5

Interpolación polinómica.

Introducción.

En muchas ocasiones en diferentes ramas de la ingeniería, a la hora de resolver un problema, los datos de que se dispone se encuentran en tablas, como por ejemplo tablas estadísticas.

En la tabla de que se dispone, no siempre se encuentran los valores que se necesitan para realizan los cálculos del problema. En esos casos se debe realizar una interpolación con los datos conocidos para estimar el valor de la función en el punto que se desea.

De esta manera se realiza una aproximación al valor de la función en un punto a partir de datos conocidos de dicha función en otros puntos.

En otras ocasiones se conoce la función $f(x)$ con la que se debe trabajar en el problema, sin embargo se trata de una función que tiene un gran coste operativo a la hora de evaluarla, o de calcular su derivada, etc.

En este caso también puede ser útil aproximar la función conocida mediante un polinomio interpolador que será más fácil de evaluar, derivar, etc.

Para realizar el cálculo un polinomio interpolador se puede disponer de información diversa.

En ocasiones se pretende conseguir un polinomio $p(x)$ que coincida con la función en ciertos puntos. Es decir $p(x_i) = f(x_i) \quad i = 0,...,n$.

En otros casos se pretende no solamente que la función y el polinomio coincidan en ciertos puntos sino que también lo haga la derivada primera, segunda, etc.

Existencia y unicidad del polinomio interpolador.

El problema de interpolación que se estudia en este tema consiste en aproximar mediante un polinomio de grado menor o igual que n un conjunto de $n+1$ puntos conocidos de la función $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$.

Los datos son, por tanto, $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.

A las abscisas $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se les llama nodos del polinomio interpolador.

Teorema: Dado un conjunto de $n+1$ puntos $(x_0, f(x_0)),(x_1, f(x_1)),\ldots,(x_n, f(x_n))$. Existe un único polinomio interpolador $p(x)$ de grado menor o igual que n que cumple $f(x_i)=p(x_i) \quad i=0,\ldots,n$.

Demostración:

El polinomio que se desea calcular es $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$. Donde las incógnitas son los $a_i \quad i=0,\ldots,n$.

Se dispone de *n+1* datos puesto que $f(x_i)=p(x_i) \quad i=0,\ldots,n$, por tanto:

$$\begin{cases} f(x_0)=a_0+a_1x_0+a_2{x_0}^2+\ldots+a_n{x_0}^n \\ f(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2{x_1}^2+\ldots+a_n{x_1}^n \\ f(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2{x_1}^2+\ldots+a_n{x_1}^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x_n)=a_0+a_1x_n+a_2{x_n}^2+\ldots+a_n{x_n}^n \end{cases}.$$

Esta expresiones representan un sistema lineal de *n+1* ecuaciones con *n+1* incógnitas, donde las incógnitas son los coeficientes a_i. Matricialmente esto se representa de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \cdots & {x_0}^n \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^n \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \cdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

El polinomio interpolador existirá y será único si el sistema anterior es compatible determinado. Para ello el rango de la matriz de coeficientes debe ser n+1 igual al número de incógnitas, por tanto el determinante de la matriz de coeficientes debe ser no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \cdots & {x_0}^n \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^n \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^n \end{vmatrix}=\prod_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i)\neq 0.$$

Para que se cumpla ese resultado la única posibilidad que existe es que todos los nodos sean distintos. Si dos nodos fueran coincidentes el determinante de la matriz de coeficientes del sistema se anularía, de modo que el sistema sería compatible indeterminado, ya que no se dispondría de *n+1* datos sino de un número menor de datos. Por tanto el polinomio no podría ser de grado n.

Ahora que ya se ha demostrado que el polinomio interpolador existe y es único, se pasa a estudiar diversos métodos para calcular el polinomio interpolador.

Método de Lagrange

El método de Lagrange se basa estrictamente en el calculo del polinomio interpolador a partir de las condiciones que debe cumplir, $p(x_i) = f(x_i) \quad i = 0,\dots,n$.

De esta manera se plantea un polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^{n} \big(f(x_i) \cdot l_i(x) \big)$. Donde las funciones $l_i(x)$ deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{cases} l_i(x_i) = 1 & \\ l_i(x_j) = 0 & \begin{matrix} j = 0,\dots,n \\ j \neq i \end{matrix} \end{cases} \right\} i = 0,\dots,n .$$

Así al evaluar el polinomio en un nodo x_i resulta:

$$p(x_i) = f(x_0) \cdot l_0(x_i) + f(x_1) \cdot l_1(x_i) + \dots + f(x_i) \cdot l_i(x_i) + \dots + f(x_n) \cdot l_n(x_i) =$$

$$p(x_i) = f(x_0) \cdot 0 + f(x_1) \cdot 0 + \dots + f(x_i) \cdot 1 + \dots + f(x_n) \cdot 0 = f(x_i).$$

Las funciones de base $l_i(x)$ son polinomios de grado menor o igual que n, que multiplicadas por las ordenadas en los nodos, forman parte del sumatorio que representa el polinomio interpolador.

Cálculo de las funciones de base $l_i(x)$:

Teniendo en cuenta las condiciones que deben cumplir las funciones de base, resulta que para que se anulen en todo el resto de nodos $\begin{cases} l_i(x_j) = 0 & \begin{matrix} j = 0,\dots,n \\ j \neq i \end{matrix} \end{cases}$ deben ser de la forma:

$$l_i(x) = K_i \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n) = K_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)$$

Para que se cumpla la segunda condición $l_i(x_i) = 1$ se calcula el valor de K_i como:

$$K_i = \frac{1}{(x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)} \Rightarrow K_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{(x_i - x_j)} ,$$

con lo que la función de base es: $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$.

La representación del polinomio interpolador mediante el método de Lagrange será, por tanto:

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot l_i(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Ejemplo:

Se desea obtener el polinomio interpolador que pasa por los puntos siguientes:

x_i	0.2	0.6	1
$f(x_i)=\mathrm{Cos}(x_i)$	0.980067	0.825336	0.540302

Dado que se dispone de tres nodos, *n=2*, las funciones de base serán polinomios de grado dos.

Se calculan las funciones de base:

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)}=\frac{(x-0.6)\cdot(x-1)}{(0.2-0.6)\cdot(0.2-1)}=3.125\cdot(x-0.6)\cdot(x-1)$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)}=\frac{(x-0.2)\cdot(x-1)}{(0.6-0.2)\cdot(0.6-1)}=-6.25\cdot(x-0.2)\cdot(x-1)$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)}=\frac{(x-0.2)\cdot(x-0.6)}{(1-0.2)\cdot(1-0.6)}=3.125\cdot(x-0.2)\cdot(x-0.6)$$

El polinomio interpolador resulta:

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot l_i(x)=0.980067\cdot l_0(x)+0.825336\cdot l_1(x)+0.540302\cdot l_2(x)=$$

$$=3.06271\cdot(x-1)\cdot(x-0.6)-5.15835\cdot(x-0.2)\cdot(x-1)+1.68844\cdot(x-0.2)\cdot(x-0.6)=$$

$$=1.00857-0.061072\cdot x-0.407195\cdot x^2.$$

Una vez calculado se puede evaluar el polinomio en cualquier punto del intervalo $[0.2,\ 1]$, obteniendo una aproximación al valor del $\cos(x)$ en dicho punto.

Programa de *Mathematica*.

Cálculo del polinomio interpolador: Método de Lagrange

```
In[1]:= datos = Table[{i, Cos[i]}, {i, 0.2, 1, 0.4}]
Out[1]= {{0.2, 0.980067 }, {0.6, 0.825336 }, {1., 0.540302 }}
In[2]:= n = Length[datos];
In[3]:= datx = Transpose[datos][[1]]
Out[3]= {0.2, 0.6, 1.}
In[4]:= daty = Transpose[datos][[2]]
Out[4]= {0.980067 , 0.825336 , 0.540302 }
In[5]:= l = List[];
In[6]:= Do[term = 1;
          For[j = 1, j ≤ n, If[j ≠ i , term = term * (x - datx[[j]])/(datx[[i]] - datx[[j]])]; j++];
          l = Append[l, term],
          {i, 1, n}]
In[7]:= l // Expand
Out[7]= {1.875 - 5. x + 3.125 x^2, -1.25 + 7.5 x - 6.25 x^2, 0.375 - 2.5 x + 3.125 x^2}
In[8]:= p[x_] = daty.l // Expand
Out[8]= 1.00857 - 0.0610715 x - 0.407195 x^2
In[9]:= InterpolatingPolynomial[datos, x] // Expand
Out[9]= 1.00857 - 0.0610715 x - 0.407195 x^2
```

Cota de error en el polinomio interpolador

Al evaluar el polinomio interpolador en un punto del intervalo $[a,b]$ en lugar de evaluar la función en dicho punto se produce un error.

En este apartado estudiaremos la expresión del error cometido.

Teorema: Dada una función $f \in C^{n+1}[a,b]$ y $x_0, x_1, \ldots, x_n$ los *n+1* nodos a partir de los cuales se calcula el polinomio interpolador de *f*, entonces $f(x) = p(x) + e(x)$.

Donde $p(x)$ es el polinomio interpolador de *f* de orden *n* que pasa por los *n+1* nodos y $e(x)$ es el error cometido que se calcula como:

$$e(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{n+1!} \prod(x) \quad \forall x \in [a,b],$$

siendo $\prod(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

Demostración:

La expresión del error es válida para cualquiera de los *n+1* nodos en el intervalo $\left[a,b\right]$, dado que $f(x_i)=p(x_i)\Rightarrow e(x_i)=0 \quad \forall x_i \quad i=0,...,n$.

Como $\prod(x_i)=(x_i-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_i)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)=0$ el error es nulo en todos los nodos del intervalo.

Para cualquier otro punto $x\in\left[a,b\right]$ demostraremos a continuación la expresión del error.

Se considera la función auxiliar $F(t)=f(t)-p(t)-k\cdot\prod(t)$.

En esta función se calcula la constante *k* de forma que para el punto *x* en el que queremos calcular el error *F* se anule. $F(x)=0=f(x)-p(x)-k\cdot\prod(x)\Rightarrow k=\dfrac{f(x)-p(x)}{\prod(x)}$.

Se analiza a continuación la función $F\left(t\right)$

- La función $F\left(t\right)$ se anula en los *n+1* nodos $F(x_i)=0 \quad i=0,....,n$.
- La función $F\left(t\right)$ se anula también para el punto *x*, puesto que así se ha calculado la constante *k*.

La función $F\left(t\right)$ se anula por tanto en *n+2* puntos en el intervalo $\left[a,b\right]$.

Por el teorema de Rolle, si la función $F\left(t\right)$ se anula $n+2$ veces, su derivada de orden $n+1$ se anula una vez en el intervalo $\left[a,b\right]$.

Derivando $n+1$ veces $F\left(t\right)$ y evaluándola para ese punto ξ del intervalo en que se anula, resulta:

$$F^{n+1)}(\xi)=0=f^{n+1)}(\xi)-p^{n+1)}(\xi)-k\prod^{n+1)}(\xi)$$

$p\left(x\right)$ es un polinomio de grado n, por lo que la derivada de orden $n+1$ vale cero.

$\prod(t)=\prod_{i=0}^{n}(t-x_i)$ es un polinomio de grado $n+1$ en *t*, cuya derivada de orden $n+1$ vale $(n+1)!$.

Por tanto: $F^{n+1)}(\xi)=0=f^{n+1)}(\xi)-k(n+1)!\Rightarrow 0=f^{n+1)}(\xi)-\dfrac{f(x)-p(x)}{\prod(x)}(n+1)!$

Despejando el error en el punto *x* resulta:

$$e(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod(x).$$

Método de Newton

El método de newton para el cálculo del polinomio interpolador tiene como ventaja fundamental respecto al método de Lagrange que a medida que se incorporan nuevos nodos, se pueden utilizar los polinomios interpoladores anteriormente calculados para obtener el siguiente. De este modo se tiene una relación entre los sucesivos polinomios que se van construyendo $p_1(x)$, $p_2(x)$, …, $p_n(x)$, a medida que se va trabajando con dos, tres, hasta $n+1$ nodos.

De esta manera se pueden calcular los polinomios interpoladores de Newton mediante el siguiente esquema recursivo:

(1) $$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

(2) $$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

(3) $$p_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\vdots$$

(4) $$\begin{aligned} p_n(x) = \; & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ & + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Este método de cálculo de los polinomios interpoladores permite obtener un polinomio de grado *n* a partir de uno de grado $n-1$ mediante la ley de recurrencia:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-2})(x - x_{n-1}).$$

A continuación se calculan los coeficientes a_i de los diferentes polinomios interpoladores.

Para calcular el polinomio de orden n se necesitan $n+1$ datos.

Para $n = 0$ se obtiene una constante (polinomio de grado cero) con el dato $(x_0, f(x_0))$, por tanto como el polinomio debe pasar por ese punto, $p_0(x) = f(x_0)$.

Para $n = 1$ se dispone de los datos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$. El polinomio interpolador $p_1(x)$ debe pasar por ambos puntos, por tanto, $p_1(x_0) = f(x_0)$ y $p_1(x_1) = f(x_1)$.

Como $p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$, evaluando en x_0, resulta $p_1(x_0) = a_0 = f(x_0)$. Algo que era de esperar ya que por la ley de recurrencia que se utiliza $p_1(x) = p_0(x) + a_1(x - x_0)$.

Es decir para cada polinomio solamente hay que calcular un coeficiente, y este se obtiene haciendo que el nuevo polinomio interpolador pase por el último punto incorporado al conjunto de nodos.

Evaluando en x_1, $p_1(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \Rightarrow a_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$.

De este modo se pude apreciar que a_1 es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$.

A continuación se calcula el polinomio de grado dos $p_2(x)$, para el que solamente hay que calcular a_2, $p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$. Resolviendo la ecuación $p_2(x_2) = f(x_2)$ se calcula el nuevo coeficiente a_2,

$$p_2(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2) \Rightarrow a_2 = \frac{f(x_2) - a_0 + a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Sustituyendo a_0 y a_1 por su valor se obtiene:

$$a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_0)}$$

Como se puede apreciar en los resultados obtenidos tanto para a_1 como para a_2 ambos coeficientes son cocientes de diferencias.

A medida que se van calculando coeficientes a_i para el polinomio interpolador, todos los coeficientes resultantes son cocientes de diferencias que se definen como **diferencias divididas**.

a_1 es la diferencia dividida de primer orden en x_0 y x_1, y se representa como $f[x_0, x_1]$

a_2 es la diferencia dividida de segundo orden en x_0, x_1 y x_2, y se representa como $f[x_0, x_1, x_2]$.

Se puede demostrar que el coeficiente k-esimo de polinomio interpolador de orden k es la diferencia dividida de orden k conseguida a partir de los primeros k+1 nodos, $a_k = f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k]$

Por tanto el polinomio interpolador obtenido por el método de Newton queda representado mediante diferencias divididas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p_n(x) = \; & f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ & + f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-2})(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_i](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})$$

Método de cálculo de las diferencias divididas:

Las diferencias divididas de una función $f\left(x\right)$ se definen como:

$$f\left[x_k\right]=f(x_k)$$

$$f\left[x_{k-1},x_k\right]=\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{(x_k-x_{k-1})}=\frac{f\left[x_k\right]-f\left[x_{k-1}\right]}{(x_k-x_{k-1})}$$

$$f\left[x_{k-2},x_{k-1},x_k\right]=\frac{f\left[x_{k-1},x_k\right]-f\left[x_{k-2},x_{k-1}\right]}{(x_k-x_{k-2})}$$

$$f\left[x_{k-3},x_{k-2},x_{k-1},x_k\right]=\frac{f\left[x_{k-2},x_{k-1},x_k\right]-f\left[x_{k-3},x_{k-2},x_{k-1}\right]}{(x_k-x_{k-3})}$$

De este modo se construye la siguiente tabla de diferencias divididas para obtener el polinomio interpolador:

x_k	$f[\ ]$	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ,\ ]$
x_0	$f\left[x_0\right]$				
		$f\left[x_0,x_1\right]$			
x_1	$f\left[x_1\right]$		$f\left[x_0,x_1,x_2\right]$		
		$f\left[x_1,x_2\right]$		$f\left[x_0,x_1,x_2,x_3\right]$	
x_2	$f\left[x_2\right]$		$f\left[x_1,x_2,x_3\right]$		$f\left[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4\right]$
		$f\left[x_2,x_3\right]$		$f\left[x_1,x_2,x_3,x_4\right]$	
x_3	$f\left[x_3\right]$		$f\left[x_2,x_3,x_4\right]$		
		$f\left[x_3,x_4\right]$			
x_4	$f\left[x_4\right]$				

Ejemplo:

Se desea obtener el polinomio interpolador que pasa por los puntos siguientes:

x_i	0.2	0.6	1	1.4
$f(x_i)=\cos(x_i)$	0.980067	0.825336	0.540302	0.169967

Dado que se dispone de cuatro nodos, el grado del polinomio de interpolación será $n=3$. A continuación se presenta la tabla de diferencias divididas correspondiente:

x_k	$f[\ ]$	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$
$x_0 = 0.2$	$f[x_0] =$ 0.980067			
		$f[x_0,x_1] = \frac{0.825336-0.980067}{0.6-0.2} =$ -0.386827		
$x_1 = 0.6$	$f[x_1] =$ 0.825336		$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{-0.712583-(-0.386827)}{1-0.2} =$ -0.407195	
		$f[x_1,x_2] = \frac{0.540302-0.825336}{1-0.6} =$ -0.712583		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{-0.266569-(-0.407195)}{1.4-0.2} =$ 0.117188
$x_2 = 1$	$f[x_2] =$ 0.540302		$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{-0.925838-(-0.712583)}{1.4-0.6} =$ -0.266569	
		$f[x_2,x_3] = \frac{0.169967-0.540302}{1.4-1} =$ -0.925838		
$x_3 = 1.4$	$f[x_3] =$ 0.169967			

A medida que se van incorporando puntos, se van obteniendo polinomios interpoladores de grado superior.

Utilizando x_0 y x_1, se obtiene la recta : $p_1(x) = 0.980067 - 0.386827 \cdot (x - 0.2)$

Utilizando los valores correspondientes a los puntos x_0, x_1 y x_2 el polinomio es:

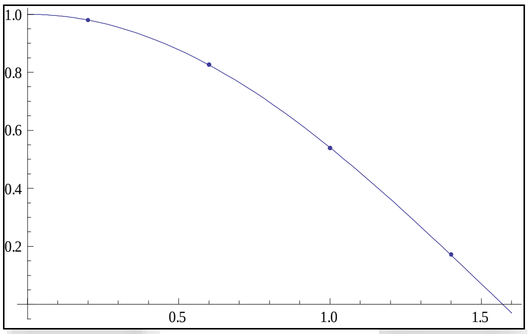
$$\begin{aligned} p_2(x) &= 0.980067 - 0.386827 \cdot (x - 0.2) - 0.407195 \cdot (x - 0.2) \cdot (x - 0.6) = \\ &= 1.00857 - 0.061071x - 0.407195x^2 \end{aligned}$$

que, dado que el polinomio interpolador es único, es el mismo polinomio que se obtiene en el ejemplo en que se aplicó el método de Lagrange.

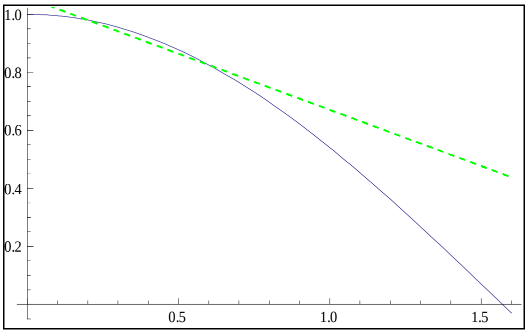
Si se utilizan los cuatro puntos x_0, x_1, x_2 y x_3 el polinomio resultante es:

$$p_3(x) = 0.980067 - 0.386827\cdot(x-0.2) - 0.407195\cdot(x-0.2)\cdot(x-0.6) + $$
$$+0.117188\cdot(x-0.2)\cdot(x-0.6)\cdot(x-1)$$

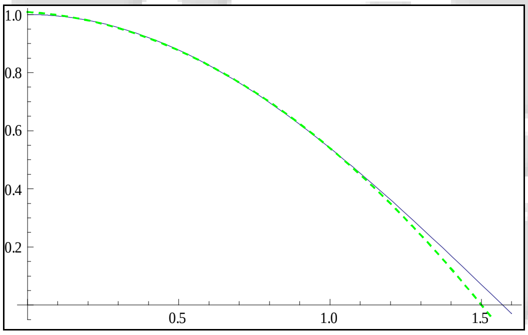
En los siguientes gráficos se puede ver como a medida que se van utilizando polinomios de grado superior se consigue un mejor ajuste en todo el intervalo mediante polinomios que pasan por los puntos $(x_i, f(x_i))$.



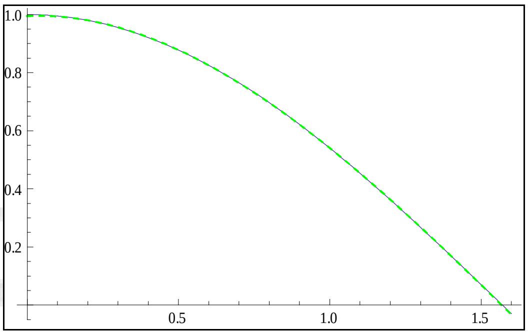
Función Cos(x)



Función Cos(x) y polinomio $p_1(x)$



Función Cos(x) y polinomio $p_2(x)$



Función Cos(x) y polinomio $p_3(x)$

Ejemplo con *Mathematica*.

Cálculo del polinomio interpolador: Método de Newton, Diferencias divididas.

In[1]:= `f[x_] = Sin[x]`

Out[1]= `Sin[x]`

In[2]:= `datos = Table[{i, f[i]}, {i, 0, Pi, Pi/6}]`

Out[2]= $\left\{\{0,0\},\left\{\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right\},\left\{\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right\},\left\{\frac{\pi}{2},1\right\},\left\{\frac{2\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right\},\left\{\frac{5\pi}{6},\frac{1}{2}\right\},\{\pi,0\}\right\}$

In[3]:= `absc = Table[datos[[i, 1]], {i, 1, Length[datos]}]`

Out[3]= $\left\{0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6},\pi\right\}$

In[4]:= `ord = Table[datos[[i, 2]], {i, 1, Length[datos]}]`

Out[4]= $\left\{0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right\}$

In[5]:= `difdiv = List[]`

Out[5]= `{}`

In[6]:= `difdiv = Append[difdiv, ord];`

In[7]:= `Do[`

`difdiv = Append[difdiv, Table[` $\frac{\texttt{difdiv[[i - 1, j + 1]] - difdiv[[i - 1, j]]}}{\texttt{absc[[j + i - 1]] - absc[[j]]}}$`,`

`{j, 1, Length[datos] - i + 1}]], {i, 2, Length[datos]}]`

- **Tabla de diferencias divididas**

In[8]:= `Row[Table[Column[difdiv[[i]] // N], {i, 1, Length[datos]}]]`

Out[8]=

0.	0.95493	-0.24434	-0.113872	0.0344691	0.00203682	-0.00129668
0.5	0.699057	-0.42321	-0.04168	0.0398015	-0.00203682	
0.866025	0.255873	-0.488681	0.04168	0.0344691		
1.	-0.255873	-0.42321	0.113872			
0.866025	-0.699057	-0.24434				
0.5	-0.95493					
0.						

In[9]:= $\texttt{pol[x\_] = (difdiv[[1, 1]] // N)} + \sum_{i=2}^{\texttt{Length[datos]}} \left(\texttt{(difdiv[[i, 1]] // N)} * \prod_{j=1}^{i-1} \texttt{(x - absc[[j]])}\right)$

Out[9]= $0. + 0.95493\,x - 0.24434\,x\left(-\frac{\pi}{6}+x\right) - 0.113872\,x\left(-\frac{\pi}{3}+x\right)\left(-\frac{\pi}{6}+x\right) + 0.0344691\,x\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)\left(-\frac{\pi}{3}+x\right)\left(-\frac{\pi}{6}+x\right) + 0.00203682\,x\left(-\frac{2\pi}{3}+x\right)\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)\left(-\frac{\pi}{3}+x\right)\left(-\frac{\pi}{6}+x\right) - 0.00129668\,x\left(-\frac{5\pi}{6}+x\right)\left(-\frac{2\pi}{3}+x\right)\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)\left(-\frac{\pi}{3}+x\right)\left(-\frac{\pi}{6}+x\right)$

In[10]:= `InterpolatingPolynomial[datos, x] // N`

Out[10]= $(0.95493 + (-0.24434 + (-0.113872 + (0.0344691 + (0.00203682 - 0.00129668\,(-2.61799 + x))\,(-2.0944 + x))\,(-1.5708 + x))\,(-1.0472 + x))\,(-0.523599 + x))\,x$

Análisis del error en el polinomio interpolador por el método de Newton

En primer lugar se demostrará un teorema que permite relacionar las diferencias divididas con las derivadas de la función $f(x)$

Teorema: Si la función $f(x)\in C^n[a,b]$, y $x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\in[a,b]$ son nodos distintos entre si, entonces $\exists\xi\in[a,b]\quad/\quad f[x_0,x_1,x_2,\dots,x_n]=\dfrac{f^{n)}(\xi)}{n!}$.

Se plantea una función auxiliar $g(x)=f(x)-p(x)$.

Dado que el polinomio interpolador pasa por los puntos $(x_i,\,f(x_i))\ \ \forall\ \ i=0,1,2,\dots,n$, la función $g(x)$ se anula en los $n+1$ puntos $x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\in[a,b]$.

Aplicando el teorema de Rolle, en el intervalo $[a,b]$, la función $g'(x)$, se anula, al menos, *n* veces. Aplicando el teorema de Rolle a las derivadas sucesivas, la función $g^{n)}(x)$, se anula, al menos, en un punto $\xi\in[a,b]$.

Por tanto: $g^{n)}(\xi)=0=f^{n)}(\xi)-p^{n)}(\xi)$.

$p(x)$ es un polinomio de grado n en el que el coeficiente de x^n es $f[x_0,x_1,x_2,\dots,x_n]$,de modo que $p^{n)}(x)=f[x_0,x_1,x_2,\dots,x_n]\cdot n!$, es una constante.

$$g^{n)}(\xi)=0=f^{n)}(\xi)-f[x_0,x_1,x_2,\dots,x_n]\cdot n!\Rightarrow f[x_0,x_1,x_2,\dots,x_n]=\frac{f^{n)}(\xi)}{n!}.$$

A continuación se calcula el error cometido al evaluar el polinomio interpolador en un punto s perteneciente al intervalo $[a,b]$.

Con los n+1 puntos $x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\in[a,b]$, se puede calcular el polinomio $p(x)$ de grado *n.* Si se añade el punto $(s,\,f(s))$ a los datos del problema, se podrá obtener un nuevo polinomio de grado *n+1:*

$$q(x)=p(x)+f[x_0,x_1,x_2,\dots,x_n,s]\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$$

que pasa exactamente por los *n+2* puntos , $(x_i,\,f(x_i))\ \ \forall\ \ i=0,1,2,\dots,n$ y el punto $(s,\,f(s))$.

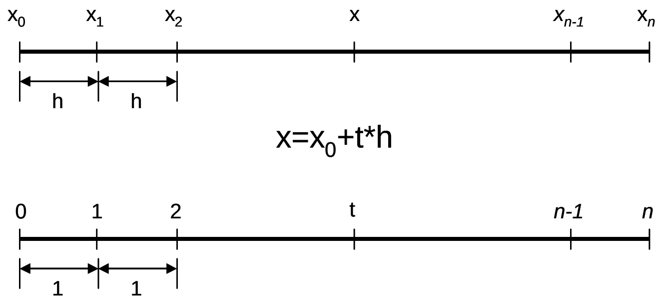
Evaluando $q(s)$, resulta:

$$q(s)=f(s)=p(s)+f[x_0,x_1,x_2,\dots,x_n,s]\cdot(s-x_0)\cdot(s-x_1)\cdot\ldots\cdot(s-x_n)\quad\Rightarrow$$

$$e(s) = f(s) - p(s) = f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, s] \cdot \prod(s).$$

Interpolación con nodos igualmente espaciados.

En muchas ocasiones se dispone de datos en los que todas las abscisas se encuentran separadas una cantidad *h* constante. Cuando esto sucede, se puede realizar un cambio de variable de modo que las expresiones generales del cálculo del polinomio interpolador, tanto para el método de Lagrange como para el método de Newton se simplifican notablemente.



Cambio de variable para nodos igualmente espaciados

En este apartado realizaremos ese cambio de variable y veremos cuales son las expresiones que resultan para el cálculo del polinomio interpolador.

Método de Lagrange

La expresión general del cálculo del polinomio interpolador por el método de Lagrange es la siguiente:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Realizando el cambio de variable que se ha indicado: $x = x_0 + t \cdot h$.

Resulta que :

$$x - x_0 = t \cdot h$$

$$x - x_1 = (x - x_0) - (x_1 - x_0) = t \cdot h - h = h \cdot (t - 1)$$

$$x - x_2 = (x - x_0) - (x_2 - x_0) = t \cdot h - 2h = h \cdot (t - 2)$$

$$x - x_i = h \cdot (t - i)$$

$$x - x_j = h \cdot (t - j)$$

$$x_i - x_j = (x - x_j) - (x - x_i) = h \cdot (t - j) - h \cdot (t - i) = h \cdot (i - j)$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión del polinomio interpolador, se obtiene una expresión en variable t

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \Rightarrow q(t)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{h(t-j)}{h(i-j)} \Rightarrow \boxed{q(t)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{(t-j)}{(i-j)}}$$

Para obtener el valor del polinomio para un punto cualquiera *x*, basta con evaluar el polinomio $q(t)$ en el punto $t=\frac{x-x_0}{h}$.

Método de Newton. Diferencias finitas

Para realizar el cálculo del polinomio interpolador por el método de Newton con nodos igualmente espaciados, se comenzará definiendo unos nuevos operadores derivados de las diferencias divididas que ya se han estudiado.

Diferencias finitas.

Dado que todos los nodos se encuentran separados una cantidad *h*, podemos analizar de nuevo las diferencias finitas de la siguiente manera:

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_1-x_0)}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{(x_2-x_1)}-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_1-x_0)}}{(x_2-x_0)}\Rightarrow$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{h}-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{h}}{2h}=\frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{2h^2}$$

De este modo se puede apreciar como existe una relación directa entre las diferencias divididas que calculamos anteriormente y unos nuevos operadores en los que solamente aparecen las ordenadas de los puntos utilizados para el proceso de interpolación. A estos nuevos operadores se les llama diferencias finitas y se denotan mediante la letra griega delta mayúscula Δ.

Así:

$$\Delta f(x_0)=f(x_1)-f(x_0)=h\cdot f[x_0,x_1]$$

$$\Delta^2 f(x_0)=f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)=2h^2\cdot f[x_0,x_1,x_2]$$

De este modo y mediante el método de inducción se puede demostrar que $\Delta^n f(x_0)=n!h^n\cdot f[x_0,x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n]$

Las diferencias finitas se pueden calcular igual que se hizo con las diferencias divididas mediante una tabla sencilla.

x_k	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
x_0	$f[x_0]$				
		$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$			
x_1	$f[x_1]$		$\Delta^2 f(x_0) =$ $= \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)$		
		$\Delta f(x_1) = f(x_2) - f(x_1)$		$\Delta^3 f(x_0) =$ $= \Delta^2 f(x_1) - \Delta^2 f(x_0)$	
x_2	$f[x_2]$		$\Delta^2 f(x_1) =$ $= \Delta f(x_2) - \Delta f(x_1)$		$\Delta^4 f(x_0) =$ $= \Delta^3 f(x_1) - \Delta^3 f(x_0)$
		$\Delta f(x_2) = f(x_3) - f(x_2)$		$\Delta^3 f(x_1) =$ $= \Delta^2 f(x_2) - \Delta^2 f(x_1)$	
x_3	$f[x_3]$		$\Delta^2 f(x_2) =$ $= \Delta f(x_3) - \Delta f(x_2)$		
		$\Delta f(x_3) = f(x_4) - f(x_3)$			
x_4	$f[x_4]$				

Conocida la relación entre las diferencias divididas y las diferencias finitas, se puede obtener la expresión correspondiente al polinomio interpolador por el método de Newton para nodos igualmente espaciados.

La expresión conocida del polinomio interpolador es:

$$\begin{aligned} p_n(x) = \quad & f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ & + f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-2})(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $x = x_0 + t \cdot h$, se obtiene el nuevo polinomio interpolador *q(t)* :

$$\begin{aligned} q(t) = \quad & f[x_0] + \frac{\Delta f(x_0)}{h}(t \cdot h) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2 \cdot h^2}(t \cdot h)(h \cdot (t-1)) + \cdots \\ & + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n! \cdot h^n}(t \cdot h)(h \cdot (t-1))\cdots(h \cdot (t-(n-2)))(h \cdot (t-(n-1))) \end{aligned}$$

Simplificando la expresión anterior resulta:

$$q(t) = \Delta^0 f(x_0) + \Delta f(x_0)(t) + \Delta^2 f(x_0)\frac{t\cdot(t-1)}{2!} + \Delta^3 f(x_0)\frac{t\cdot(t-1)(t-2)}{3!} + \cdots + \Delta^n f(x_0)\frac{t\cdot(t-1)(t-2)\cdots(t-(n-2)(t-(n-1)}{n!}$$

A continuación se transforma la expresión utilizando números combinatorios.

$$q(t) = \Delta^0 f(x_0)\binom{t}{0} + \Delta f(x_0)\binom{t}{1} + \Delta^2 f(x_0)\binom{t}{2} + \Delta^3 f(x_0)\binom{t}{3} + \cdots + \Delta^n f(x_0)\binom{t}{n}$$

De manera que la forma compacta del polinomio interpolador es:

$$q(t) = \sum_{i=0}^{n} \Delta^i f(x_0)\binom{t}{i}$$

Para obtener el valor del polinomio para un punto cualquiera x, basta con evaluar el polinomio $q(t)$ en el punto $t = \frac{x - x_0}{h}$.

Ejemplo:

Se desea obtener el polinomio interpolador que pasa por los puntos siguientes:

x_i	0.2	0.6	1	1.4
$f(x_i)=\mathrm{Cos}(x_i)$	0.980067	0.825336	0.540302	0.169967

Dado que se dispone de cuatro nodos, $n=3$, y $h=0.4$, se debe calcular la tabla de diferencias finitas que se presenta a continuación:

x_k	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$
0.2	0.980067			
		$\Delta f(x_0) = 0.825336 - 0.980067 = = -0.154731$		
0.6	0.825336		$\Delta^2 f(x_0) = -0.285033 - (-0.154731) = = -0.130302$	
		$\Delta f(x_1) = 0.540302 - 0.825336 = = -0.285033$		$\Delta^3 f(x_0) = -0.085302 - (-0.130302) = = 0.0450000$
1	0.540302		$\Delta^2 f(x_1) = -0.370335 - (-0.285033) = = -0.085302$	
		$\Delta f(x_2) = 0.169967 - 0.540302 = = -0.370335$		
1.4	0.169967			

El polinomio interpolador resultante es:

$$q(t) = \Delta^0 f(x_0)\binom{t}{0} + \Delta f(x_0)\binom{t}{1} + \Delta^2 f(x_0)\binom{t}{2} + \Delta^3 f(x_0)\binom{t}{3} \Rightarrow$$

$$q(t) = 0.980067\binom{t}{0} + (-0.154731)\binom{t}{1} + (-0.130302)\binom{t}{2} + (-0.045)\binom{t}{3} \Rightarrow$$

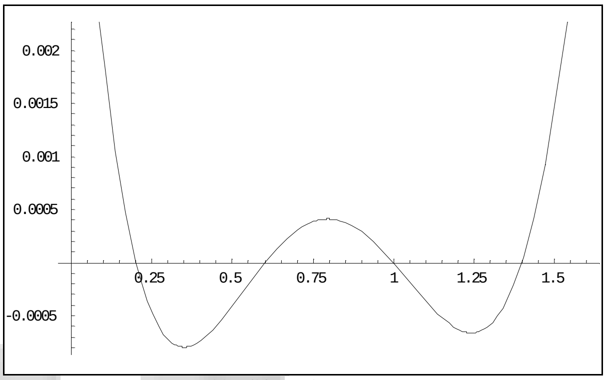
$$q(t) = 0.980067 + (-0.154731)t + (-0.130302)\frac{t(t-1)}{2} + (-0.045)\frac{t(t-1)(t-2)}{6} \Rightarrow$$

$$q(t) = 0.980067 + (-0.154731)t + (-0.130302)\frac{t(t-1)}{2} + 0.045\frac{t(t-1)(t-2)}{6} \Rightarrow$$

$$q(t) = 0.980067 - 0.07458 \cdot t - 0.087651 \cdot t^2 + 0.0075 \cdot t^3$$

A continuación se realiza el cambio de variable:

$$p(x) = q\left(\frac{x - x_0}{h}\right) = q\left(\frac{x - 0.2}{0.4}\right) = 0.994507 + 0.04674 \cdot x - 0.618131 \cdot x^2 + 0.117188 \cdot x^3$$



Función diferencia Cos(x) –*p(x)*.

Ejercicios

1.- Estudiar el problema siguiente: Hallar un polinomio de grado no mayor que dos tal que: $p(x_0) = z_0$; $p(x_1) = z_1$; $p'(x_2) = z_2$.

2.- ¿Queda determinado un polinomio p(x) de grado no mayor que tres por los siguientes datos:
a) $p(0)$, $p(1)$, $p'(-1)$, $p''(0)$?
b) $p(0)$, $p'(-1)$, $p'(0)$, $p''\left(-\frac{1}{2}\right)$

3.- Se desea interpolar una función $f(x)$ utilizando un polinomio de la forma $p(x) = a + bx^2$, conociendo $f(x)$ en dos puntos dados x_1, x_2. Estudiar el problema de interpolación correspondiente.

4.- Determinar el polinomio de interpolación de Lagrange de grado no mayor que dos, que tome los valores 1, 2, -1 en los puntos 0, 1, -2, respectivamente.

5.- Supóngase que se tiene calculada una tabla de diferencias divididas para una función $f(x)$ en los puntos x_0, x_1, …, x_n por la cual se conoce el polinomio de interpolación $p_n(x)$. Si se desea añadir un punto más x_{n+1} y hallar el nuevo polinomio de interpolación $p_{n+1}(x)$, ¿qué cálculos hay que realizar?

6.- Constrúyase la tabla de diferencias divididas para la función $f(x) = x^3$ en los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$. A partir de ella escríbase la expresión del polinomio de interpolación de f (x) en la forma de Newton.
Escríbase también en la forma de Lagrange y coméntese el resultado.

7.- En el ejercicio anterior, escríbase el polinomio de interpolación de f(x) en $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, en las formas de Newton y Lagrange. Comprobar las ventajas de la primera al añadir un punto más, el $x_3 = 4$, y llegar a los resultados del ejercicio anterior.

8.- Determinar el polinomio de interpolación de grado n = 3 que pasa por los puntos dato de la tabla, siguiendo el orden indicado:

i	3	1	0	2
x_i	0	1	3	4
y_i	-5	1	25	55

9.- Escríbase la expresión del polinomio de interpolación si se conocen únicamente los datos $f[x_n]$, $f[x_n, x_{n-1}]$, …, $f[x_{n,\dots,}x_0]$, además de los valores de $x_{0,\dots,}\, x_n$.

10.- Si en la fórmula de Newton se prescinde de los dos últimos sumandos, ¿qué representa el polinomio obtenido?

11.- En la siguiente tabla se presentan valores de la función $\cos(\theta)$ y las correspondientes diferencias divididas. Evaluar el polinomio de interpolación de segundo grado que pasa a través de los valores de la función en $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, para el argumento $\theta = 0.25$. Estudiar el error cometido

i	θ_i	$\cos(\theta_i)$					
0	0.0	1					
			-0.099667				
1	0.2	0.980066		-0.492112			
			-0.247300		0.037106		
2	0.3	0.955336		-0,477270		0.039670	
			-0.342754		0.060908		0.0022966
3	0.4	0.921060		-0.452906		0.037593	
			-0.478626		0.0779705		
4	0.6	0.825335		-0.421024			
			-0.604934				
5	0.7	0.764842					

12.- Con los siguientes datos

x_i	0	1	3	4	6	7
f_i	-5	1	25	55	181	289

construir la tabla de diferencias divididas y el correspondiente polinomio de interpolación de mayor grado posible.

13.- En la tabla siguiente se dan valores de la función $y(x) = \sqrt{x}$ redondeados hasta cinco cifras decimales:

x_1	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$y(x_i)$	1	1.02470	1.04881	1.07238	1.09545	1.11803	1.14017

a) Calcular las diferencias hasta Δ^3.
b) Utilizar la tabla para obtener $\sqrt{1.01}$, $\sqrt{1.28}$, $\sqrt{1.12}$.

14.- Calcular los valores y_k que faltan a partir de las primeras diferencias

y_k	0					
Δy_k	1	2	4	7	11	16

15.-Calcular las diferencias finitas hasta las de orden 4 para los siguientes valores y_k. Suponiendo que $x_k = k$, obtener el polinomio de interpolación.

k	0	1	2	3	4	5	6
y_k	0	1	16	81	256	625	1296

16.-Completar la siguiente tabla

x_k	0	1	2	3	4	5	6	7
y_k	1	2	4	8	15	26	.	.

suponiendo que los datos provienen de una función polinómica.

17.- Hállese $\sqrt{2}$ con la exactitud de hasta 0.0001 construyendo para la función $f(x)=\sqrt{x}$ un polinomio de interpolación en el segmento $[1.69, 2.25]$.

18.- Aplicar la fórmula de Newton progresiva a los puntos de la siguiente tabla para obtener un valor aproximado de $f(1.5)$ mediante un polinomio de interpolación de segundo grado.

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	-5	1	9	25	55

Aplicar la fórmula Newton para obtener el valor aproximado de $f(3.5)$ mediante polinomio de tercer grado.

19.- Sabiendo que $f(0)=2$, $f(1)=3$, $f(4)=18$, $f(6)=38$, hallar el valor de la variable independiente para el que la función vale 11.

20.- Formar la tabla de diferencias divididas para los siguientes datos:

x	0.30	0.37	0.41	0.52
$f(x)$	0.97741	0.96557	0.95766	0.933157

- Obtener el polinomio de interpolación que verifica los datos de la tabla.
- Una vez definido el polinomio de interpolación, calcular $p_3(0.47)$ y comparar el resultado obtenido con $f(0.47)=0.94423$
- Añadir a la tabla un punto dato $f(0.47)=0.94423$ y determinar $p_4(x)$. ¿Es sencillo realizar los cálculos insertando un punto adicional en la tabla? Justificar la respuesta

21.- Los valores de la integral $\varnothing(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}\,dx$ están dados en la siguiente tabla:

i	0	1	2	3	4	5	6
x	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56	0.57
$\varnothing(x)$	0.5292437	0.5378987	0.5464641	0.5549392	0.5633233	0.5716157	0.5798158

- Construir la tabla de diferencias. ¿Hasta qué orden es necesario calcular? Justificar la respuesta.
- Obtener el polinomio de interpolación que pase por los puntos (x_i, y_i) para i = 0, 1, 2, 3, 4.
- Calcular a partir de él una aproximación del valor de $\int_0^{0.515} e^{-x^2}\,dx$
- Indicar cual sería la fórmula de interpolación mas adecuada para calcular ∅ (0.5437). ¿Qué puntos y diferencias utiliza?
- Obtener el valor de x que hace que $\varnothing(x)=0.56$. Realizar la tabla y los cálculos de este apartado redondeando a cuatro decimales.

22.— Dada la tabla siguiente correspondiente a $y=\sin(x)$,

x	0.26178	0.34905	0.43632	0.52359	0.61086	0.69813	0.78540	0.87267	0.95994
y	0.2588	0.3420	0.4226	0.5000	0.5736	0.6428	0.7071	0.7660	0.8192

se pide:
- Formar la tabla de diferencias finitas hasta las de tercer orden, justificando por qué es suficiente con llegar a las de este orden.

- A partir de esta tabla, obtener la mejor aproximación de $\sin(0.2443)$, $\sin(0.9774)$ y $\sin(0.7505)$, justificando las elecciones de puntos y fórmulas utilizadas. Obtener la aproximación de los errores cometidos al calcular $\sin(0.2443)$ y $\sin(0.9774)$.

23.- Completar la siguiente tabla de diferencias:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	…					
		…				
5	…		0.0013			
		0.0888		…		
10	…		…		0.0002	
		…		…		–0.0002
15	…		…		…	
		…		0.0017		
20	…		…			
		…				
25	0.4663					

24.- Completar la tabla de diferencias para los siguientes datos:

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
y	0.003	0.067	0.148	0.248	0.370	0.518	0.697

- Mediante un polinomio cúbico de interpolación obtener $y(0.58)$.

25.- Utilizando diferencias progresivas, encontrar un valor aproximado de $y(23)$ usando los datos de la siguiente tabla:

x_i	10	20	30	40	50	60
$y(x_i)$	0.17365	0.34202	0.50000	0.64279	0.76604	0.86603

- A partir de un polinomio de primer grado.
- A partir de un polinomio de segundo grado.
- A partir de un polinomio de tercer grado.

26.- Si se denota por $P_2(x)$ el polinomio de interpolación de la función $f(x)=e^x$ en los nodos $1, -0.75$ y -0.5, y por $R_2(x)$ el error debido a la aproximación de $f(x)=e^x$ mediante su polinomio de interpolación, obtener una cota máxima del error cometido sabiendo que $R_n(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_1)\dfrac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$

27.- Dada la siguiente tabla de puntos pertenecientes al gráfico de la función $f(x)$:

x_k	3	4	5	6
$f(x_k)$	6	24	60	120

- Construir la tabla de diferencias divididas.
- Calcular un polinomio de interpolación de segundo grado mediante la fórmula de Newton que sirva para obtener un valor aproximado de la función para $x=4.5$. Hacer una estimación del error cometido con dicha aproximación.

- Construir la tabla de diferencias finitas progresivas.
- Calcular el valor aproximado de $f(4.5)$ utilizando la fórmula de Newton progresiva mediante un polinomio de primer grado.
- Mediante un polinomio de segundo grado.
- Mediante un polinomio de tercer grado.
- Hacer en los dos primeros casos una estimación del error cometido.

28.- Utilizar los siguientes valores para construir un polinomio de Lagrange de cuarto orden, mediante el cual aproximar $f(1.25)$, siendo $f(x)=e^{x^2-1}$ la función a considerar. Hallar también un límite para error cometido en la aproximación $f(x)$.

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
$f(x)$	1.00000	1.23368	1.55271	1.99372	2.64470

29.— Consideremos la función $f(x)=3x\cdot e^x-2e^x$. Aproximar $f(1.03)$ utilizando el polinomio de interpolación de grado ≤ 2, usando $x_0=1$, $x_1=1.05$ y $x_2=1.07$. Comparar el error cometido con el límite de error de la interpolación.

30.— Dada la tabla de valores de la función $y=\sin(x)$ desde $x=15^o$ hasta $x=55^o$ con amplitud de paso $h=5^o$:

x	15º	20º	25º	30º	35º	40º	45º	50º	55º
y	0.2588	0.3420	0.4226	0.5000	0.5736	0.6428	0.7071	0.7660	0.8192

- Formar la tabla de diferencias, hasta las de tercer orden, justificando por qué es suficiente con llegar a las de este orden.
- A partir de esta tabla obténganse las mejores aproximaciones posibles para los valores $\sin(14^o)$ y $\sin(43^o)$, justificando las elecciones de puntos y las fórmulas utilizadas.
- Obtener aproximaciones de los errores cometidos al calcular los valores anteriores.

31.- Deducir los polinomios de interpolación de Newton de cocientes incrementales de grados sucesivos (1º, 2º, 3º, 4º) y los términos de error correspondientes para la función $f(x)$ definida por los puntos $(x_i, f(x_i))$ con i = 0, 1, 2, 3, 4.
- Utilizando los datos de la tabla, correspondientes a la función $f(x)=\cos(x)$, obtener los polinomios deducidos en al apartado anterior, así como los términos de error correspondientes.

x_k	$f[x_k]$	$f[\,,\,]$	$f[\,,\,,\,]$	$f[\,,\,,\,,\,]$	$f[\,,\,,\,,\,,\,]$
0.0	1.0000000				
1.0	0.5403023	–0.4596977			
2.0	–0.4161468	–0.9564491	–0.2483757		
3.0	–0.9899925	–0.5738457	0.1913017	0.1465591	
4.0	–0.6536436	0.3363489	0.4550973	0.0879319	–0.0146568

32.- Dada la siguiente tabla correspondiente a la función $f(x)=e^{-x}$,

x	0.0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1.0
$f(x)$	1.0000	0.8825	0.7788	0.6873	0.6065	0.5353	0.4724	0.4169	0.3679

se desea obtener una estimación de $f(0.55)$

- Obtener el grado N del polinomio para que, con una elección adecuada de los puntos base, la cota del error de truncamiento de $p_n(x)$ sea menor que 10^{-4}. Construir el correspondiente polinomio de interpolación y obtener la estimación pedida.