eta $\mathbf{x}_2$ existitzen ez badira.

3. Multzo ganbil itxi eta bornatu bateko edozein $\mathbf{x}$ puntu mutur-puntuen konbinazio lineal ganbil orokortu moduan idatz daiteke, hau da,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathbf{x}_i \quad , \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad , \quad \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1$$

Mutur-puntu bakoitzari oinarriko soluzio bideragarri bat dagokiola, eta alderantziz, oinarriko soluzio bideragarri bakoitzari mutur-puntu bat dagokiola frogatuko da ondoko teoreman:

2.3.1 Teorema. *Izan bedi forma estandarrean dagoen eredu lineala*

$$\begin{array}{rl} \max \quad z = & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \textit{hauen mende} & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

$\mathbf{x}$ *oinarriko soluzio bideragarria da baldin eta soilik baldin* $\mathbf{x}$ *bektorea* F*-ko mutur-puntua bada.*

Froga.
$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathbf{x}$ *oinarriko soluzio bideragarria* bada, froga dezagun mutur-puntua dela.

Baldin $\mathbf{x}$ oinarriko soluzio bideragarria bada, zero baino handiagoak diren m osagai ditu gehienez. Notazioa errazteko asmoz, demagun lehenengo m osagaiak direla. Orduan,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Jo dezagun existitzen direla F multzoan bi puntu $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, non

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \ , \ 0 < \lambda < 1.$$

Izan bitez

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y'}_1 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y'}_2 \end{pmatrix}$$

non $\mathbf{y}_i$, ($i = 1,2$) bektoreen dimentsioa $m \times 1$ den eta $\mathbf{y'}_i$, ($i = 1,2$) bektoreena $(n-m) \times 1$. Orduan, berdintza honetatik:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y'}_1 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y'}_2 \end{pmatrix}$$

beste hau ondorioztatzen da:

$$\mathbf{0} = \lambda \mathbf{y'}_1 + (1-\lambda)\mathbf{y'}_2.$$

$\mathbf{y'}_1, \mathbf{y'}_2 \geq \mathbf{0}$, $\lambda > 0$ eta $1-\lambda > 0$ direnez, $\mathbf{y'}_1 = \mathbf{y'}_2 = \mathbf{0}$ betetzen da. Hortaz, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_1$ eta $\mathbf{x}_2$ soluzioak oinarrikoak direla ondorioztatzen da, eta oinarri berberari dagozkionez, $\mathbf{x}_B = \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ da.

Beraz, $\mathbf{x}$ konbinazio lineal ganbil murriztu moduan idaztea posible egingo duten bideragarritasun eskualdeko $\mathbf{x}_1$ eta $\mathbf{x}_2$ bi puntu desberdin horiek ez dira existitzen, eta, ondorioz, $\mathbf{x}$ mutur-puntua da.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\mathbf{x}$ *mutur-puntua* bada, oinarriko soluzio bideragarria da.

Demagun $\mathbf{x}$ bektoreak k osagai positibo dituela eta gainerakoak zero direla. Orduan, murrizketen sistema modu honetan idatz daiteke:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b}.$$

$\mathbf{x}$ oinarriko soluzio bideragarria dela ikusteko, $\mathbf{a}_i$, $i = 1, \dots, k$, bektoreak linealki independenteak direla frogatzea nahikoa da.

Kontrako kasuan, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ eskalarrak existituko lirateke, guztiak batera nulu ez, non

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}.$$

Izan bedi

$$\alpha^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0).$$

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} + \epsilon\alpha$ eta $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x} - \epsilon\alpha$ definituko ditugu. Posible da ϵ eskalarraren balioa modu egokian aukeratzea, puntuak bideragarriak izan daitezen. Gainera, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ betetzen da eta

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_2.$$

Hortik ondorioztatuko litzateke $\mathbf{x}$ ez dela mutur-puntua. □

Eredu lineal baten soluzio optimoa bideragarritasun eskualdeko mutur-puntu batean aurkitzen dela frogatuko da ondoko teoreman.

2.3.2 Teorema. *Izan bedi forma estandarrean dagoen eredu lineala*

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \textit{hauen mende} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Helburu funtzioaren balio optimoa F multzoaren mutur-puntu batean aurkitzen da.

Froga. Demagun mutur-puntua ez den $\mathbf{x}^*$ soluzio optimoa daukagula eta $z^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$ dela problemaren balio optimoa. Orduan, F-ko $\mathbf{x}$ guztietarako ondokoa betetzen da:

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = z^*$$

Izan bedi F-ko mutur-puntuen multzoa, $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$. F eskualdeko puntu oro, baita eskualdekoa den $\mathbf{x}^*$ ere, mutur-puntuen konbinazio lineal ganbil moduan idatzia izan daiteke.

$$\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i \ , \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

Orduan,

$$z^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{c}^T \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{c}^T \mathbf{x}_i$$

$\max_i(\mathbf{c}^T\mathbf{x}_i) \geq \mathbf{c}^T\mathbf{x}_i,\ i = 1, \ldots, k$ betetzen denez,

$$z^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{c}^T \mathbf{x}_i \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \max_i(\mathbf{c}^T\mathbf{x}_i) = \max_i\,(\mathbf{c}^T\mathbf{x}_i) \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \max_i(\mathbf{c}^T\mathbf{x}_i) \leq z^*.$$

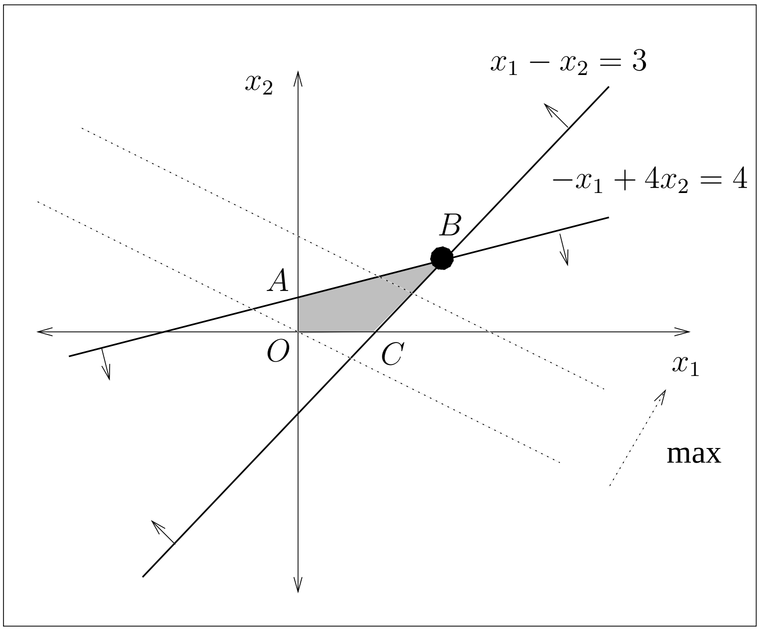
Ondorioz, $z^* = \max_i\,(\mathbf{c}^T\mathbf{x}_i)$ eta ondorioztatzen da optimoa mutur-puntu batean lortzen dela. □

Ondoko adibidean 2.3.1. Teoreman frogatutakoa betetzen dela egiaztatuko dugu. Eredu linealek oinarriko soluzio kopuru finitua dutela kontuan izanda, oinarriko soluzio bideragarri batetik hobea den beste batera joateko prozesu iteratiboa eraiki daiteke, optimoa lortu arte.

Adibidea. Har dezagun ondoko eredu lineala:

$$\begin{array}{rl} \max \quad z \ = & x_1 + 2x_2 \\ \text{hauen mende} & \\ & -x_1 + 4x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Soluzioen eskualdea grafikoki adierazten badugu, mutur-puntuak kalkula ditzakegu.



F eskualdeak lau mutur-puntu ditu. Helburu funtzioa optimizazioaren noranzkoan desplazatuz, B mutur-puntua lortuko da.

$$O = (0,\ 0)\ ,\quad A = (0,\ 1)\ ,\quad B = \left(\frac{16}{3},\ \frac{7}{3}\right)\ ,\quad C = (3,\ 0)$$

Oinarriko soluzioak aljebraikoki kalkulatzeko, eta bideragarritasun eskualdeko mutur-puntu bakoitzari oinarriko soluzio bideragarri bat dagokiola, eta alderantziz, oinarriko soluzio bideragarri bakoitzari mutur-puntu bat dagokiola ikusteko, eredua forma estandarrean jarri behar da, x_3 eta x_4 nasaitze-aldagaiak gehituz.

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

hauen mende

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 \quad +x_3 \qquad\quad &= 4 \\ x_1 - x_2 \qquad\qquad +x_4 &= 3 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ekuazio-sistemaren koefizienteen matrizeak lau zutabe ditu, eta ondorioz, aukera daitekeen oinarri kopuru maximoa 6 da; lau zutabe horiek konbinatuz, eta beren artean linealki independente diren zutabeak binaka multzokatuz, lortuko den multzo kopurua. Azter ditzagun 6 aukera horiek.

1. $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2)$ oinarria aukeratzea.

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Oinarriko soluzio hau bideragarria da, eta grafikoko B mutur-puntuari dagokio.

2. $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_3)$ oinarria aukeratzea.

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Oinarriko soluzio hau bideragarria da, eta grafikoko C mutur-puntuari dagokio.

3. $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_4)$ oinarria aukeratzea.

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Oinarriko soluzio hau ez da bideragarria, osagai negatiboak dituelako. Hortaz, soluzio hau ez da grafikoko mutur-puntuekin egokitzen.

4. $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3)$ oinarria aukeratzea.

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Oinarriko soluzio hau ez da bideragarria, osagai negatiboak dituelako. Hortaz, soluzio hau ez da grafikoko mutur-puntuekin egokitzen.

5. $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_4)$ oinarria aukeratzea.

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Oinarriko soluzio hau bideragarria da, eta grafikoko A mutur-puntuari dagokio.

6. $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4)$ oinarria aukeratzea.

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Oinarriko soluzio hau bideragarria da, eta grafikoko O mutur-puntuari dagokio.

□

Aurreko adibidean $\mathbf{A}$ matrizeko lau zutabeen artean aukeratu ahal izan ditugun bi bektoreko multzo guztiak oinarriaak dira, eta horietatik sei oinarriko soluzio kalkulatu dira. Kasuren batean gerta daiteke aukeratutako bektoreak linealki mendekoak izatea, eta ondorioz, oinarria ez izatea, bektoreen multzo horretatik ezingo delarik oinarriko soluzio bat kalkulatu. Aurreko sei oinarriko soluzio horien artetik bi, hirugarrena eta laugarrena, ez dagozkie inolako mutur-punturi, ez direlako bideragarriak.

2.4 Simplex metodoa

Eredu linealen soluzio grafikoan ikusi dugu, ereduak soluziorik baldin badu, soluzio optimoa mota desberdinetakoa izan daitekeela: soluzio optimo bakarra, anizkoitza eta bornegabea. Atal honen helburua soluzio mota bakoitzari dagozkion ezaugarriak identifikatzea da, eredu linealak ebazteko prozedura iteratibo bat eraiki ahal izateko: simplex algoritmoa.

2.4.1 Definizioak eta notazioa

Hasteko, programazio linealaren garapenean erabiliko dugun notazioa finkatuko dugu. Izan bedi forma estandarrean dagoen eredu lineala.

$$\begin{aligned} \max \ z &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{hauen mende} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Demagun $\mathbf{A}$ matrizeak m errenkada linealki independente eta n zutabe dituela, $n > m$ izanik. $\mathbf{A}$ matrizeko m zutabe aukeratuz osatutako $\mathbf{B}$ oinarri bat hartzen da eta gainerako zutabeek $\mathbf{N}$ matrizea osatuko dute. Notazioa errazteko pentsatuko dugu oinarria osatzeko aukeratu diren $\mathbf{A}$ matrizeko zutabeak lehenengo m zutabeak direla. $\mathbf{c}$ bektorean eta $\mathbf{x}$ bektorean oinarriko diren osagaiak $\mathbf{c}_B$ eta $\mathbf{x}_B$ notazioaz adieraziko ditugu, hurrenez hurren; oinarriko ez diren osagaiak adierazteko $\mathbf{c}_N$ eta $\mathbf{x}_N$ notazioa erabiliko dugu. Orduan, eredu lineala honela idatz daiteke:

$$\max\ z = (\mathbf{c}_B^T \mid \mathbf{c}_N^T) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ - \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}$$

hauen mende

$$(\mathbf{B} \mid \mathbf{N}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ - \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$$

Kalkuluak eginez, eredua honela geratuko da:

$$\max\ \ z = \ \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N$$

hauen mende

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$$

- *Oinarriko soluzioa*. $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ eginez, sistema $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ bihurtzen da, eta oinarriko soluzioa kalkulatzen da,

  $$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b},$$

  non

  $$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{pmatrix}$$

- *Helburu funtzioaren balioa.* $\mathbf{c}_B^T = (c_{B1}, c_{B2}, \ldots, c_{Bm})$ bada,

$$z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = (c_{B1}, c_{B2}, \ldots, c_{Bm}) \begin{pmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} x_{Bi}.$$

- *Koordenatu-bektorea.* $\mathbf{A}$ matrizearen zutabe-bektoreak $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ badira, bektore bakoitzarentzat bere koordenatuak kalkula daitezke $\mathbf{B}$ oinarriarekiko. Horretarako, ondoko notazioa erabiliko da:

$$\mathbf{a}_j = y_{1j}\mathbf{a}_1 + y_{2j}\mathbf{a}_2 + \cdots + y_{mj}\mathbf{a}_m = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\mathbf{a}_i.$$

  $\mathbf{a}_j$ bektorearen koordenatu-bektorea ondokoa da:

$$\mathbf{y}_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{pmatrix}$$

  Koordenatu-bektorea kalkulatzeko, $\mathbf{a}_j = \mathbf{B}\mathbf{y}_j$ sistema ebatzi behar da, hau da,

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j.$$

- $z_j - c_j$ *balio adierazlearen kalkulua.* Kalkulu honen beharra aurrerago aztertuko diren teoremetan agertzen da. $\mathbf{a}_j$ bektore bakoitzarentzat z_j eskalarra kalkula daiteke modu honetan:

$$z_j = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_j = c_{B1}y_{1j} + c_{B2}y_{2j} + \cdots + c_{Bm}y_{mj} = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}y_{ij}.$$

Adibidea. Har dezagun forma estandarrean dagoen ondoko eredu lineala:

$$\begin{aligned} \max \ \ z \ &= \ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ \text{hauen mende} & \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 = 6 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Koefizienteen sistemako lehenengo bi zutabeek osatzen duten oinarria hartzen badugu, eredu lineala matrize-forman idatz dezakegu, oinarrikoa den zatia oinarrikoa ez den zatitik bereiziz.

$$\max \ \ z \ = \ (3, 4 \mid 5, 6) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ - \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

hauen mende

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ - \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- Oinarriko soluzioa.

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Helburu funtzioaren balioa. $\mathbf{c}_B^T = (3, 4)$ izanik,

$$z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = (3,\ \ 4) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 14$$

- Oinarrikoa ez den bektore baten koordenatuak $\mathbf{B}$ oinarriarekiko, adibidez, $\mathbf{a}_4$ bektorearenak.

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = y_{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y_{24} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{14} \\ y_{24} \end{pmatrix}$$

  Sistema ebatziz koordenatuak lortzen dira.

$$\mathbf{y}_4 = \begin{pmatrix} y_{14} \\ y_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- $z_4 - c_4$ balio adierazlearen kalkulua:

$$z_4 - c_4 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_4 - c_4 = (3,\ \ 4) \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix} - 6 = -3 - 6 = -9.$$

□

2.4.2 Oinarriko soluzio bideragarrien hobekuntza

Eredu linealen soluzio optimoa ereduaren murrizketek definitutako oinarriko soluzio bideragarrien artean aurkitzen da. Ondoko teoremak oinarriko soluzio bideragarri batetik helburu funtzioaren balioa hobetuko duen beste oinarriko soluzio bideragarri batera pasatzeko bete behar diren baldintzak finkatuko ditu. Oinarriko soluzio bideragarri batetik abiatuz, simplex metodoak teorema hau erabiliko du oinarriko soluzio bideragarri batetik alboko beste batera igarotzeko, helburu funtzioaren balioa hobetzea ezinezkoa izango den arte.

2.4.1 Teorema. (Oinarriko soluzio bideragarri baten hobekuntza) *Izan bedi eredu lineala forma estandarrean*

$$\begin{aligned} \max \quad z \quad &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \textit{hauen mende} \quad & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Izan bedi $\mathbf{A}$ *matrizetik aukeratutako* $\mathbf{B}$ *oinarria, eta izan bitez* $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ *dagokion oinarriko soluzio bideragarria eta* $z = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$ *helburu funtziorako balioa.* $\mathbf{A}$ *matrizean oinarrikoa ez den eta* $z_j - c_j < 0$ *duen* $\mathbf{a}_j$ *bektore bat existitzen bada, eta* $\mathbf{a}_j$ *horrentzat* y_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, *koordenaturen bat positiboa bada, beste* $\hat{\mathbf{x}}_B$ *oinarriko soluzio bideragarri bat existitzen da non*

$$\hat{z} = \hat{\mathbf{c}}_B^T \hat{\mathbf{x}}_B \geq z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B.$$

Froga. Notazioa errazteko pentsatuko dugu $\mathbf{B}$ oinarria $\mathbf{A}$ matrizeko lehenengo m bektoreek osatzen dutela, hau da, $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1 \ \ldots \ \mathbf{a}_r \ \ldots \ \mathbf{a}_m)$. $\mathbf{x}_B$ oinarriko soluzio bideragarria bada, ereduaren murrizketak betetzen ditu:

$$x_{B1}\mathbf{a}_1 + x_{B2}\mathbf{a}_2 + \cdots + x_{Bm}\mathbf{a}_m = \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{m} x_{Bi}\mathbf{a}_i. \tag{2.2}$$

Aurreko ekuazioan agertzen ez diren sistemako batugaiak zero dira, dagozkien aldagaiak ez direlako oinarrikoak.

$\mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{a}_{m+2}, \ldots, \mathbf{a}_n$ bektoreak ez daude oinarrian, eta $\mathbf{B}$ oinarriko bektoreen konbinazio lineal moduan idatz daitezke.

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\mathbf{a}_i \ , \ j = m+1, \ldots, n \tag{2.3}$$

$\mathbf{a}_j \neq \mathbf{0}$ da, $j = m+1, \ldots, n$; hortaz, y_{ij} osagairen bat zeroren desberdina da. Demagun $\mathbf{a}_j$ bektorean zeroren desberdina den osagaia $y_{rj} \neq 0$ dela. (2.3) ekuazioan r. batugaia bereiziz

$$\mathbf{a}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} y_{ij}\mathbf{a}_i + y_{rj}\mathbf{a}_r \tag{2.4}$$

r. batugaia aska daiteke eta $\mathbf{a}_r$ bektorea $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_m$ bektoreen konbinazio lineal moduan adierazi. 241. orrialdeko A.3.2 Teoreman ikusi dugun bezala, $\mathbf{B}$ oinarriko $\mathbf{a}_r$ bektorea $\mathbf{a}_j$ bektoreaz ordezkatuz lortzen den $\overset{\wedge}{\mathbf{B}}$ bektore-multzo berria oinarria da.

$$\overset{\wedge}{\mathbf{B}} = (\mathbf{a}_1 \ \ldots \ \mathbf{a}_j \ \ldots \ \mathbf{a}_m).$$

Ikus dezagun nola kalkula daitekeen $\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B$ oinarriko soluzio berria. (2.4) ekuazioan $\mathbf{a}_r$ askatuz, hau lortuko da:

$$\mathbf{a}_r = \frac{1}{y_{rj}}\mathbf{a}_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \frac{y_{ij}}{y_{rj}}\mathbf{a}_i.$$

(2.2) ekuazioan r. batugaia bereiziz, hau lortuko da:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} x_{Bi}\mathbf{a}_i + x_{Br}\mathbf{a}_r = \mathbf{b}.$$

$\mathbf{a}_r$ bektorea ordezkatuz,

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} x_{Bi}\mathbf{a}_i + x_{Br}[\frac{1}{y_{rj}}\mathbf{a}_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \frac{y_{ij}}{y_{rj}}\mathbf{a}_i] = \mathbf{b}.$$

Batugaiak berrantolatuz,

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} (x_{Bi} - x_{Br}\frac{y_{ij}}{y_{rj}})\mathbf{a}_i + \frac{x_{Br}}{y_{rj}}\mathbf{a}_j = \mathbf{b}.$$

Eredu linealaren murrizketak betetzen dituzten m osagaiko multzo bat lortu da $\overset{\wedge}{\mathbf{B}}$ oinarrirako, eta ondorioz, oinarriko soluzio berria osatzen du.

$$\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B = \begin{cases} x_{Bi} - x_{Br}\dfrac{y_{ij}}{y_{rj}} & i \neq r \\ \dfrac{x_{Br}}{y_{rj}} & i = r \end{cases} \tag{2.5}$$

$\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B$ oinarriko soluzio berria zein baldintzatan den bideragarria aztertu behar da orain. Bideragarria izan dadin, osagai guztiek zero baino handiagoak edo berdinak izan behar dute, hau da,

- r. osagairako, $\hat{x}_{Br}= \dfrac{x_{Br}}{y_{rj}} \geq 0.$

  $y_{rj} \neq 0$ eta $x_{Br} \geq 0$ direnez, $\dfrac{x_{Br}}{y_{rj}} \geq 0$ izateko, $y_{rj} > 0$ bete behar da.

- Gainerakoetarako, $\hat{x}_{Bi}= x_{Bi} - x_{Br}\dfrac{y_{ij}}{y_{rj}} \geq 0, \ \ i = 1, \ldots, m, \ i \neq r$

  $x_{Bi} \geq 0$, $x_{Br} \geq 0$ eta $y_{rj} > 0$ izanik, ondoko kasuak eman daitezke:

  - $y_{ij} < 0$ bada, $\hat{x}_{Bi}= x_{Bi} - x_{Br}\dfrac{y_{ij}}{y_{rj}} \geq 0$ betetzen da.
  - $y_{ij} = 0$ bada, $\hat{x}_{Bi}= x_{Bi} - x_{Br}\dfrac{y_{ij}}{y_{rj}} = x_{Bi} \geq 0$ da.
  - $y_{ij} > 0$ bada, $\hat{x}_{Bi}= x_{Bi} - x_{Br}\dfrac{y_{ij}}{y_{rj}} \geq 0$ izateko,

    $\hat{x}_{Bi}= x_{Bi} - x_{Br}\dfrac{y_{ij}}{y_{rj}} \geq 0 \iff \dfrac{x_{Bi}}{y_{ij}} - \dfrac{x_{Br}}{y_{rj}} \geq 0 \iff \dfrac{x_{Bi}}{y_{ij}} \geq \dfrac{x_{Br}}{y_{rj}}$
    baldintza bete behar da.

Baldintza guztiak kontuan izanik, oinarrian ordezkatua izango den $\mathbf{a}_r$ bektoreak ondoko baldintza bete behar du:

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \min_i \{\frac{x_{Bi}}{y_{ij}} / y_{ij} > 0\} \tag{2.6}$$

Oraingoz, frogatu da (2.6) irizpidea betetzen duen $\mathbf{a}_r$ bektorea ordezkatua izan daitekeela oinarrian eta oinarriko soluzio bideragarri berri bat lortuko dela. Ikus dezagun zein baldintzatan izango den $\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B$ soluzioa $\mathbf{x}_B$ baino hobea, hau da, zein baldintzatan beteko den ondokoa:

$$\hat{z}=\overset{\wedge}{\mathbf{c}}{}_B^T\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B \geq \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B = z.$$

$\hat{z}$ kalkulatuko dugu r. batugaia bereiziz,

$$\hat{z}= \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_{Bi}\hat{x}_{Bi}= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m} \hat{c}_{Bi}\hat{x}_{Bi} + \hat{c}_{Br}\hat{x}_{Br} \ .$$

$\hat{c}_{Bi}$, $\hat{c}_{Br}$, $\hat{x}_{Bi}$ eta $\hat{x}_{Br}$ balioak ordezkatuz,

$$\hat{z}= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m} c_{Bi}(x_{Bi} - x_{Br}\frac{y_{ij}}{y_{rj}}) + c_j\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = (*)$$

$i = r$ denean, ondokoa betetzen da:

$$c_{Br}(x_{Br} - x_{Br}\frac{y_{rj}}{y_{rj}}) = 0.$$

Ondorioz, batukarian $i \neq r$ baldintza ken daiteke, eta honela geratuko da:

$$(*) = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}(x_{Bi} - x_{Br}\frac{y_{ij}}{y_{rj}}) + c_j\frac{x_{Br}}{y_{rj}}.$$

Kalkuluak eginez,

$$\hat{z} = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}x_{Bi} - \frac{x_{Br}}{y_{rj}}\sum_{i=1}^{m} c_{Bi}y_{ij} + c_j\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = z - \frac{x_{Br}}{y_{rj}}(z_j - c_j).$$

Hau ondoriozta daiteke:

$$\hat{z} = z - \frac{x_{Br}}{y_{rj}}(z_j - c_j) \tag{2.7}$$

Hortaz,

$$\hat{z} \geq z \iff -\frac{x_{Br}}{y_{rj}}(z_j - c_j) \geq 0 \iff \frac{x_{Br}}{y_{rj}}(z_j - c_j) \leq 0.$$

$x_{Br} \geq 0$ eta $y_{rj} > 0$ betetzen denez, $z_j - c_j < 0$ denean, $\hat{z} \geq z$ betetzen da.

Oinarrian $\mathbf{a}_r$ bektorea ordezkatzera sartuko den $\mathbf{a}_j$ bektoreari dagokion balio adierazleak $z_j - c_j < 0$ baldintza bete behar du. Ohikoa da balio adierazle negatiboen artetik minimoa duen bektorea aukeratzea, oinarrian sartuko den $\mathbf{a}_k$ bektorea ondoko irizpidea betetzen duena izango delarik:

$$z_k - c_k = \min_j\{z_j - c_j / z_j - c_j < 0\} \tag{2.8}$$

□

2.4.3 Oinarri aldaketarako aukeraketa-erregelak

Aurreko teoreman frogatutako prozesuaren arabera, oinarri bat aukeratu eta dagozkion oinarriko soluzio bideragarria eta helburu funtziorako balioa kalkulatu behar dira; ondoren, oinarriko bektore bat ordezkatzera sartuko den bektorea aukeratu behar da oinarri berri bat lortzeko, eta dagokion soluzioa bideragarria eta hobea izango dela ziurtatuz. Bektoreen aukeraketarako erregelak ondokoak dira.

- *Oinarrira sartuko den bektorea aukeratzeko erregela*. Ondoko erregela betetzen duen $\mathbf{a}_k$ bektorea sartuko da oinarrian:

$$\boxed{z_k - c_k = \min_j \{z_j - c_j / z_j - c_j < 0\}}$$

  Soluzio berri bat kalkulatzean, helburu funtziorako balio berria, $\stackrel{\wedge}{z} \geq z$, hobea izango dela bermatzen du erregela honek.

- *Oinarritik irtengo den bektorea aukeratzeko erregela*. Oinarrian sartuko den $\mathbf{a}_k$ bektoreak ondoko erregela betetzen duen oinarriko $\mathbf{a}_r$ bektorea ordezkatuko du:

$$\boxed{\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ik}} / y_{ik} > 0 \right\}}$$

  Soluzio berria, $\stackrel{\wedge}{\mathbf{x}}_B \geq \mathbf{0}$, bideragarria izango dela bermatzen du erregela honek.

2.4.4 $\stackrel{\wedge}{\mathbf{x}}_B$ eta $\stackrel{\wedge}{z}$ kalkulatzeko formulak

Oinarrira sartuko den bektorea eta oinarritik irtengo dena aukeratzeko ikusi ditugun erregelak kontuan hartuz, oinarriko soluzio bideragarri berria eta helburu funtziorako balio berria kalkulatzeko (2.5) eta (2.7) formulak honela geratuko dira:

- Soluzio berriaren kalkulua.

$$\boxed{\stackrel{\wedge}{\mathbf{x}}_B = \begin{cases} x_{Bi} - x_{Br} \dfrac{y_{ik}}{y_{rk}} & i \neq r \\ \dfrac{x_{Br}}{y_{rk}} & i = r \end{cases}} \qquad (2.9)$$

- Helburu funtziorako balio berriaren kalkulua.

$$\boxed{\stackrel{\wedge}{z} = z - \frac{x_{Br}}{y_{rk}} (z_k - c_k)} \qquad (2.10)$$

Adibidea. Ondoko problema linealean aurreko teorema aplikatuko dugu.

$$\max \ z = 4x_1 + 5x_2 + x_3$$

hauen mende

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 8 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq -2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Hasteko, eredua forma estandarrean jarri behar da. Horretarako x_4 eta x_5 nasaitze-aldagaiak gehitu ditugu eta $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ bihurtuko dugu.

$$\max \ z = 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

hauen mende

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad +x_4 \qquad\quad &= 8 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\quad -x_5 &= 2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Oinarri bat aukeratuko dugu, koefizienteen matrizeko lehenengo eta laugarren zutabeek osatutakoa, adibidez. Dagokion oinarriko soluzioa kalkulatuko dugu.

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Soluzio hau bideragarria da, eta beraz, soluzioen eskualdekoa da. Helburu funtzioaren balioa honakoa da:

$$z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = (4, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 8.$$

Azter dezagun soluzio hori hobetzeko aukera ba ote dagoen.

Oinarrira sartuko den bektorearen aukeraketa. Aukera egiteko beharrezkoa gertatzen da oinarrikoak ez diren $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ eta $\mathbf{a}_5$ bektoreei dagozkien $z_2 - c_2$, $z_3 - c_3$ eta $z_5 - c_5$ balioak kalkulatzea.

- $z_2 - c_2$ balioaren kalkulua.

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; ; \; \mathbf{y}_2 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$z_2 - c_2 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_2 - c_2 = (4,\ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 5 = 3 \ > \ 0.$$

- $z_3 - c_3$ balioaren kalkulua.

$$\mathbf{a}_3 \ = \ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ ; \ \mathbf{y}_3 \ = \ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_3 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z_3 - c_3 = (4,\ 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 = -5 \ < \ 0 \rightarrow \text{soluzioa hobe daiteke.}$$

- $z_5 - c_5$ balioaren kalkulua.

$$\mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \; ; \; \mathbf{y}_5 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_5 - c_5 = (4, 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = -4 \ < \ 0 \rightarrow \text{soluzioa hobe daiteke.}$$

Soluzioa hobetzeko bi aukera daude: $\mathbf{a}_3$ edo $\mathbf{a}_5$ oinarriratzea. Oinarrian sartuko den bektorearen aukeraketarako erregela erabili behar da erabakia hartzeko.

$$z_k - c_k = \min_j \{z_j - c_j \ / \ z_j - c_j < 0\} =$$

$$= \min\{z_3 - c_3 = -5 \ , \ z_5 - c_5 = -4\} = -5.$$

Hortaz, $\mathbf{a}_3$ bektorea oinarriratuko da.

Oinarritik irtengo den bektorearen aukeraketa. Oinarritik irtengo den bektorea aukeratzeko, $\mathbf{y}_3$ koordenatu-bektorea eta $\mathbf{x}_B$ soluzio-bektorea hartu behar dira kontuan.

$$\mathbf{y}_3 = \begin{pmatrix} y_{13} \\ y_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Irteera-erregela betetzen duen $\mathbf{a}_r$ bektorea irtengo da oinarritik,

$$\frac{x_{Br}}{y_{r3}} = \min_i \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{i3}} \;/\; y_{i3} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{x_{B2}}{y_{23}} = \frac{6}{2} \right\} = 3.$$

Oinarriko bigarren bektorea irtengo da, hau da, $\mathbf{a}_4$. Oinarria aldatuko da, baita oinarriko soluzioa eta helburu funtziorako balioa ere.

- (2.9) formula erabiliz, soluzio berria kalkulatuko dugu.

  $\hat{x}_{B1} = x_{B1} - x_{B2}\dfrac{y_{13}}{y_{23}} = 2 - 6\left(\dfrac{-1}{2}\right) = 5.$

  $\hat{x}_{B2} = \dfrac{x_{B2}}{y_{23}} = \dfrac{6}{2} = 3.$

- (2.10) formula erabiliz, helburu funtziorako balio berria kalkulatuko dugu.

  $\hat{z} = z - \dfrac{x_{B2}}{y_{23}}(z_3 - c_3) = 8 - \dfrac{6}{2}(-5) = 23.$

$\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B$ soluzio berria bideragarria da eta helburu funtzioaren balioa hobetu egiten du. Teorema berriro ere aplika daiteke $z_j - c_j$ balio guztiak ez-negatiboak izango diren arte. Baldintza hori betetzen denean, soluzioa optimoa izango da; baldintza hori ondoko teoreman ematen da. □

2.4.2 Teorema. (Optimaltasunerako baldintzak). *Izan bedi problema lineala forma estandarrean.*

$$\begin{aligned} \max \;\; z \;&=\; \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \textit{hauen mende} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Izan bedi $\mathbf{A}$ matrizean aukeratutako $\mathbf{B}$ oinarria eta izan bitez $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ dagokion oinarriko soluzio bideragarria eta $z = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$ helburu funtziorako balioa. $\mathbf{A}$ matrizeko $\mathbf{a}_j$ bektore guztietarako $z_j - c_j$ balioak zero baino handiagoak edo berdinak badira, $\mathbf{x}_B$ problemarako oinarriko soluzio bideragarri optimoa da.

2.4.5 Soluzio optimo bornegabea

Eredu linealen ebazpen grafikoan ikusi genuen bezala, zenbait kasutan helburu funtzioaren balio optimoa ez da finitua, etengabe haz daitekeelarik. Ondoko teoremak finkatuko ditu soluzioa bornegabea izateko bete behar diren baldintzak.

2.4.3 Teorema. *Izan bedi ondoko problema lineala forma estandarrean.*

$$\begin{aligned} \max \;\; z \;\; &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \textit{hauen mende} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Izan bedi $\mathbf{A}$ *matrizean aukeratutako* $\mathbf{B}$ *oinarria, eta izan bitez* $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ *dagokion oinarriko soluzio bideragarria eta* $z = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$ *helburu funtzioaren balioa.* $\mathbf{A}$ *matrizean* $z_k - c_k < 0$ *duen* $\mathbf{a}_k$ *bektore bat existitzen bada eta* $\mathbf{a}_k$ *bektore horrentzat* y_{ik}*,* $i = 1, \ldots, m$*, koordenatu guztiak zero baino txikiagoak edo berdinak badira, ereduaren soluzioa bornegabea da.*

Froga. Izan bedi $\mathbf{x}_B$ oinarriko soluzio bideragarri bat. Soluzioa denez, problemaren murrizketak betetzen ditu:

$$x_{B1}\mathbf{a}_1 + x_{B2}\mathbf{a}_2 + \cdots + x_{Bm}\mathbf{a}_m = \mathbf{b}.$$

$z_k - c_k < 0$ duen $\mathbf{a}_k$ bektore bat existitzen bada, helburu funtzioaren balioa hobe daiteke. Baina, $y_{ik} \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$, betetzen denez, oinarriko bektore bat bera ere ezin da ordezkatua izan beste oinarriko soluzio bideragarri bat kalkulatzeko. Hala ere, soluzio bat kalkula daiteke (ez oinarrikoa) zeinarentzat z helburu funtzioaren balioak infiniturantz joko duen; helburu funtzioaren balioa bornegabea izango da.

Aurreko ekuazioaren ezkerreko atalean $\theta\mathbf{a}_k$ gehitu eta kendu daiteke, θ edozein balio erreal positibo delarik. Hau lortuko da:

$$x_{B1}\mathbf{a}_1 + x_{B2}\mathbf{a}_2 + \cdots + x_{Bm}\mathbf{a}_m - \theta\mathbf{a}_k + \theta\mathbf{a}_k = \mathbf{b}.$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{Bi}\mathbf{a}_i - \theta\mathbf{a}_k + \theta\mathbf{a}_k = \mathbf{b} \tag{2.11}$$

$\mathbf{B}$ oinarrian ez dagoen bektore bat da $\mathbf{a}_k$, eta oinarrikoen konbinazio lineal moduan idatz daiteke:

$$\mathbf{a}_k = \sum_{i=1}^{m} y_{ik}\mathbf{a}_i.$$

(2.11) ekuazioan, $\mathbf{a}_k$ bektorearen ordez oinarrriko bektoreekiko bere adierazpena idazten badugu, soluzioa honela adieraz daiteke:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{Bi}\mathbf{a}_i - \theta \sum_{i=1}^{m} y_{ik}\mathbf{a}_i + \theta\mathbf{a}_k = \mathbf{b}.$$

Kalkuluak eginez,

$$\sum_{i=1}^{m}(x_{Bi} - \theta y_{ik})\mathbf{a}_i + \theta\mathbf{a}_k = \mathbf{b}.$$

Modu honetan lortutako bektoreak zero baino handiagoak diren m osagai baino gehiago izan ditzake, eta beraz, oinarrikoa ez den soluzioa da.

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_{B1} - \theta y_{1k} \\ x_{B2} - \theta y_{2k} \\ \vdots \\ x_{Bm} - \theta y_{mk} \\ 0 \\ \vdots \\ \theta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Egiazta daiteke aurreko soluzioa bideragarria dela. $\theta > 0$ izanik, eta jakinda $x_{Bi} \geq 0,\ y_{ik} \leq 0,\ i = 1, \ldots, m$, direla, $x_{Bi} - \theta y_{ik} \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Helburu funtzioaren balioa soluzio horretan

$$\hat{z} = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}(x_{Bi} - \theta y_{ik}) + c_k\theta = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}x_{Bi} - \theta \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}y_{ik} + c_k\theta =$$

$$= z - \theta z_k + \theta c_k = z - \theta(z_k - c_k)$$

da; $z_k - c_k < 0$ denez, $\hat{z}$ balioa hazi egingo da θ balioaren arabera, eta problemaren soluzioa bornegabea izango da. $\square$

Adibidea. Ondoko problemaren soluzioa kalkula dezagun.

$$\begin{aligned} \max\ z &= -3x_1 + 2x_2 \\ \text{hauen mende} & \\ x_1 - x_2 &\leq 5 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma estandarra ondokoa da:

$$\max\ z = -3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

hauen mende

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & +x_3 & & = \ \ 5 \\ 2x_1 & -3x_2 & & +x_4 & = 10 \\ & & & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 & \geq 0 \end{array}$$

$\mathbf{B} = (\mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4)$ oinarria aukeratu eta dagokion oinarriko soluzioa kalkulatuko dugu.

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Soluzio hori bideragarria da, eta helburu funtzioaren balioa honakoa da:

$$z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = (0,\ 0) \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 0.$$

Hobekuntzaren teorema aplikatuko dugu. $z_1 - c_1$ eta $z_2 - c_2$ kalkulatuko ditugu.

- $z_1 - c_1$ balioaren kalkulua.

  $$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};\ \mathbf{y}_1 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  $$z_1 - c_1 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_1 - c_1 = (0,\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - (-3) = 3.$$

- $z_2 - c_2$ balioaren kalkulua.

  $$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} ;\ \mathbf{y}_2 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

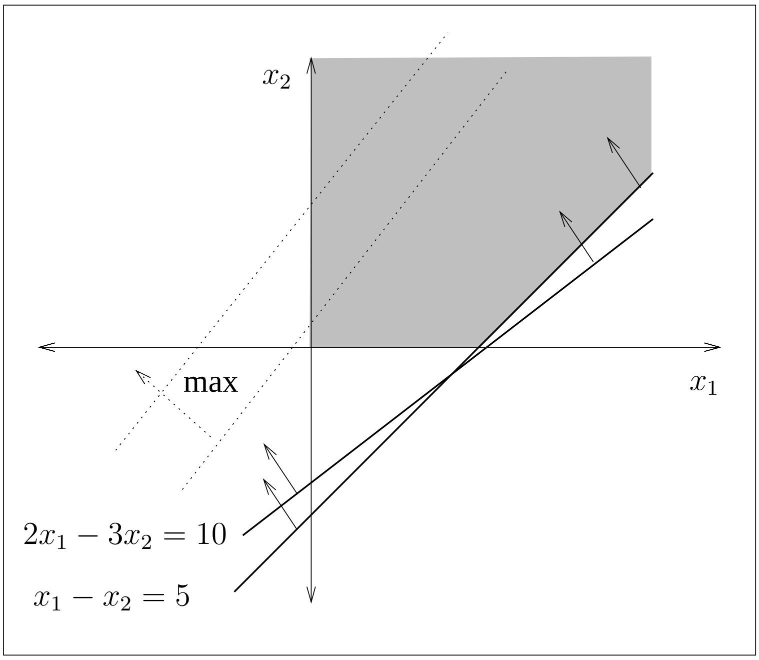
  $$z_2 - c_2 = \mathbf{c}_B^T\mathbf{y}_2 - c_2 = (0,\ 0) \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 = -2.$$

Aukeraketarako erregela aplikatuz, $\mathbf{a}_2$ bektorea oinarriratzea erabakitzen da.

$$\min_j \{ z_j - c_j \ / \ z_j - c_j < 0 \} \ = \ \min \{ z_2 - c_2 = -2 \} \ = \ -2$$

Oinarritik irtengo den bektorea aukeratzerakoan, $\mathbf{y}_2$ bektorearen koordenatu guztiak negatiboak direla ikusten dugu, eta ondorioz, oinarritik ezin da bektore bat bera ere atera. 2.4.3. Teoremaren baldintzak betetzen dira eta soluzioa bornegabea da.

Problemak jatorrizko bi aldagai besterik ez dituenez, grafikoki ebatz daiteke, soluzioa bornegabea dela egiaztatzeko.



□

2.4.6 Soluzio optimo anizkoitza

Soluzio grafikoan ikusi dugu problemarako soluzio optimo bat baino gehiago existitu daitekeela. Horrelakoetan, problemak *soluzio optimo anizkoitza* duela esaten da. Soluzio mota hau aldagai bornatuetarako edo aldagai bornegabeetarako aurki daiteke.

Ondoko teoremetan soluzio optimo anizkoitza egoteko baldintzak finkatuko dira.

2.4.4 Teorema. *Izan bedi ondoko eredu lineala forma estandarrean.*

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \textit{hauen mende} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Izan bedi $\mathbf{A}$ *matrizean aukeratutako* $\mathbf{B}$ *oinarria eta izan bitez* $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ *dagokion oinarriko soluzio bideragarria eta* $z = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$ *helburu funtzioaren balioa.* $\mathbf{A}$ *matrizeko* $\mathbf{a}_j$ *bektore guztietarako* $z_j - c_j \geq 0$ *betetzen bada,* $\mathbf{x}_B$ *soluzioa optimoa da. Horretaz gain,* $z_k - c_k = 0$ *duen, oinarrikoa ez den eta koordenaturen bat* $y_{ik} > 0$*,* $i = 1, \ldots, m$*, duen* $\mathbf{a}_k$ *bektore bat existitzen bada, soluzio optimo anizkoitza existitzen da.*

Froga. Izan bedi $\mathbf{x}_B$ oinarriko soluzio bideragarri bat. $\mathbf{A}$ matrizeko $\mathbf{a}_j$ bektore guztietarako $z_j - c_j \geq 0$ betetzen denez, 2.4.2. Teorematik esan dezakegu $\mathbf{x}_B$ optimoa dela.

$z_k - c_k = 0$ duen, $\mathbf{B}$ oinarrikoa ez den eta koordenaturen bat $y_{ik} > 0$, $i = 1, \ldots, m$, duen $\mathbf{a}_k$ bektore bat existitzen bada, $\mathbf{a}_k$ bektorea oinarrian sar daiteke ondoko erregela betetzen duen oinarriko $\mathbf{a}_r$ ordezkatzera:

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ik}} / y_{ik} > 0 \right\}$$

$\overset{\wedge}{\mathbf{B}}$ oinarri berri bat sortu da, baita $\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B$ oinarriko soluzio bideragarri berri bat ere. Helburu funtzioaren balioa soluzio berrian ondokoa da:

$$\hat{z} = z - \frac{x_{Br}}{y_{rk}}(z_k - c_k) = z - 0 = z.$$

Ondorioz, $\overset{\wedge}{\mathbf{x}}_B$ ere optimoa da, helburu funtzioaren balioa $\mathbf{x}_B$ soluzioarekin lortutako berbera baita. □

2.4.5 Teorema. *Izan bedi ondoko eredu lineala forma estandarrean.*

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \textit{hauen mende} \quad & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Izan bitez $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ *ereduaren oinarriko soluzio bideragarri optimoak. Soluzio horien konbinazio lineal ganbil orokortu guztiak ereduaren soluzio bideragarri optimoak dira.*

Froga. Izan bedi konbinazio lineal ganbil guztiek osatutako $\mathbf{x}$ bektorea.

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \mathbf{x}_i \ , \quad \mu_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, p \ , \quad \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 1$$

Froga dezagun $\mathbf{x}$ soluzioa, bideragarria eta optimoa dela.

1. $\mathbf{x}$ soluzioa da.

   $\mathbf{x}_i,\ i = 1, \ldots, p$, soluzioak direnez, $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{b}$ betetzen dute. Orduan,

   $$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\sum_{i=1}^{p} \mu_i \mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{b} \sum_{i=1}^{p} \mu_i = \mathbf{b}.$$

   Ondorioz, $\mathbf{x}$ soluzioa da.

2. $\mathbf{x}$ bideragarria da.

   $\mathbf{x}_i \geq \mathbf{0}$ eta $\mu_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, p$, betetzen direnez,

   $$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \mathbf{x}_i \geq \mathbf{0}.$$

   Ondorioz, $\mathbf{x}$ bideragarria da.

3. $\mathbf{x}$ optimoa da.

   $\mathbf{x}_i,\ i = 1, \ldots, p$, optimoak dira, hau da, $z^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_i$. Orduan,

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T \sum_{i=1}^{p} \mu_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \mathbf{c}^T \mathbf{x}_i = z^* \sum_{i=1}^{p} \mu_i = z^*.$$

Ondorioz, $\mathbf{x}$ optimoa da.

$\square$

2.4.4. Teoreman eta 2.4.5. Teoreman soluzio optimo anizkoitzerako baldintzak ezartzen dira, aldagai bornatuetarako. Dena den, helburu funtzioari balio bornatua emango dion soluzio optimo anizkoitza egon daiteke, aldagaien balio bornegabeetarako. Ondoko teoreman finkatuko dira mota honetako soluziorako baldintzak.

2.4.6 Teorema. *Izan bedi ondoko problema lineala forma estandarrean.*

$$\max \ z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

hauen mende

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Izan bedi $\mathbf{A}$ *matrizean aukeratutako* $\mathbf{B}$ *oinarria, eta izan bitez* $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ *dagokion oinarriko soluzio bideragarria eta* $z = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$ *helburu funtzioaren balioa.* $\mathbf{A}$ *matrizeko* $\mathbf{a}_j$ *bektore guztietarako* $z_j - c_j \geq 0$ *betetzen bada,* $\mathbf{x}_B$ *soluzioa optimoa da. Oinarrikoa ez den eta* $z_k - c_k = 0$ *duen* $\mathbf{a}_k$ *bektore bat existitzen bada eta bere* y_{ik}*,* $i = 1, \dots, m,$ *koordenatu guztiak zero baino txikiagoak edo berdinak baditu, aldagaietarako balio bornegabeko soluzio optimo anizkoitza existitzen da.*

Froga. Soluzioak 2.4.3. Teoreman bezala kalkulatzen dira, eta (2.12)-ren modukoak dira (ikus 47. orrialdea).

Aipatutako teoreman bezala, helburu funtzioaren balioa honela kalkula daiteke:

$$\hat{z} = z - \theta(z_k - c_k).$$

Kasu honetan $z_k - c_k = 0$ denez, $\hat{z} = z$ betetzen da. Ondorioz, (2.12) ekuazioko $\overset{\wedge}{\mathbf{x}}$ soluzioaren moduko soluzio guztiak optimoak dira. $\square$

2.4.7 Hasierako oinarriko soluzio bideragarria

Forma estandarrean dagoen eredu lineal baten soluzio optimoa kalkulatzeko, oinarriko soluzio bideragarri batetik hasiko gara. Hasierako oinarritzat oinarri kanonikoa hartzen bada, dagokion oinarriko soluzio bideragarria kalkulatzea erraza izango da, $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} = \mathbf{I}$ betetzen delako. Lehenengo soluzioa kalkulatu ondoren, hobekuntzaren 2.4.1. Teorema aplikatuko dugu, optimaltasunare 2.4.2. Teoremaren baldintzak betetzen diren arte.

Lehenengo oinarri kanonikoa aukeratzeko ondoko bi kasuak gerta daitezke.

1. **Kasua. Nasaitze-aldagaiez osatutako lehenengo oinarria.**

   Eredu lineala honelakoa bada:

$$\begin{aligned} \max \quad z \quad &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{hauen mende} \quad & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

   $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ izanik, eredua forma estandarrean idazteko, nasaitze-aldagaiez osatutako $\mathbf{y}$ bektorea gehituko dugu.

$$\begin{aligned} \max \ z \ &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{0}^T\mathbf{y} \\ \text{hauen mende} \quad & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x}, \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

   Horrela, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ oinarria aukeratu ahal izango dugu. $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$ da eta oinarri honetarako kalkuluak egingo ditugu.

   - Soluzioaren kalkulua. Soluzioa bideragarria da.

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{I}\mathbf{b} = \mathbf{b} \geq \mathbf{0}.$$

   - Helburu funtzioaren balioa. $\mathbf{B}$ oinarriko bektore guztiak nasaitze-aldagaiei dagozkienez, $\mathbf{c}_B^T = \mathbf{0}$ betetzen da.

$$z = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B = \mathbf{0}^T\mathbf{x}_B = 0.$$

- $\mathbf{A}$ matrizeko $\mathbf{a}_j$ bektoreetarako ondoko kalkuluak egin behar dira:
  - Koordenatu-bektorea.

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j = \mathbf{I}\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j.$$

  - $z_j - c_j$ balioaren kalkulua. $\mathbf{B}$ oinarriko bektore guztiak nasaitze-aldagaiei dagozkienez, $\mathbf{c}_B^T = \mathbf{0}$ betetzen da.

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T\mathbf{y}_j - c_j = 0 - c_j = -c_j.$$

Hasierako oinarria kanonikoa aukeratzen bada, oinarri horri dagozkion kalkuluak problema linealaren parametroekin bat datozela ikusten da, eta hori abantaila bat da.

Adibidea. Izan bedi ondoko eredu lineala:

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{hauen mende} & \\ 3x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nasaitze-aldagaiak gehituz, ereduaren forma estandarra ondokoa da:

$$\begin{aligned} \max \quad z \quad &= 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{hauen mende} & \\ 3x_1 + x_2 \quad +x_3 \qquad &= 2 \\ x_1 - x_2 \qquad\quad +x_4 \quad &= 3 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{B} = (\mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4) = \mathbf{I}$ oinarri kanonikoa aukeratuko dugu.

- Soluzioaren kalkulua. Soluzioa bideragarria da.

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{I}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Helburu funtzioaren balioa.

$$z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = (0,0) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

- $\mathbf{y}_j$ koordenatu-bektoreen eta $z_j - c_j$ balioen kalkulua $\mathbf{A}$ matrizeko bektore guztietarako.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \;\; \rightarrow \;\; \mathbf{y}_1 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_1 - c_1 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_1 - c_1 = (0,0) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = -2$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\; \rightarrow \;\; \mathbf{y}_2 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$z_2 - c_2 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_2 - c_2 = (0,0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 = -3$$

$$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\; \rightarrow \;\; \mathbf{y}_3 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_3 - c_3 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_3 - c_3 = (0,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0$$

$$\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\; \rightarrow \;\; \mathbf{y}_4 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_4 - c_4 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_4 - c_4 = (0,0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 0$$

□

2. kasua. Aldagai artifizialak hasierako oinarrian.

Eredu linealean $=$ moduko murrizketak baldin badaude edo $\geq$ modukoak $\mathbf{b}$ positiboa izanik, ezin izango da nasaitze-aldagaiekin oinarri kanonikoa osatu. Arazo hau gainditzeko eta hasierako oinarri gisa kanonikoa aukeratu ahal izateko, aldagai laguntzaile batzuk erabiliko dira, *aldagai artifizial* izenez ezagutzen direnak. Ondoko adibidean ikusiko dugu.

Adibidea. Izan bedi ondoko eredu lineala:

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{hauen mende} & \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ereduaren forma estandarra lortzeko lehenengo murrizketan x_3 nasaitze-aldagaia gehitu eta bigarren murrizketan x_4 nasaitze-aldagaia kenduko dira.

$$\begin{aligned} \max \quad z \quad &= \quad 3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{hauen mende} & \\ x_1 + x_2 \quad + x_3 \qquad\quad &= 3 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad - x_4 \quad &= 2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Koefizienteen matrizean ezin da identitatea aukeratu. Oinarri kanonikoa aukeratu ahal izateko, behar adina aldagai artifizial gehituko dugu. Kasu honetan, bigarren murrizketan $w_1 \geq 0$ aldagai artifiziala gehitzen badugu, murrizketak honela geratuko dira:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 3 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad - x_4 + w_1 \quad &= 2 \end{aligned}$$

Horrela, $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_{w1})$ oinarri kanonikoa aukeratu ahal izango dugu eta dagokion soluzioa bideragarria da.

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Baina, $\mathbf{x}_B$ ez da hasierako problemaren soluzioa, $w_1 = 2 > 0$ delako, eta ondorioz, $x_1 + 2x_2 - x_4 = 2$ murrizketa ez da betetzen. □

2.4.8 Simplex metodoaren taula

Forma estandarrean dagoen eredu lineal baten soluzio optimoa kalkulatzerakoan, oinarri bakoitzari dagozkion kalkuluak taula batean jasoko dira, *Simplex metodoaren taula*. Prozesua beti $\mathbf{A}$ matrizean oinarri kanonikoa aukeratuz hasten da. Eredua forma estandarrean jartzean ezin bada nasaitze-aldagaiez osatutako oinarri kanonikoa aukeratu, behar adina aldagai artifizial gehituko zaizkio ereduari. Simplex metodoaren taula ondokoa da:

		Jatorrizko aldagaiak			Aldagai laguntzaileak				
		x_1	$\dots$	x_n	x_{n+1}	$\dots$	x_j	$\dots$	
		$z_1 - c_1$	$\dots$	$z_n - c_n$	$z_{n+1} - c_{n+1}$	$\dots$	$z_j - c_j$	$\dots$	z
c_{B1}	$\mathbf{a}_{B1}$	y_{11}	$\dots$	y_{1n}	$y_{1,n+1}$	$\dots$	$y_{1,j}$	$\dots$	x_{B1}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$
c_{Bi}	$\mathbf{a}_{Bi}$	y_{i1}	$\dots$	y_{in}	$y_{i,n+1}$	$\dots$	$y_{i,j}$	$\dots$	x_{Bi}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$
c_{Bm}	$\mathbf{a}_{Bm}$	y_{m1}	$\dots$	y_{mn}	$y_{m,n+1}$	$\dots$	$y_{m,j}$	$\dots$	x_{Bm}

- Ereduaren jatorrizko aldagaiak, $x_1, \dots, x_n$, eta ereduari gehitutako nasaitze-aldagaiak eta aldagai artifizialak, $x_{n+1}, \dots, x_j, \dots$, taularen goikaldean agertzen dira.
- Lehenengo zutabean oinarriko bektoreak daude: $\mathbf{a}_{B1}, \dots, \mathbf{a}_{Bi}, \dots, \mathbf{a}_{Bm}$.
- Gainerako zutabeetan ereduaren $\mathbf{a}_j$ bektore guztien $\mathbf{y}_j$ koordenatu-bektoreak agertzen dira oinarriarekiko.

- Taulatik kanpo $\mathbf{c}^T$ bektorearen $c_{B1}, \dots, c_{Bi}, \dots, c_{Bm}$ oinarriko osagaiak agertzen dira.
- Taularen azken zutabean daude oinarriko soluzio bideragarriaren osagaiak: $x_{B1}, \dots, x_{Bi}, \dots, x_{Bm}$.
- Lehenengo errenkadan daude $z_j - c_j$ balioak. Balio horiei *balio adierazle* deitzen zaie, eta errenkadari *adierazleen errenkada*. Errenkadako azken balioa, z, helburu funtzioaren balioa da.

Adibidea. Har dezagun 54. orrialdeko adibideko eredua forma estandarrean. Oinarri kanonikoari dagokion bere simplex taula ondokoa da:

		x_1	x_2	x_3	x_4	
		-2	-3	0	0	0
0	$\mathbf{a}_3$	3	1	1	0	2
0	$\mathbf{a}_4$	1	-1	0	1	3

□

Aurreko adibidean bezala, hasierako oinarri kanonikoan nasaitze-aldagaiak besterik ez badaude, simplex metodoaren taula $\mathbf{B}$ oinarriarekiko honela idatz daiteke:

		$x_1\ x_2\ \dots\ x_n$	$x_{n+1}\ x_{n+2}\ \dots x_{n+m}$	
		$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T$	$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$
$\mathbf{c}_B$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{x}_B$

Hasierako taulan $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$ da. Dena den, oinarria edozein dela ere, hasierako taulan identitate matrizeari dagozkion zutabeetan aurkitzen da $\mathbf{B}^{-1}$, simplex metodoaren edozein iteraziotan. Aurreko adibidean bezala, lehenengo oinarria nasaitze-aldagaiez osaturik badago, aurreko taulan adierazitako lekuan agertuko da $\mathbf{B}^{-1}$. Aldiz, lehenengo oinarrian aldagai artifizialak baldin badaude, $\mathbf{B}^{-1}$ zutabeen kokapena identifikatu egin beharko da.

2.5 Zigortze-metodoa

Ereduaren forma estandarrean, hasierako oinarri kanonikoa aukeratu ezin den kasuetan erabili behar da metodo hau. 56. orrialdeko adibidean ikusi dugun bezala, arazoari aurre egiteko aldagai artifizialak gehituko dira.

Murrizketetan aldagai artifizialak gehitzeak jatorrizko problemaren formulazioa aldatu egiten du. Aldagai artifizialak dituen problemaren soluzioa ez da jatorrizko problemaren soluzio izango aldagai artifizialen batek zero baino balio handiago bat hartzen badu. Oinarri optimoan aldagai artifizialen agerpena ekiditeko, beharrezkoa da helburu funtzioa zigortzea. Zigortze honek ziurtatu behar du helburu funtzioaren balioa neurri handi batean kaltetua izango dela aldagai artifizialen batek balio positiboa hartzen badu.

Adibidea. Izan bedi ondoko eredu lineala.

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= -5x_1 + 6x_2 + 7x_3 \\
\text{hauen mende} & \\
2x_1 + 10x_2 - 6x_3 &\geq 30 \\
\frac{5}{2}x_1 - 3x_2 + 5x_3 &\leq 10 \\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Identitate matrizea lortzeko behar diren aldagai artifizialak gehitu eta helburu funtzioa zigortu ondoren, lortuko den forma estandarra ondokoa da:

$$
\max\ z = -5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mw_1 - Mw_2
$$

hauen mende

$$
\begin{array}{rrrrrl}
2x_1 + 10x_2 - 6x_3 & -x_4 & & +w_1 & & = 30 \\
\frac{5}{2}x_1 - 3x_2 + 5x_3 & & +x_5 & & & = 10 \\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & & & & +w_2 & = 5 \\
\end{array}
$$

$$
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ w_1,\ w_2 \geq 0
$$

$\mathbf{B} = \mathbf{I}$ lortzeko, bi aldagai artifizial gehitu ditugu, w_1 eta w_2, eta helburu funtzioa zigortu dugu positiboa eta behar bezain handia izango den M balio batez.

Zigortze-metodoa aplikatzeak esan nahi du hasierako oinarri kanonikoa lortzeko, aldagai artifizialak behar izan direla, $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_{w_1}\ \mathbf{a}_5\ \mathbf{a}_{w_2})$, eta helburu funtzioa zigortu dela. Oinarrian aldagai artifizialak daudenez, adierazleen errenkada kalkulatzeko, $\mathbf{c}_B^T = (-M,\ 0,\ -M)$ dela kontuan izan behar da.

Adibide honetarako, simplex metodoaren taula ondokoa da:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	w_2	
		$-4M+5$	$-12M-6$	$4M-7$	M	0	0	0	$-35M$
$-M$	$\mathbf{a}_{w1}$	2	10	-6	-1	0	1	0	30
0	$\mathbf{a}_5$	$\frac{5}{2}$	-3	5	0	1	0	0	10
$-M$	$\mathbf{a}_{w2}$	2	2	2	0	0	0	1	5

□

2.6 Simplex algoritmoa

Har dezagun maximizatze-forma estandarrean idatzitako problema lineal bat, hasierako $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ oinarria lortzeko behar izan diren aldagai artifizial guztiekin. Simplex algoritmoaren urratsak ondokoak dira.

1. urratsa. Hasierako taula eraiki.

2. urratsa.

- $z_j - c_j < 0$ existitzen bada, soluzioa hobe daiteke. 4. urratsera joan.
- $\mathbf{A}$ matrizeko $\mathbf{a}_j$ bektore guztietarako $z_j - c_j \geq 0$ betetzen bada, 3. urratsera joan.

3. urratsa.

- Balio positiboa duen aldagai artifizialen bat existitzen bada[1], **problema bideraezina** da. Amaitu.

[1] Balio positiboa duen aldagai artifizialik ez bada existitzen, baina oinarrian zero balioa duen aldagai artifizialen bat baldin badago, bi kasu gerta daitezke: soluzioa endekatua izatea edo ekuazio erredundanteak egotea (ikus adibideak 82. orrialdean).

- Oinarrian aldagai artifizialik ez badago, taulako $\mathbf{x}_B$ soluzioa **optimoa** da.
  - * $\mathbf{A}$ matrizeko $\mathbf{a}_j$ bektore guztietarako $z_j - c_j \geq 0$ betetzen da. Baldin oinarriko ez diren $\mathbf{a}_j$ bektore guztietarako $z_j - c_j > 0$ betetzen bada, $\mathbf{x}_B$ **soluzio optimo bakarra da**. Amaitu.
  - * $\mathbf{A}$ matrizeko $\mathbf{a}_j$ bektore guztietarako $z_j - c_j \geq 0$ betetzen da. $\mathbf{A}$ matrizean oinarrikoa ez den eta $z_k - c_k = 0$ duen $\mathbf{a}_k$ bektoreren bat existitzen bada, eta bektore horrentzat y_{ik}, $i = 1, \ldots, m$, koordenaturen bat zero baino handiagoa bada, **beste oinarriko soluzio bideragarri bat** kalkula daiteke. Problemak **soluzio optimo anizkoitza** du. 5. urratsera joan.
  - * $\mathbf{A}$ matrizeko $\mathbf{a}_j$ bektore guztietarako $z_j - c_j \geq 0$ betetzen da. $\mathbf{A}$ matrizean oinarrikoa ez den eta $z_k - c_k = 0$ duen $\mathbf{a}_k$ bektoreren bat existitzen bada, eta bektore horrentzat $y_{ik} \leq 0$ betetzen bada $i = 1, \ldots, m$, problemak **soluzio optimo anizkoitza** du, baina ez da oinarriko soluzioa. Amaitu.

4. urratsa.

- $\mathbf{A}$ matrizean $z_j - c_j < 0$ duen $\mathbf{a}_j$ bektoreren bat existitzen bada eta $\mathbf{y}_j$ koordenatu-bektorean ez badago osagai positiborik, **soluzioa bornegabea** da. Amaitu.
- $\mathbf{A}$ matrizean $z_j - c_j < 0$ duen $\mathbf{a}_j$ bektoreren bat existitzen bada eta $\mathbf{y}_j$ koordenatu-bektorean zero baino handiagoa den osagairen bat badu, 5. urratsera joan.

5. urratsa. Oinarrian ondoko erregelak betetzen dituzten $\mathbf{a}_k$ eta $\mathbf{a}_r$ bektoreak sartu eta irtengo dira, hurrenez hurren.

- Sartuko den $\mathbf{a}_k$ bektoreak hau betetzen du:

$$z_k - c_k = \min_j \{z_j - c_j / z_j - c_j \leq 0\}$$

  k. zutabea **pibot-zutabea** da.

- Irtengo den $\mathbf{a}_r$ bektoreak hau betetzen du:

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ik}} / y_{ik} > 0 \right\}$$

  r. errenkada **pibot-errenkada** da.

Sartuko den bektoreari dagokion zutabean eta irtengo den bektoreari dagokion errenkadan dagoen y_{rk} koordenatuari **pibot** esaten zaio.

6. urratsa. Hurrengo taula kalkulatu.

- Taularen lehenengo zutabean oinarri berriko bektoreak kokatu.
- Taula berriko $r.$ errenkada kalkulatzeko, aurreko taulako $r.$ errenkadako osagaiak, pibot-errenkadakoak, y_{rk} pibot balioaz zatituz kalkulatuko da.
- Gainerako errenkadak kalkulatzeko, errenkada bakoitzerako biderkatzaile bat definituko da lehenik.

  * i. errenkadarako biderkatzailea: $m_i = \dfrac{y_{ik}}{y_{rk}},\ i = 1, \ldots, m,\ i \neq r.$
  * Balio adierazleen errenkadarako biderkatzailea: $m_0 = \dfrac{z_k - c_k}{y_{rk}}.$

  Errenkada berri bakoitza kalkulatzeko, aurreko taulako errenkadari pibot-errenkada biderkatzaileaz biderkatu ondoren kenduko zaio.

  Balio adierazleen errenkada biderkatzaileen bidezko kalkulua erabiliz eguneratu beharrean, definizioa aplikatuz egin daiteke, hau da, $z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_j - c_j$ kalkulatuz.

Taula berriko errenkada guztiak kalkulatuak izan direnean, 2. urratsera joan.

Problemak soluzio optimo anizkoitza duen kasuan, oinarri optimo berriak kalkulatuko dira dagoeneko kalkulatuak izan direnak errepikatuko diren arte.

2.7 Eredu linealen ebazpena

Atal honetan lau adibide ebatziko dira simplex algoritmoa erabiliz, eta lortutako taulak interpretatuko dira lau soluzio mota desberdinetarako: soluzio optimo bakarra, problema bideraezina, soluzio optimo anizkoitza eta problema bornegabea.

Adibidea. (Soluzio optimo bakarra). Ondoko problema ebatziko dugu simplex algoritmoa erabiliz.

$$
\begin{aligned}
\max \quad z \quad &= 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 \\
\text{hauen mende} & \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 3 \\
2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &\leq 4 \\
x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &\leq 10 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \ &\geq 0
\end{aligned}
$$

Ereduaren forma estandarra honakoa da:

$$
\begin{aligned}
&\max \ z = 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \\
&\text{hauen mende} \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad +x_5 \qquad\qquad\qquad = 3 \\
&2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \qquad\quad +x_6 \qquad\quad = 4 \\
&x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 \qquad\qquad\quad +x_7 \ = 10 \\
&x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 \geq 0
\end{aligned}
$$

Hasierako taula $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_5 \ \mathbf{a}_6 \ \mathbf{a}_7)$ oinarriarekiko kalkulatuko dugu. Oinarria kanonikoa izanik, 54. orrialdeko adibidean ikusi dugun bezala, oinarri horri dagozkion kalkuluak bat datoz ereduaren parametroekin, eta hasierako taulan jasoko dira. Bigarren eta hirugarren tauletan jasoko dira soluzio optimora iristeko egin behar izan diren simplex algoritmoaren bigarren eta hirugarren iterazioetan egindako kaluluak. Pibot balioa laukitxo batean adierazita agertzen da eta errenkadetarako biderkatzaileak taulatik kanpo, eskuin aldean.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
		-6	-4	-5	-5	0	0	0	0	
0	$\mathbf{a}_5$	1	1	1	1	1	0	0	3	$m_1 = \frac{y_{11}}{y_{21}} = \frac{1}{2}$
0	$\mathbf{a}_6$	$\boxed{2}$	1	4	1	0	1	0	4	
0	$\mathbf{a}_7$	1	2	-2	3	0	0	1	10	$m_3 = \frac{y_{31}}{y_{21}} = \frac{1}{2}$
		0	-1	7	-2	0	3	0	12	
0	$\mathbf{a}_5$	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\boxed{\frac{1}{2}}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	
6	$\mathbf{a}_1$	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	2	$m_2 = \frac{y_{24}}{y_{14}} = 1$
0	$\mathbf{a}_7$	0	$\frac{3}{2}$	-4	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	8	$m_3 = \frac{y_{34}}{y_{14}} = 5$
		0	1	3	0	4	1	0	16	
5	$\mathbf{a}_4$	0	1	-2	1	2	-1	0	2	
6	$\mathbf{a}_1$	1	0	3	0	-1	1	0	1	
0	$\mathbf{a}_7$	0	-1	1	0	-5	2	1	3	

$\mathbf{A}$ matrizeko $\mathbf{a}_j$ bektore guztietarako $z_j - c_j \geq 0$ betetzen denez, simplex algoritmoaren iterazioak amaitu dira. Problemak **soluzio optimo bakarra** dauka.

$$x_1^* = 1,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 2,\ x_5^* = 0,\ x_6^* = 0,\ x_7^* = 3, \quad z^* = 16$$

Iterazio bakoitzean egindako kalkuluen zehaztapenak ondokoak dira:

1. iterazioa

Hasierako taulan balio adierazle negatiboak daude, eta ondorioz, soluzioa hobe daiteke.

- Oinarrian sartuko den $\mathbf{a}_k$ bektorea. $z_k - c_k = \min\limits_j \{z_j - c_j / z_j - c_j \leq 0\}$.

$$\min\{-6, -4, -5, -5\} = -6 \ \rightarrow \ \mathbf{a}_1 \text{ sartuko da.}$$

Lehenengo taulako lehenengo zutabea pibot-zutabea da.

- Oinarritik irtengo den $\mathbf{a}_r$ bektorea. $\dfrac{x_{Br}}{y_{r1}} = \min\limits_i \left\{ \dfrac{x_{Bi}}{y_{i1}} / y_{i1} > 0 \right\}$.

$$\min\left\{\frac{3}{1}, \frac{4}{2}, \frac{10}{1}\right\} = \min\{3, 2, 10\} = 2 \ \rightarrow \ \mathbf{a}_6 \ \text{ irtengo da.}$$

  Lehenengo taulako bigarren errenkada pibot-errenkada da.

- Pibota: 2

Bigarren taula, hau da, $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_5 \ \mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_7)$ oinarri berriari dagokiona, kalkulatzeko egin beharreko kalkuluak honakoak dira:

- **Pibot-errenkada.** Taula berriko bigarren errenkada berria kalkulatzeko, hasierako taulako pibot-errenkada pibotaz zatitu behar da.

$$\frac{1}{2}\,(2,\ 1,\ 4,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 4) = (1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 2)$$

- **1. errenkada.** Biderkatzailea: $m_1 = \frac{y_{11}}{y_{21}} = \frac{1}{2}$. Bigarren taulako lehenengo errenkada kalkulatzeko, ondoko eragiketa egin behar da lehenengo taulako errenkaden artean.

  "lehenengo errenkada" $-$ "biderkatzailea" $\times$ "pibot-errenkada"

$$(1\,,1\,,1\,,1\,,1\,,0\,,0\,,3) - \frac{1}{2}(2\,,1\,,4\,,1\,,0\,,1\,,0\,,4) =$$

$$= (0\,,\frac{1}{2}\,,-1\,,\frac{1}{2}\,,1\,,-\frac{1}{2}\,,0\,,1)$$

- **3. errenkada.** Biderkatzailea: $m_3 = \frac{y_{31}}{y_{21}} = \frac{1}{2}$. Bigarren taulako hirugarren errenkada kalkulatzeko, ondoko eragiketa egin behar da lehenengo taulako errenkaden artean.

  "hirugarren errenkada" $-$ "biderkatzailea" $\times$ "pibot-errenkada"

$$(1\,,2\,,-2\,,3\,,0\,,0\,,1\,,10) - \frac{1}{2}(2\,,1\,,4\,,1\,,0\,,1\,,0\,,4) =$$

$$= (0\,,\frac{3}{2}\,,-4\,,\frac{5}{2}\,,0\,,\ -\frac{1}{2}\,,1\,,8)$$

- $z_j - c_j$ **balio adierazleen errenkada.** Biderkatzailea: $\frac{z_1-c_1}{y_{21}} = -\frac{6}{2} = -3$. Bigarren taulako adierazleen errenkada kalkulatzeko, ondoko eragiketa egin behar da lehenengo taulako errenkaden artean.

  “adierazleen errenkada” $-$ “biderkatzailea” $\times$ “pibot-errenkada”

$$(-6\,,-4\,,-5\,,-5\,,0\,,0\,,0\,,0)-(-3)(2\,,1\,,4\,,1\,,0\,,1\,,0\,,4)=$$
$$=(0\,,-1\,,7\,,-2\,,0\,,3\,,0\,,12)$$

  Balio adierazleen errenkada berria kalkulatzeko beste modu bat definizioa aplikatuz egitea da, hau da, oinarri berriarekiko $z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_j - c_j$ kalkulatuz. Adibidez,

$$z_1-c_1=(0\;,\;6\;,\;0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-6=6-6=0$$

- **Helburu funtzioaren balioa.** Definizioa aplikatuko dugu bigarren taulan dugun oinarri berriarekiko, hau da,

$$z=\mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B=(0,\;6,\;0)\begin{pmatrix}1\\2\\8\end{pmatrix}$$

2. iterazioa

Bigarren taulan balio adierazle negatiboak existitzen dira, eta ondorioz, soluzioa hobe daiteke. Kalkuluak aurreko iterazioan bezala egiten dira.

- Sarrera-bektorea. $\min\{-1,-2\} = -2 \rightarrow \mathbf{a}_4$ bektorea sartuko da. Pibot-zutabea: bigarren taulako laugarrena.

- Irteera-bektorea. $\min\{\frac{1}{\frac{1}{2}}, \frac{2}{\frac{1}{2}}, \frac{8}{\frac{5}{2}}\} = \min\{2, 4, \frac{16}{5}\} = 2 \rightarrow \mathbf{a}_5$ bektorea irtengo da. Pibot-errenkada: bigarren taulako lehenengoa.

- Pibot: $\dfrac{1}{2}$.

- **Pibot-errenkada.**

$$2(0\,,\frac{1}{2}\,,-1\,,\frac{1}{2}\,,1\,,\;-\frac{1}{2}\,,0\,,1)=(0\,,1\,,-2\,,1\,,2\,,-1\,,0\,,2)$$

- **2. errenkada.** Biderkatzailea: $m_2=\dfrac{y_{24}}{y_{14}}=1$

$$(1\,,\frac{1}{2}\,,2\,,\frac{1}{2}\,,0\,,\frac{1}{2}\,,0\,,2)-1(0\,,\frac{1}{2}\,,-1\,,\frac{1}{2}\,,1\,,-\frac{1}{2}\,,0\,,1)=$$

$$=(1\,,0\,,3\,,0\,,-1\,,1\,,0\,,1)$$

- **3. errenkada.** Biderkatzailea: $m_3=\dfrac{y_{34}}{y_{14}}=5$

$$(0\,,\frac{3}{2}\,,-4\,,\frac{5}{2}\,,0\,,-\frac{1}{2}\,,1\,,8)-5(0\,,\frac{1}{2}\,,-1\,,\frac{1}{2}\,,1\,,-\frac{1}{2}\,,0\,,1)=$$

$$=(0\,,-1\,,1\,,0\,,-5\,,2\,,1\,,3)$$

- **Adierazleen errenkada.** Biderkatzailea: $\dfrac{z_4-c_4}{y_{14}}=-4$

$$(0\,,-1\,,7\,,-2\,,0\,,3\,,0\,,12)+4(0\,,\frac{1}{2}\,,-1\,,\frac{1}{2}\,,1\,,-\frac{1}{2}\,,0\,,1)=$$

$$=(0\,,1\,,3\,,0\,,4\,,1\,,0\,,16)$$

□

Adibidea. (Problema bideraezina). Ondoko ereduari dagokion hasierako taula 59. orrialdeko adibidean eraiki da.

$$\max\; z=-5x_1+6x_2+7x_3+0x_4+0x_5-Mw_1-Mw_2$$

hauen mende

$$\begin{array}{rrrrrr}
2x_1+10x_2-6x_3 & -x_4 & & +w_1 & & =30\\
\frac{5}{2}x_1-3x_2+5x_3 & & +x_5 & & & =10\\
2x_1+2x_2+2x_3 & & & & +w_2 & =\;\;5\\
\multicolumn{6}{r}{x_1,\;x_2,\;x_3,\;x_4,\;x_5,\;w_1,\;w_2\geq 0}
\end{array}$$

Hasierako taula horretatik abiatuz, simplex algoritmoaren urratsak emango ditugu taula optimora iritsi arte. Hona hemen kalkuluak jasotzen dituzten taulak:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	w_2		
		$-4M+5$	$-12M-6$	$4M-7$	M	0	0	0	$-35M$	
$-M$	$\mathbf{a}_{w1}$	2	10	-6	-1	0	1	0	30	5
0	$\mathbf{a}_5$	$\frac{5}{2}$	-3	5	0	1	0	0	10	$-\frac{3}{2}$
$-M$	$\mathbf{a}_{w2}$	2	$\boxed{2}$	2	0	0	0	1	5	
		$8M+11$	0	$16M-1$	M	0	0	$6M+3$	$-5M+15$	
$-M$	$\mathbf{a}_{w1}$	-8	0	-16	-1	0	1	-5	5	
0	$\mathbf{a}_5$	$\frac{11}{2}$	0	8	0	1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{35}{2}$	
6	$\mathbf{a}_2$	1	1	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	

Azkenengo taulan $z_j - c_j \geq 0$ betetzen da $\mathbf{A}$ matrizeko $\mathbf{a}_j$ bektore guztietarako. Simplex algoritmoaren iterazioak amaitu dira, eta jatorrizko **problema bideraezina** dela ondorioztatzen da, aldagai artifizialak gehituz ebatzi den eredu linealaren soluzio optimoan $w_1 = 5$ lortu delako. □

Adibidea. (Soluzio optimo anizkoitza.) Ondoko eredu lineala ebatziko dugu.

$$\begin{aligned} \min \quad z &= 3x_1 + 6x_2 \\ \text{hauen mende} & \\ x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Eredua maximizatze-forma estandarrean jarriko dugu. Gainera, beharrezkoak diren aldagai artifizialak gehitu eta helburu funtzioa zigortuko dugu. Eredua honela geratuko da:

$$\max\ (-z) = -3x_1 - 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mw_1 - Mw_2$$

hauen mende

$$\begin{array}{rrrrrrrcr}
x_1 & +2x_2 & -x_3 & & & +w_1 & & = & 4 \\
x_1 & +x_2 & & +x_4 & & & & = & 5 \\
3x_1 & +4x_2 & & & -x_5 & & +w_2 & = & 10
\end{array}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, x_5,\ w_1,\ w_2 \geq 0$$

Simplex algoritmoaren taulak ondokoak dira:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	w_2		
		$-4M+3$	$-6M+6$	M	0	M	0	0	$-14M$	
$-M$	$\mathbf{a}_{w1}$	1	$\boxed{2}$	-1	0	0	1	0	4	
0	$\mathbf{a}_4$	1	1	0	1	0	0	0	5	$\frac{1}{2}$
$-M$	$\mathbf{a}_{w2}$	3	4	0	0	-1	0	1	10	2
		$-M$	0	$-2M+3$	0	M	$3M-3$	0	$-2M-12$	
-6	$\mathbf{a}_2$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	2	$-\frac{1}{4}$
0	$\mathbf{a}_4$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	3	$\frac{1}{4}$
$-M$	$\mathbf{a}_{w2}$	1	0	$\boxed{2}$	0	-1	-2	1	2	
		$-\frac{3}{2}$	0	0	0	$\frac{3}{2}$	M	$M-\frac{3}{2}$	-15	
-6	$\mathbf{a}_2$	$\frac{3}{4}$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
0	$\mathbf{a}_4$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	$\mathbf{a}_3$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1	
		0	0	3	0	0	$M-3$	M	-12	
-6	$\mathbf{a}_2$	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	
0	$\mathbf{a}_4$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	1
-3	$\mathbf{a}_1$	1	0	2	0	-1	-2	1	2	-2

Matrizeko bektore guztietarako $z_j - c_j \geq 0$ betetzen da azken taulan; ez dago aldagai artifizialik oinarri optimoan, eta ondorioz, taulan problemarako oinarriko soluzio bideragarri optimo bat lortu dugu: $x_1^* = 2$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 2$, $x_5^* = 0$, $z^* = 12$. Soluzio hau grafikoko A puntuari dagokio.

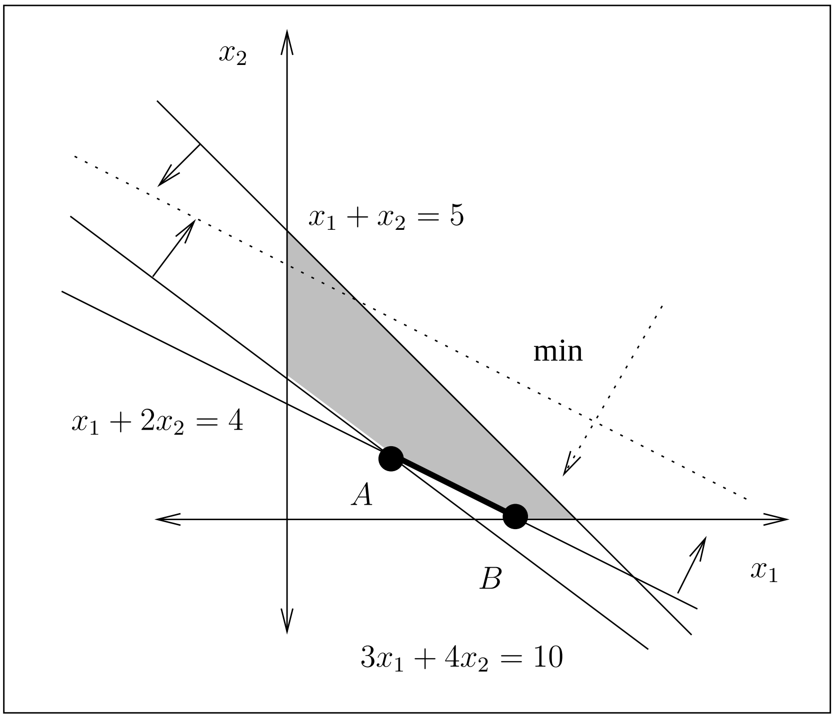
Taula optimoan ikus daiteke $\mathbf{a}_5$ ez dela oinarriko bektorea, eta bere balio adierazlea $z_5 - c_5 = 0$ dela. Horrek esan nahi du problema honek **soluzio optimo anizkoitza** duela. Simplex algoritmoaren beste iterazio bat egin daiteke beste oinarriko soluzio bideragarri optimo bat kalkulatzeko. Horretarako, aurreko taula optimoan $\mathbf{a}_5$ bektorea aukeratuko dugu oinarrian sartzeko. Irteera-bektorea aukeratzeko erregela aplikatuz, $\mathbf{a}_2$ bektorea ateratzea erabakiko da. Pibota $\frac{1}{2}$ da, eta taula berrirako kalkulu guztiak egin ondoren, lortuko den taula hau da:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	w_2	
		0	0	3	0	0	$M-3$	M	-12
0	$\mathbf{a}_5$	0	2	-3	0	1	3	-1	2
0	$\mathbf{a}_4$	0	-1	1	1	0	-1	0	1
-3	$\mathbf{a}_1$	1	2	-1	0	0	1	0	4

Lortutako beste soluzio optimo bat honakoa da: $x_1^* = 4$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 1$, $x_5^* = 2$, $z^* = 12$. Soluzio hau 71. orrialdeko irudiko B puntuari dagokio.

Taula berri horretan berriro ere soluzio optimo anizkoitzerako baldintzak betetzen dira, hau da, $z_2 - c_2 = 0$ da, $\mathbf{a}_2$ oinarrikoa ez den bektore bat izanik. $\mathbf{a}_2$ bektorea oinarrian sartuko bagenu, $\mathbf{a}_5$ atera beharko genuke, eta aurretik genuen oinarri berberera bueltatuko ginateke. Hortaz, simplex algoritmoaren iterazioak amaitu egin dira.

A eta B puntuak lotzen dituen segmentuko puntu guztiak ere problemaren soluzio optimoak dira.



□

Adibidea. (Soluzio bornegabea.) Ebatz dezagun ondoko eredu lineala.

$$\max \ z = x_1 - 3x_2$$

hauen mende

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ -4x_1 - 2x_2 &\leq -6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma estandarrean eta $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ oinarri kanonikoa lortzeko behar diren aldagai artifizial guztiak gehitu ondoren, eredua honela geratuko da:

$$\max \ z = x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mw_1 - Mw_2$$

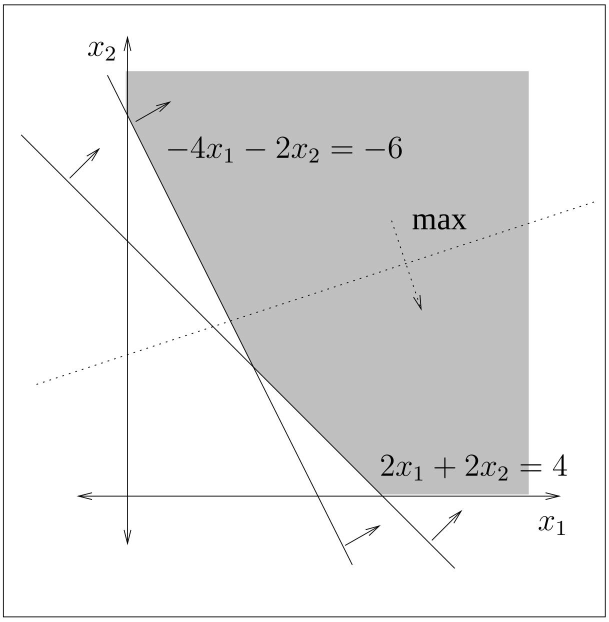
hauen mende

$$\begin{array}{lllll} 2x_1 + 2x_2 & -x_3 & & +w_1 & & = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 & & -x_4 & & +w_2 & = 6 \\ & & & & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ w_1,\ w_2 & \geq 0 \end{array}$$

Hauek dira simplex algoritmoaren hiru iterazioetan egindako kalkulu guztiak.

		x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2		
		$-6M-1$	$-4M+3$	M	M	0	0	$-10M$	
$-M$	$\mathbf{a}_{w1}$	2	2	-1	0	1	0	4	$\frac{1}{2}$
$-M$	$\mathbf{a}_{w2}$	$\boxed{4}$	2	0	-1	0	1	6	
		0	$-M+\frac{7}{2}$	M	$-\frac{1}{2}M-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}M+\frac{1}{4}$	$-M+\frac{3}{2}$	
$-M$	$\mathbf{a}_{w1}$	0	$\boxed{1}$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	1	
1	$\mathbf{a}_1$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
		0	0	$\frac{7}{2}$	-2	$M-\frac{7}{2}$	$M+2$	-2	
-3	$\mathbf{a}_2$	0	1	-1	$\boxed{\frac{1}{2}}$	1	$-\frac{1}{2}$	1	
1	$\mathbf{a}_1$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-1
		0	4	$-\frac{1}{2}$	0	$M+\frac{1}{2}$	M	2	
0	$\mathbf{a}_4$	0	2	-2	1	2	-1	2	
1	$\mathbf{a}_1$	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	2	

Azkenengo taulan ikus daiteke $\mathbf{a}_3$ bektorea ez dagoela oinarrian, $z_3 - c_3 < 0$ dela eta $y_{i3} \leq 0$, $i = 1, 2$, direla. Soluzioa bornegabea da.



Ebazpen grafikoan ikusten da helburu funtzioa etengabe desplaza daitekeela, helburu funtzioaren balioak infinituruntz joko duelarik. □

2.8 Bi faseko metodoa

Metodo hau zigortze-metodoaren antzekoa da, biak erabiltzen baitira hasierako $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ oinarri kanonikoa lortzeko, ereduari aldagai artifizialak gehitu behar zaizkionean. Problemak soluziorik izatekotan, optimaltasunaren baldintzak beteko dituen taula (eta oinarrian aldagai artifizialik gabea) lortzea da helburua. Zigortze-metodoan helburu funtzioa zigortu egiten da horretarako; bi faseko metodoan, aldiz, lehenengo fase batean aldagai artifizialen batura minimizatu egiten da. Hauek dira bi faseko metodoan eman beharreko urratsak.

1. **fasea.** Lehenengo fase honetan, problema linealaren murrizketak hartuko dira kontuan; baina, problemaren jatorrizko helburu funtzioa optimizatu beharrean, aldagai artifizialen batura minimizatuko da. Simplex algoritmoa erabiltzen da lehen fase honetako eredua ebazteko, eta ondoko bi kasuak gerta daitezke:

   - Helburu funtzioaren balio optimoa zero baino handiagoa bada, jatorrizko problema lineala bideraezina da.

- Kontrako kasuan, jatorrizko problema linealak badu soluziorik, eta metodoaren bigarren fasean jarraitu behar da kalkulatzeko.

2. **fasea.** Bigarren fase honetan, optimizatuko den helburu funtzioa jatorrizko problemarena da. Lehenengo fasean lortutako taula optimotik abiatu behar da, eta balio adierazleen errenkada berria kalkulatu, hori baita helburu funtzioa aldatzearen ondorioz taulan aldatuko den kalkulu bakarra. Ondoren, simplex algoritmoaren iterazioekin jarraitu behar da optimaltasun baldintzak betetzen diren arte.

Ondoren, bi faseko metodoaren bidez ebatzitako bi adibide aztertuko ditugu.

Adibidea. Ebatz dezagun ondoko problema lineala bi faseko metodoa erabiliz.

$$
\begin{aligned}
\max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \\
\text{hauen mende} & \\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 14 \\
-2x_1 + 5x_2 - x_3 &\leq -10 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Forma estandarrean eta w_1 eta w_2 aldagai artifizialak gehitu ondoren, eredua honela geratuko da:

$$
\begin{aligned}
\max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 0x_4 + 0w_1 + 0w_2 \\
\text{hauen mende} & \\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad\quad + w_1 \qquad &= 14 \\
2x_1 - 5x_2 + x_3 \quad - x_4 \qquad + w_2 &= 10 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ w_1,\ w_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

1. fasea. Eredu linealari gehitutako bi aldagai artifizialen batura minimizatuko dugu fase honetan, hau da, $\min \quad z' = w_1 + w_2$. Simplex algoritmoa erabili ahal izateko, helburu funtzioa maximizatze-forman jarriko dugu.

$$\max\,(-z') = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 - w_1 - w_2$$

hauen mende

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad\qquad &+w_1 &&= 14\\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 \quad -x_4 \qquad &\qquad +w_2 &&= 10\\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ w_1,\ w_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Simplex algoritmoaren taulak ondokoak dira:

		x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2		
		-4	3	-3	1	0	0	-24	
-1	$\mathbf{a}_{w1}$	2	2	2	0	1	0	14	1
-1	$\mathbf{a}_{w2}$	$\boxed{2}$	-5	1	-1	0	1	10	
		0	-7	-1	-1	0	2	-4	
-1	$\mathbf{a}_{w1}$	0	$\boxed{7}$	1	1	1	-1	4	
0	$\mathbf{a}_1$	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	5	$-\frac{5}{14}$
		0	0	0	0	1	1	0	
0	$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	
0	$\mathbf{a}_1$	1	0	$\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{45}{7}$	

A matrizeko bektore guztietarako $z_j - c_j \geq 0$ betetzen denez, lehenengo faserako taula optimoa lortu da. Gainera, $z'^{*} = 0$ lortu denez, jatorrizko problema linealak badu soluziorik. Bigarren fasera goaz.

2. fasea. Jatorrizko problema linealaren helburu funtzioa optimizatuko dugu: $\max\ z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$. Aurreko fasean lortutako taula optimoan balio adierazleen errenkada eguneratuko dugu honela:

- $z_1 - c_1 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_1 - c_1 = (3\ ,\ 2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = 0.$
- $z_2 - c_2 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_2 - c_2 = (3\ ,\ 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 = 0.$

- $z_3 - c_3 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_3 - c_3 = (3\ ,\ 2) \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix} + 5 = \dfrac{50}{7}.$

- $z_4 - c_4 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_4 - c_4 = (3\ ,\ 2) \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix} - 0 = \dfrac{1}{7}.$

- $z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = (3\ ,\ 2) \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{45}{7} \end{pmatrix} = \dfrac{102}{7}.$

Bigarren faseko lehenengo taulan aldagai artifizialei dagozkien zutabeak ez dira agertuko, aldagai horiek ez daudelako helburu funtzioan. Balio adierazleen errenkada eguneratu ondoren, honakoa da hasierako taula hori:

		x_1	x_2	x_3	x_4	
		0	0	$\frac{50}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{102}{7}$
3	$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$
2	$\mathbf{a}_1$	1	0	$\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{45}{7}$

Hasierako taula horretan $\mathbf{A}$ matrizeko bektore guztietarako $z_j - c_j \geq 0$ betetzen da, eta ondorioz, jatorrizko problema linealaren soluzio optimoa taulakoa da.

$$x_1^* = \frac{45}{7}, \quad x_2^* = \frac{4}{7}, \quad x_3^* = 0, \quad x_4^* = 0, \quad z^* = \frac{102}{7}.$$

Gerta liteke bigarren fase honetan simplex algoritmoaren iterazio batzuk behar izatea taula optimora iritsi baino lehen. □

Adibidea. Bi faseko metodoa erabiliz 71. orrialdeko adibideko eredu lineala ebatziko dugu.

$$\max\ z = x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0w_1 + 0w_2$$

hauen mende

$$\begin{array}{rrrrrl} 2x_1 + 2x_2 & -x_3 & & +w_1 & & = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 & & -x_4 & & +w_2 & = 6 \\ & & & & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ w_1,\ w_2 & \geq 0 \end{array}$$

1. fasea. Helburu funtzioa: $\min\ z' = w_1 + w_2\ \rightarrow \max(-z') = -w_1 - w_2$.

$$\max(-z') = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 - w_1 - w_2.$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2		
		-6	-4	1	1	0	0	-10	
-1	$\mathbf{a}_{w1}$	2	2	-1	0	1	0	4	$\frac{1}{2}$
-1	$\mathbf{a}_{w2}$	$\boxed{4}$	2	0	-1	0	1	6	
		0	-1	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	-1	
-1	$\mathbf{a}_{w1}$	0	$\boxed{1}$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	1	
0	$\mathbf{a}_1$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
		0	0	0	0	1	1	0	
0	$\mathbf{a}_2$	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	1	
0	$\mathbf{a}_1$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	

2. fasea. Jatorrizko problemaren helburu funtzioa: $\max\ z = x_1 - 3x_2$. Aurreko faseko taula optimoan balio adierazleak eguneratuz,

		x_1	x_2	x_3	x_4		
		0	0	$\frac{7}{2}$	-2	-2	
-3	$\mathbf{a}_2$	0	1	-1	$\boxed{\frac{1}{2}}$	1	
1	$\mathbf{a}_1$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1
		0	4	$-\frac{1}{2}$	0	2	
0	$\mathbf{a}_4$	0	2	-2	1	2	
1	$\mathbf{a}_1$	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	2	

Azkeneko taulan $z_3 - c_3 < 0$ betetzen da, $\mathbf{y}_3$ bektorearen osagai guztiak negatiboak izanik. Hortaz, problema bornegabea da. $\square$

2.9 Simplex metodo berrikusia

Aurreko ataletan aztertu dugun simplex algoritmoan beharrezkoak direnak baino kalkulu gehiago egiten dira eredu lineal baten soluzio optimoaren kalkuluan. Beharrezkoak ez diren kalkuluak ekidinez sortu da simplex algoritmoaren berrikuspen bat den *simplex metodo berrikusia*.

Izan bedi eredu lineala forma estandarrean:

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{hauen mende} \qquad & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\mathbf{B}$ oinarri bat eta $\mathbf{x}_B$ oinarriko soluzio bideragarria emanik, soluzio hori hobetzeko $z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j$ balio adierazleak kalkulatuko dira. Oinarrian sartuko da ondoko erregela betetzen duen $\mathbf{a}_k$ bektorea:

$$z_k - c_k \;=\; \min_j \,\{\, z_j - c_j \;/\; z_j - c_j \leq 0 \,\}.$$

Oinarritik irtengo den bektorea aukeratzeko, $\mathbf{a}_k$ bektorearen koordenatu-bektorea kalkulatzen da, hau da, $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$ pibot-zutabea, eta koordenatu horiek eta $\mathbf{x}_B$ bektorearen osagaiak erabiliz, oinarritik irtengo den $\mathbf{a}_r$ bektorea aukeratuko da ondoko erregela aplikatuz:

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} \;=\; \min_i \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ik}} \;/\; y_{ik} > 0 \right\}.$$

Kalkulu horiek guztiak egin ahal izateko simplex algoritmoaren iterazio bakoitzean aldatzen den $\mathbf{B}^{-1}$ ezagutzea beharrezkoa da. Horretaz gain, beharrezkoak diren gainerako datuak eredu linealean bertan daude. Hortaz, honelako taula murriztu batean jaso daitezke kalkuluak.

		$x_{n+1}\ x_{n+2}\ \dots x_{n+m}$	
		$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$
$\mathbf{c}_B$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{x}_B$

Adibidea. Har dezagun 63. orrialdeko adibideko eredu lineala.

$$\max\ z = 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

hauen mende

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad +x_5 \qquad\qquad &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \qquad +x_6 \qquad &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 \qquad\qquad +x_7 &= 10 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{B} = (\mathbf{a}_5\ \mathbf{a}_6\ \mathbf{a}_7)$ oinarri kanonikorako hasierako taula osatzeko kalkuluak egingo ditugu.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B^T = (0\ ,\ 0\ ,\ 0), \quad \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1} = (0,\ 0,\ 0), \quad \mathbf{c}_N^T = (6\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 5)$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Simplex metodo berrikusirako hasierako taula honakoa da:

		x_5	x_6	x_7	
		0	0	0	0
0	$\mathbf{a}_5$	1	0	0	3
0	$\mathbf{a}_6$	0	1	0	4
0	$\mathbf{a}_7$	0	0	1	10

Oinarrikoak ez diren $\mathbf{N} = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4)$ bektoreen balio adierazleak kalkulatuko ditugu, oinarrian sartuko den bektorea aukeratzeko.

$$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N^T = (0,0,0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} - (6,4,5,5) = (-6,-4,-5,-5).$$

$$z_1 - c_1 = \min\{-6,-4,-5,-5\} = -6 \quad \rightarrow \quad \mathbf{a}_1 \text{ sartuko da.}$$

Kalkula dezagun $\mathbf{y}_1$ pibot-zutabea.

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ondoko erregela betetzen duen $\mathbf{a}_r$ bektorea irtengo da oinarritik.

$$\frac{x_{Br}}{y_{r1}} = \min\left\{\frac{3}{1}, \frac{4}{2}, \frac{10}{1}\right\} = 2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{a}_6 \text{ irtengo da.}$$

Taulako bigarren errenkada pibot-errenkada da, eta pibota 2 da. Lehenengo errenkadarako biderkatzailea $\frac{1}{2}$ da, hirugarren errenkadarako $\frac{1}{2}$ eta balio adierazleen errenkadarako $-\frac{6}{2}$. Kalkuluak eginez, taula berria honakoa da:

		x_5	x_6	x_7	
		0	3	0	12
0	$\mathbf{a}_5$	1	$-\frac{1}{2}$	0	1
6	$\mathbf{a}_1$	0	$\frac{1}{2}$	0	2
0	$\mathbf{a}_7$	0	$-\frac{1}{2}$	1	8

Orain, oinarria $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_5\ \mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_7)$ da. $\mathbf{N} = (\mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4\ \mathbf{a}_6)$ izanik, oinarrikoak ez diren bektore horietarako balio adierazleak kalkulatuko ditugu.

$$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}-\mathbf{c}_N^T=(0,3,0)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 3 & 0\end{pmatrix}-(4,5,5,0)=(-1,7,-2,3)$$

$$z_4-c_4=\min\{-1,-2\}=-2 \quad\rightarrow\quad \mathbf{a}_4 \text{ sartuko da.}$$

Pibot-zutabea kalkulatuko dugu.

$$\mathbf{y}_4=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_4=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

Ondoko erregela betetzen duen $\mathbf{a}_r$ bektorea irtengo da oinarritik.

$$\frac{x_{Br}}{y_{r4}}=\min\left\{\frac{1}{\frac{1}{2}},\frac{2}{\frac{1}{2}},\frac{8}{\frac{5}{2}}\right\}=\min\left\{2,4,\frac{16}{5}\right\}=2 \quad\rightarrow\quad \mathbf{a}_5 \text{ irtengo da.}$$

Taulako lehenengo errenkada pibot-errenkada da, eta pibota $\frac{1}{2}$ da. Bigarren errenkadarako biderkatzailea 1 da, hirugarren errenkadarako 5 eta balio adierazleen errenkadarako -4. Kalkuluak eginez taula berria honakoa da.

		x_5	x_6	x_7	
		4	1	0	16
5	$\mathbf{a}_4$	2	-1	0	2
6	$\mathbf{a}_1$	-1	1	0	1
0	$\mathbf{a}_7$	-5	2	1	3

Orain, oinarria $\mathbf{B}=(\mathbf{a}_4\ \mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_7)$ da. $\mathbf{N}=(\mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_5\ \mathbf{a}_6)$ izanik, oinarrikoak ez diren bektore horietarako balio adierazleak kalkulatuko ditugu.

$$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}-\mathbf{c}_N^T=(4,1,0)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 0 & 0\end{pmatrix}-(4,5,0,0)=(1,3,4,1).$$

Balio adierazle negatiborik ez dagoenez, soluzioa optimoa da. Gainera, bakarra da: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 2$, $x_5^* = 0$, $x_6^* = 0$, $x_7^* = 3$, $z^* = 16$. $\square$

2.10 Oharrak

1. Biribiltze-erroreak. Simplex algoritmoaren iterazioetan egin beharreko kalkuluak eskuz egiten badira, ez dago biribiltzeko beharrik. Baina, konputagailuek zatikiak zehaztasun aritmetiko finituko biribiltzeen bidez kalkulatzen dituztenez, kasuren batean, simplex metodoaren bidez lortutako oinarriko soluzio bideragarri optimoak problemaren murrizketak ez betetzea, edo beteta ere, soluzioa optimo ez izatea gerta daiteke. Hori biribiltze-erroreen pilaketagatik gertatzen da. Errorea modu honetan ebaluatua izan daiteke. $\mathbf{B}\mathbf{x}_B \neq \mathbf{b}$ bada, biribiltze-erroreak daudela ondoriozta daiteke. Errorea esanguratsua bada, zuzendua izan daiteke honela: zuzenean $\mathbf{B}^{-1}$ kalkulatu, taularen erroreak zuzendu eta iterazioekin jarraitu.

2. Aldagai artifizialak oinarri optimoan. Gerta liteke oinarri optimoan aldagai artifizialak zero balioarekin agertzea. Horrek bi egoera adieraz ditzake: eredu linealean murrizketa erredundanteak daudela edo soluzioa endekatua dela. Ikus ditzagun bi kasu horietarako adibide bana.

Adibidea. (Murrizketa erredundanteak). Har dezagun ondoko eredu lineala.

$$
\begin{aligned}
\max \quad z &= x_1 + 2x_2 - x_3 \\
\text{hauen mende} & \\
2x_1 - x_2 + x_3 &= 12 \\
-x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 22 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

w_1, w_2 eta w_3 aldagai artifizialak gehitu, helburu funtzioa zigortu eta simplex algoritmoaren hiru iterazio egin ondoren, taula optimoa lortuko da.

		x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3		
		$-2M-1$	$-2M-2$	$-4M+1$	0	0	0	$-44M$	
$-M$	$\mathbf{a}_{w1}$	2	-1	1	1	0	0	12	1
$-M$	$\mathbf{a}_{w2}$	-1	2	$\boxed{1}$	0	1	0	10	
$-M$	$\mathbf{a}_{w3}$	1	1	2	0	0	1	22	2
		$-6M$	$6M-4$	0	0	$4M-1$	0	$-4M-10$	
$-M$	$\mathbf{a}_{w1}$	$\boxed{3}$	-3	0	1	-1	0	2	
-1	$\mathbf{a}_3$	-1	2	1	0	1	0	10	$-\frac{1}{3}$
$-M$	$\mathbf{a}_{w3}$	3	-3	0	0	-2	1	2	1
		0	-4	0	$2M$	$2M-1$	0	-10	
1	$\mathbf{a}_1$	1	-1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	-1
-1	$\mathbf{a}_3$	0	$\boxed{1}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{32}{3}$	
$-M$	$\mathbf{a}_{w3}$	0	0	0	-1	-1	1	0	0
		0	0	4	$2M+\frac{4}{3}$	$2M+\frac{5}{3}$	0	$\frac{98}{3}$	
1	$\mathbf{a}_1$	1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{34}{3}$	
2	$\mathbf{a}_2$	0	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{32}{3}$	
$-M$	$\mathbf{a}_{w3}$	0	0	0	-1	-1	1	0	

w_3 aldagai artifiziala oinarri optimoan dago, baina zero balioa hartzen du. Kasu honetan, problemak ekuazio erredundanteak ditu. Eredu linealaren murrizketak aztertzen baditugu, egiazta daiteke hirugarren murrizketa aurreko bien batura dela. Eredutik hirugarren murrizketa kenduz gero, eredu linealak badu soluziorik.

□

Adibidea. (Soluzio endekatua). Izan bedi ondoko eredu lineala:

$$\begin{aligned} \max \ \ z \ &= x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{hauen mende} & \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &\leq 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

x_4 nasaitze-aldagaia eta w_1 eta w_2 aldagai artifizialak gehitu, helburu funtzioa zigortu eta simplex algoritmoa aplikatuz, taula optimoa lortuko da.

		x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	
		$-\frac{3}{2}M-1$	$3M-1$	$-2M-3$	0	0	0	$-10M$
0	$\mathbf{a}_4$	1	5	1	1	0	0	7
$-M$	$\mathbf{a}_{w1}$	1	-1	$\boxed{1}$	0	1	0	5
$-M$	$\mathbf{a}_{w2}$	$\frac{1}{2}$	-2	1	0	0	1	5
		$\frac{1}{2}M+2$	$M-4$	0	0	$2M+3$	0	15
0	$\mathbf{a}_4$	0	6	0	1	-1	0	2
3	$\mathbf{a}_3$	1	-1	1	0	1	0	5
$-M$	$\mathbf{a}_{w2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	0	-1	1	0

Taula optimoan w_2 aldagai artifiziala oinarrian dagoela ikusten da. Oraingoan ere, aurreko adibidean bezala, zero balioa hartzen du. Hala ere, kasu honetan ereduak ez du murrizketa erredundanterik.

Oinarri aldaketa bat eginez, beste taula optimo hau lor daiteke. Bertan ikusten den bezala, soluzio optimoa endekatua da.

		x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	
		4	0	0	0	$7+M$	$-4+M$	15
0	$\mathbf{a}_4$	-3	0	0	1	-7	6	2
3	$\mathbf{a}_3$	$\frac{3}{2}$	0	1	0	2	-1	5
1	$\mathbf{a}_2$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	1	-1	0

□

3. Ziklatzearen arazoa. Simplex algoritmoan, oinarrian sartuko den bektorea aukeratzerakoan, erregela bektore batek baino gehiagok betetzea gerta daiteke. Berdinketa kasuan, bektore horien artean edozein aukeratuko dugu, erabaki honek soluzio optimora iristeko egin beharreko iterazio kopuruan eragin nabarmena sortuko ez duelarik.

Tamalez, ez da gauza bera gertatzen oinarritik irtengo den bektorearen aukeraketarekin. Irteera-erregela bektore batek baino gehiagok betetzen badu, eta horien arteko aukeraketa modu egokian egiten ez bada, ziklatzea gerta daiteke, hau da, zenbait iterazioren ondoren, aurretik lortutako oinarri batera itzultzea, simplex algoritmoa etengabe ziklatzen geratuko delarik inoiz optimora iritsi gabe. Taulako soluzioa endekatua denean eta irteera-erregelan berdinketa zerorekin denean gerta daiteke arazo hori[2].

Badira ziklatze hori gerta ez dadin erabil daitezkeen erregelak, erregela lexikografikoak eta Bland-en erregela, adibidez. Horiei esker, oinarritik irtengo den aldagaia aukeratzen jakingo dugu inolako arazorik gabe.

4. Simplex algoritmoaren eraginkortasuna. Simplex algoritmoaren eraginkortasuna aztertzeko, ikerlanak egin izan dira, eta lortutako emaitzek diotenez, soluzio optimora iristeko egin beharreko kalkulu kopurua eredu linealaren aldagai kopuruaren mende baino murrizketa kopuruaren mende dagoela.

[2] Adibide bat ikus *Linear programming and network flows*. M. S. Bazaraa et al. liburuan