

Sistemas de ecuaciones lineales.

Métodos iterativos.

Normas vectoriales y matriciales.

Norma vectorial.

Dado un espacio vectorial E de dimensión n , se dice que una aplicación de E sobre \mathbb{R} es norma cuando verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
 E &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\rightarrow \|x\| \\
 \forall x \in E &\quad \|x\| \geq 0; \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\
 \forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R} &\quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \\
 \forall x, y \in E &\quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|
 \end{aligned}$$

Las normas más utilizadas en el espacio vectorial \mathbb{R}^n son:

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Norma del valor absoluto.

- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Norma euclídea.

- $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$. Norma del máximo.

La distancia entre dos vectores se define como la norma del vector diferencia, $d(x, y) = \|x - y\|$.

Por otro lado, en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales mediante un proceso iterativo, se consigue una sucesión de vectores $\{x_k\} \in \mathbb{R}^n$, si esta sucesión de vectores se mide con la norma $\|\cdot\|$, se tiene la caracterización de la convergencia.

La sucesión $\{x_k\}$ converge a x , si las distancias $d(x_k, x) = \|x_k - x\|$ son mas pequeñas que un ε prefijado a partir de un cierto término x_N , es decir para $k > N$.

Todas las normas en \mathbb{R}^n son equivalentes. Es decir, una sucesión $\{x_k\}$ de vectores de \mathbb{R}^n es convergente y verifica $\{x_k\} \rightarrow x$, si y solo si $\|x_k - x\| \rightarrow 0$ con cualquier norma vectorial que se considere en \mathbb{R}^n .

Norma matricial.

Dado un espacio vectorial $M_{n \times n}$ de las matrices cuadradas de orden n , se dice que una aplicación de $M_{n \times n}$ sobre \mathbb{R} es norma cuando verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} M_{n \times n} &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\rightarrow \|A\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall A \in M_{n \times n} & \quad \|A\| \geq 0; \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \\ \forall A \in M_{n \times n}, \forall \alpha \in \mathbb{R} & \quad \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \\ \forall A, B \in M_{n \times n} & \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \\ \forall A, B \in M_{n \times n} & \quad \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \end{aligned}$$

En este apartado consideraremos únicamente aquellas normas matriciales que se pueden obtener como consecuencia de las normas vectoriales definidas anteriormente. Esto es lo que se define como *norma natural o inducida por una norma vectorial*.

Partiendo de todas ellas se define normas matriciales de la siguiente manera:

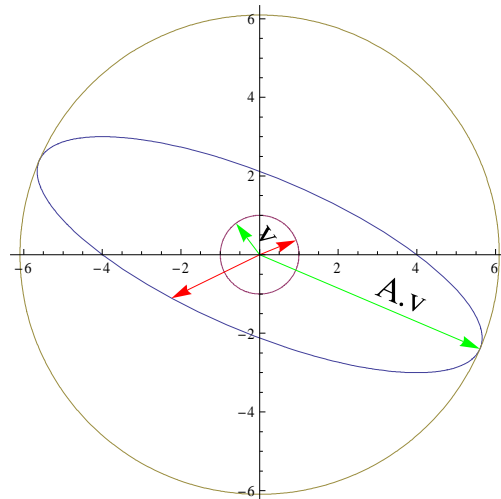
$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|A \cdot x\|$$

De este modo, para cada una de las normas vectoriales anteriormente definidas se obtiene una norma matricial:

- Norma espectral, obtenida a partir de la norma euclídea.

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|A \cdot x\|_2 = \sqrt{\rho(A^t \cdot A)}$$

Geoméricamente se puede explicar para matrices 2x2 de forma sencilla.



Norma espectral de una matriz 2x2

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. En la figura se representa el lugar geométrico de todos los vectores x de norma unidad (Círculo pequeño).

A continuación se calcula el lugar geométrico de los vectores $A \cdot x$ donde x es un vector de norma unidad (Elipse).

La norma de la matriz A coincide con la longitud del semieje mayor de la elipse, es decir con la norma del vector $A \cdot x$ de máxima norma.

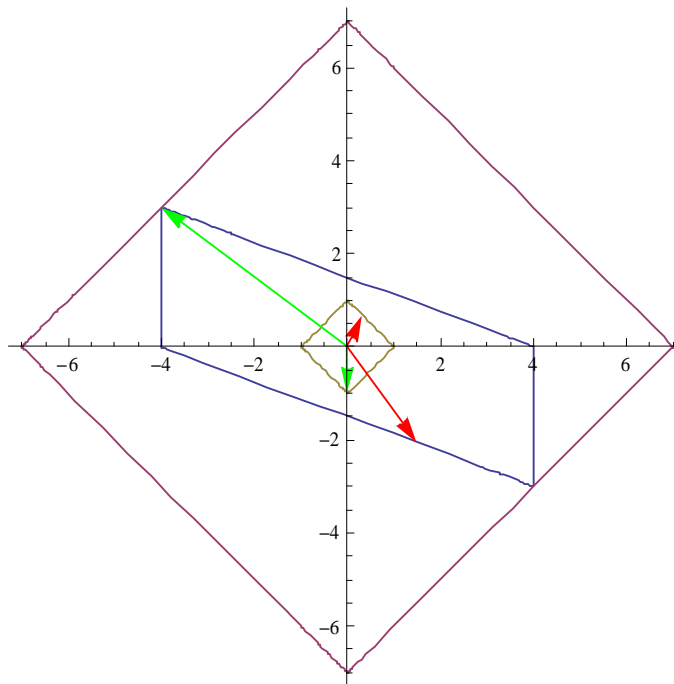
Se puede demostrar que, algebraicamente, la norma de la matriz A se calcula como $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t \cdot A)}$, es decir la raíz cuadrada del radio espectral de la matriz $A^t \cdot A$.

El radio espectral de una matriz es el máximo del valor absoluto de los autovalores de dicha matriz.

- Norma obtenida a partir de la norma del valor absoluto.

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|A \cdot x\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left[\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right]$$

Se puede demostrar que esta norma se calcula como el máximo de la suma de los valores absolutos de los elementos de cada columna.



Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. En la figura se representa el lugar geométrico de todos los vectores x de norma unidad (Rombo pequeño).

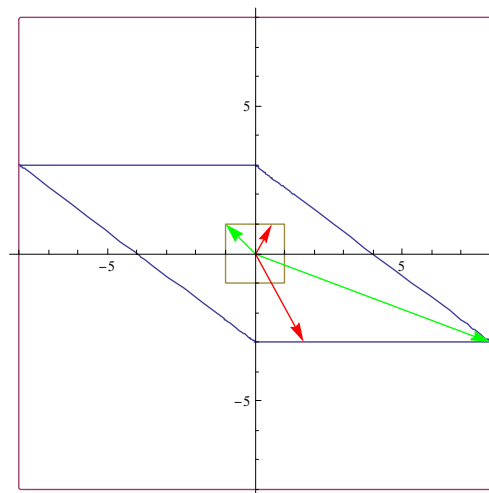
A continuación se calcula el lugar geométrico de los vectores $A \cdot x$ donde x es un vector de norma unidad (Rombo deformado).

La norma de la matriz A coincide con la longitud de la mitad de la diagonal mayor del rombo deformado, es decir con la norma del vector $A \cdot x$ de longitud máxima.

- Norma obtenida a partir de la norma del máximo.

$$\|A\|_{\infty} = \max_{\|x\|_{\infty}=1} \|A \cdot x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \left[\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right]$$

Se puede demostrar que esta norma se calcula como el máximo de la suma de los valores absolutos de los elementos de cada fila.



Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. En la figura se representa el lugar geométrico de todos los vectores x de norma unidad (Cuadrado pequeño).

A continuación se calcula el lugar geométrico de los vectores $A \cdot x$ donde x es un vector de norma unidad (Rombo deformado).

La norma de la matriz A coincide con la longitud de la mitad de la diagonal mayor del rombo deformado, es decir con la norma del vector $A \cdot x$ de longitud máxima.

Número de condición

En ocasiones, pequeñas perturbaciones en los datos de un problema pueden derivar en grandes errores en la solución del mismo. En particular, vamos a estudiar cómo afectan pequeñas perturbaciones en el vector de términos independientes de un sistema de ecuaciones lineales a la solución final de dicho sistema. Para realizar este análisis es necesario estudiar el condicionamiento del sistema de ecuaciones. Para ello es necesario conocer el número de condición de la matriz de coeficientes del sistema.

Dado un sistema de ecuaciones lineales $A \cdot x = b$, se pretende conocer cómo afecta a la solución del mismo x , los errores cometidos a lo largo del proceso de resolución o inherentes al vector de términos independientes b .

Aplicando las propiedades de las normas, se tiene que:

$\|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ o equivalentemente, multiplicando los dos miembros por $\frac{1}{\|x\| \cdot \|b\|}$, resulta:

$$\frac{1}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \frac{1}{\|b\|} \quad (1),$$

Si se producen pequeñas perturbaciones en el vector de términos independientes, en lugar de utilizar el vector b se utilizará el vector $b + \delta b$, lo que implica que se obtiene una solución distinta de la exacta $x + \delta x$. El sistema de ecuaciones lineales queda por tanto expresado como

$A \cdot (x + \delta x) = (b + \delta b) \Rightarrow A \cdot \delta x = \delta b$. Como la matriz A es regular dado que es la matriz de coeficientes de un sistema compatible determinado, premultiplicando por su inversa en los dos miembros resulta: $\delta x = A^{-1} \cdot \delta b \Rightarrow \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$ (2).

Multiplicando miembro a miembro las expresiones (1) y (2) se tiene: $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$.

De este modo se relacionan los errores relativos del término independiente y la solución. En particular habrá algún término independiente b y solución x para los que la desigualdad se convierta en igualdad. Así que la desviación máxima relativa que puede sufrir la solución del problema esta relacionada con la perturbación relativa de los datos del problema mediante el producto $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

Dada una norma $\| \cdot \|$, se define el número de condición de una matriz A como $K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. Este número es mayor o igual a uno ya que $I = A \cdot A^{-1} \Rightarrow \|I\| = 1 \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

Si el número $K(A)$ es grande, entonces el sistema es sensible a posibles perturbaciones del vector b y se dice que el sistema está mal condicionado. Por tanto, para conseguir sistemas bien condicionados se deben utilizar matrices de coeficientes cuyo número de condición sea lo más próximo a uno posible.

Ejemplo:

El sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} -0.10x + 1.00y = -2.0 \\ 0.11x - 1.00y = 2.1 \end{cases}$, tiene como solución exacta $\begin{cases} x = 10.0 \\ y = -1.0 \end{cases}$.

Supongamos que el término independiente del sistema de ecuaciones anterior se ha conseguido redondeando a un decimal el sistema de ecuaciones original, con dos decimales, de forma que

$b = (-2.00, 2.14)^t$. Resolviendo el sistema $\begin{cases} -0.10x + 1.00y = -2.00 \\ 0.11x - 1.00y = 2.14 \end{cases}$, se obtiene como solución

exacta $\begin{cases} x = 14.0 \\ y = -0.6 \end{cases}$

Analicemos los resultados:

Analizando los resultados se obtiene que la variación relativa en el término independiente del sistema

$$\text{es: } \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0.04 \end{pmatrix} \right\|_{\infty}}{\left\| \begin{pmatrix} -2.00 \\ 2.14 \end{pmatrix} \right\|_{\infty}} = \frac{0.04}{2.14} = 0.019 \approx 1.9\% .$$

La variación relativa en la solución del sistema es:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 14.0 \\ -0.6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ -1.0 \end{pmatrix} \right\|_{\infty}}{\left\| \begin{pmatrix} 14.0 \\ -0.6 \end{pmatrix} \right\|_{\infty}} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 4.0 \\ 0.4 \end{pmatrix} \right\|_{\infty}}{\left\| \begin{pmatrix} 14.0 \\ -0.6 \end{pmatrix} \right\|_{\infty}} = \frac{4.0}{14.0} = 0.286 \approx 28.69\% .$$

Esta diferencia entre el error relativo de los datos de partida y el error relativo de la solución obtenida se debe a que se está resolviendo un sistema de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes mal condicionada. La matriz de coeficientes del sistema tiene un número de condición $K(A) = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty} = 222$, que es un valor muy alejado a 1. Esto indica que pueden existir términos independientes, b para los que la solución del sistema tendrá un error relativo 222 veces más grande que el error relativo del término independiente.

Procesos iterativos para sistemas de ecuaciones lineales.

Los procesos iterativos se utilizan en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales cuando el número de ecuaciones es elevado, de modo que puede ser preferible obtener una buena aproximación a la solución del sistema $A \cdot x = b$, realizando “pocas” operaciones que obtener la solución exacta del problema mediante un método directo realizando un gran número de operaciones. Otra de las situaciones en que es más interesante utilizar métodos iterativos es el caso en que la matriz de coeficientes A sea dispersa, (tiene muchos elementos nulos). En este caso, los métodos iterativos solo operan con aquellos elementos que son no nulos, mientras que los métodos directos modifican los elementos nulos cuando se realizan las operaciones de escalonamiento de la matriz de coeficientes o la factorización de la misma.

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales $A \cdot x = b$ mediante un método iterativo, este sistema se transforma, como veremos posteriormente, hasta conseguir un sistema equivalente de la forma: $x = T \cdot x + c$.

Partiendo de este sistema equivalente al sistema de partida, se realiza un proceso iterativo de la forma: $x^{(k+1)} = T \cdot x^{(k)} + c$. Si el proceso es convergente, $\{x^{(k)}\} \rightarrow x$, entonces la continuidad de la aplicación lineal definida por T implica que $x = T \cdot x + c$, por lo que el vector x es solución del sistema $A \cdot x = b$.

Proposición: Si para alguna norma matricial se cumple que $\|T\| < 1$, y la ecuación $x = T \cdot x + c$ tiene solución única, entonces el proceso iterativo $x^{(k+1)} = T \cdot x^{(k)} + c$ converge a x , independientemente del vector aproximación inicial $x^{(0)}$ elegido.

El vector $e_k = x^{(k)} - x$ es vector que permite medir lo lejos que se encuentra $x^{(k)}$ de la solución del sistema x . Como $e_{k+1} = (x^{(k+1)} - x) = (T \cdot x^{(k)} + c) - (T \cdot x + c) = T \cdot (x^{(k)} - x) = T \cdot e_k$

Se tiene por tanto que: $e_k = T \cdot e_{k-1} = T^2 \cdot e_{k-2} = \dots = T^k \cdot e_0$.

Por tanto : $\|x^{(k)} - x\| = \|e_k\| = \|T^k \cdot e_0\| \leq \|T^k\| \|e_0\| \leq \|T\|^k \cdot \|e_0\|$.

La hipótesis de partida de $\|T\| < 1$ implica que $\|e_k\| \rightarrow 0$ por tanto $\{x^{(k)}\} \rightarrow x$.

Método de Jacobi.

En este método, para conseguir transformar el sistema $A \cdot x = b$ en $x = T \cdot x + c$ se despeja de la i -ésima ecuación la incógnita x_i . (esto implica que el elemento $a_{i,i}$ de sistema tiene que ser no nulo)

El sistema se transforma, hasta quedar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{1,1}} [b_1 - a_{1,2}x_2 - a_{1,3}x_3 - \dots - a_{1,n}x_n] \\ x_2 = \frac{1}{a_{2,2}} [b_2 - a_{2,1}x_1 - a_{2,3}x_3 - \dots - a_{2,n}x_n] \\ x_3 = \frac{1}{a_{3,3}} [b_3 - a_{3,1}x_1 - a_{3,2}x_2 - \dots - a_{3,n}x_n] \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{n,n}} [b_n - a_{n,1}x_1 - a_{n,2}x_2 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}] \end{cases} \Rightarrow x_i = \frac{1}{a_{i,i}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j}x_j \right]$$

De forma que se pueden ir obteniendo los valores de las distintas incógnitas en iteraciones sucesivas mediante la expresión general:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j}x_j^{(k)} \right]$$

Criterio de parada:

Un proceso iterativo, teóricamente, necesita de un número infinito de etapas para conseguir la solución final del problema. Sin embargo, cuando el proceso es convergente, la sucesión de soluciones aproximadas: $x^{(k)}$ tiende a la solución del sistema de forma que $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$.

Cuando esto sucede, a partir de cierto valor de k los términos $x^{(k)}$ y $x^{(k+1)}$ están muy próximos entre si, y son muy próximos a la solución del sistema x .

Para finalizar el proceso de cálculo, lo que se hace es fijar un valor ε que representa una cota del error aproximado o lo que es igual, la máxima distancia permitida entre dos iteraciones sucesivas, para considerar que se ha llegado a obtener la solución del sistema.

$$e_{k+1} = \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$$

Ejemplo:

Considérese el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} 3x - y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = -6 \\ x - y - 3z = 6 \end{cases}$$
, que tiene por solución
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Las ecuaciones del sistema se pueden escribir como
$$\begin{cases} x = (4 + y - z) / 3 \\ y = (-6 - 2x + 2z) / 5 \\ z = -(6 - x + y) / 3 \end{cases}$$

Por tanto el proceso iterativo a seguir será el siguiente:
$$\begin{cases} x_{k+1} = (4 + y_k - z_k) / 3 \\ y_{k+1} = (-6 - 2x_k + 2z_k) / 5 \\ z_{k+1} = -(6 - x_k + y_k) / 3 \end{cases}$$

Se comienza con un vector aproximación inicial $\alpha_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sustituyendo los valores en la

expresión anterior se obtiene un nuevo vector $\alpha_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -6/5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

El nuevo punto α_1 está más cerca de la solución que el punto α_0 y el error en esta primera etapa,

utilizando se obtiene como $e_1 = \|\alpha_1 - \alpha_0\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 4/3 \\ -6/5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 2$.

Las iteraciones sucesivas que se han ido realizando para el método, quedan representadas en la siguiente tabla:

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$z^{(k)}$	e_k
0	0	0	0	
1	1.33333	-1.2	-2	2
2	1.6	-2.53333	-1.15556	1.33333
3	0.874074	-2.30222	-0.622222	0.725926
4	0.773333	-1.79852	-0.941235	0.503704
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
27	0.999999	-2	-0.999997	6.13379×10^{-6}

Convergencia del método iterativo de Jacobi.

Expresión matricial del método de Jacobi:

El sistema de ecuaciones lineales $A \cdot x = b$ se transforma en un sistema equivalente $x = T \cdot x + c$, para ello se despeja de i -ésima ecuación la incógnita x_i . Para representar esto matricialmente se descompone la matriz de coeficientes de la siguiente manera $A = (L + D + U)$, donde las matrices L, D y U son:

$$\text{Matriz } L: \begin{cases} l_{i,j} = a_{i,j} & \forall j < i \\ l_{i,j} = 0 & \forall j \geq i \end{cases} i = 1, \dots, n$$

$$\text{Matriz } D: \begin{cases} d_{i,i} = a_{i,i} & \forall i \\ d_{i,j} = 0 & \forall j \neq i \end{cases} i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, n$$

$$\text{Matriz } U: \begin{cases} u_{i,j} = a_{i,j} & \forall j > i \\ u_{i,j} = 0 & \forall j \leq i \end{cases} i = 1, \dots, n$$

De forma que se puede reescribir la expresión matricial como: $D \cdot x = b - (L + U) \cdot x$. Para despejar el vector x del primer miembro basta con premultiplicar ambos miembros por la inversa de D y resulta: $x = D^{-1} \cdot b - D^{-1} \cdot (L + U) \cdot x$, de esta forma $T = D^{-1} \cdot (L + U)$ y $c = D^{-1} \cdot b$.

Ejemplo con Mathematica:

```

Método de Jacobi

Mcoef =  $\begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ;

ind =  $\{5, 1, \frac{-5}{6}\}$ ;

Valores iniciales

xold = {0, 0, 0}; xnew = Table[0, {Length[Mcoef]}]; tol = 10-3; Itermax = 40; k = 1; sol = {{xold, 0}}; Clear[error]

Método de Jacobi

While[k <= Itermax,
  Do[xnew[[i]] =  $\left( \text{ind}[[i]] - \sum_{j=1}^{i-1} \text{Mcoef}[[i, j]] * \text{xold}[[j]] - \sum_{j=i+1}^{\text{Length}[\text{Mcoef}]} \text{Mcoef}[[i, j]] * \text{xold}[[j]] \right) / \text{Mcoef}[[i, i]]$ ,
    {i, 1, Length[Mcoef]}];
  error = Max[Abs[xnew - xold]]; sol = Append[sol, {xnew, error}];
  If[error < tol, Print[" "]; Print["Después de ", k, " iteraciones la solución es:"]; Print[xnew // N]; Break[],
    k = k + 1; xold = xnew];

Después de 13 iteraciones la solución es:
{0.66642, 0.499446, -0.334442}

sol = Table[Flatten[sol[[i]], {i, 1, Length[sol]}];

Style[TableForm[N[Transpose[sol], 4], TableHeadings -> {"x", "y", "z", "error"}, Range[0, Length[sol] - 1]],
  FontSize -> 12]

```

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x	0	0.5556	0.6111	0.6265	0.6466	0.6522	0.6594	0.6614	0.6641	0.6648	0.6657	0.6660	0.6663	0.6664
y	0	0.2500	0.3194	0.4097	0.4348	0.4674	0.4765	0.4882	0.4915	0.4957	0.4969	0.4985	0.4989	0.4994
z	0	-0.8333	-0.5833	-0.5139	-0.4236	-0.3985	-0.3659	-0.3569	-0.3451	-0.3418	-0.3376	-0.3364	-0.3349	-0.3344
error	0	0.8333	0.2500	0.09028	0.09028	0.03260	0.03260	0.01177	0.01177	0.004251	0.004251	0.001535	0.001535	0.0005544

Método de Gauss-Seidel

Algunas veces se puede mejorar la convergencia del método de Jacobi. Al realizar el proceso de cálculo del método de Jacobi, en cada iteración, se van calculando los valores de las incógnitas de forma

secuencial, es decir, primero se calcula x_1^{k+1} , partiendo de todos los valores de las incógnitas en la etapa k , a continuación se calcula x_2^{k+1} , y así sucesivamente.

En el método de Gauss-Seidel se pretende realizar la siguiente mejora, utilizar la mejor aproximación a la solución posible para el cálculo de cada una de las incógnitas en cada etapa. Es decir, para calcular x_1^{k+1} solo se dispone de los valores de todas las incógnitas en la etapa k , y son los que se utilizarán, sin embargo, para calcular x_2^{k+1} ya es conocido el valor x_1^{k+1} , de modo que si el proceso es convergente, x_1^{k+1} será una mejor aproximación a la solución final que el valor x_1^k que se utilizaba en el método de Jacobi. El resto de valores que se emplean son los valores de la etapa k . Así sucesivamente, de manera que para calcular x_3^{k+1} se emplearán tanto x_1^{k+1} como x_2^{k+1} y para el resto de incógnitas el valor de la etapa k . El esquema que se emplea es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{1,1}} [b_1 - a_{1,2}x_2^k - a_{1,3}x_3^k - \dots - a_{1,n}x_n^k] \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{2,2}} [b_2 - a_{2,1}x_1^{k+1} - a_{2,3}x_3^k - \dots - a_{2,n}x_n^k] \\ x_3^{k+1} = \frac{1}{a_{3,3}} [b_3 - a_{3,1}x_1^{k+1} - a_{3,2}x_2^{k+1} - \dots - a_{3,n}x_n^k] \\ \vdots \\ x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{n,n}} [b_n - a_{n,1}x_1^{k+1} - a_{n,2}x_2^{k+1} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1}] \end{array} \right.$$

El esquema compacto del método es:
$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{i,i}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} \cdot x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} \cdot x_j^k \right]$$

El criterio de parada del método es idéntico al del método de Jacobi, y en general al de todos los métodos iterativos.

Ejemplo:

Considérese el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} 3x - y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = -6 \\ x - y - 3z = 6 \end{cases} \text{ Que tiene por solución } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Las ecuaciones del sistema se pueden escribir como
$$\begin{cases} x = (4 + y - z) / 3 \\ y = (-6 - 2x + 2z) / 5 \\ z = -(6 - x + y) / 3 \end{cases}$$

Por tanto el proceso iterativo a seguir será el siguiente:

$$\begin{cases} x_{k+1} = (4 + y_k - z_k) / 3 \\ y_{k+1} = (-6 - 2x_{k+1} + 2z_k) / 5 \\ z_{k+1} = -(6 - x_{k+1} + y_{k+1}) / 3 \end{cases}$$

Comenzamos con un vector aproximación inicial $\alpha_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, sustituyendo los valores en la

expresión anterior se obtiene un nuevo vector $\alpha_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4+0-0)/3 \\ (-6-2 \cdot \frac{4}{3} + 2 \cdot 0)/5 \\ -(6-\frac{4}{3}-\frac{26}{15})/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{26}{15} \\ -\frac{44}{45} \end{pmatrix}$.

El nuevo punto α_1 está más cerca de la solución que el punto α_0 y el error en esta primera etapa se

obtiene como $e_1 = \|\alpha_1 - \alpha_0\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 4/3 \\ -26/15 \\ -44/45 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \frac{26}{15}$.

Las iteraciones sucesivas que se han ido realizando para el método, quedan representadas en la siguiente tabla:

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$z^{(k)}$	e_k
0	0	0	0	
1	1.33333	-1.733	-0.9778	1.733
2	1.081	-1.978	-1.014	0.2904
3	0.9804	-1.978	-1.014	0.1011
4	1.012	-2.010	-0.9926	0.03214
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
17	1.000	-2.000	-1.000	5.359×10^{-7}

Convergencia del método iterativo de Gauss-Seidel.

Expresión matricial del método de Gauss-Seidel:

El sistema de ecuaciones lineales $A \cdot x = b$ se transforma en un sistema equivalente $x = T \cdot x + c$. A diferencia del método de Jacobi, en este método el sistema de ecuaciones lineales queda representado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1^{k+1} = b_1 - a_{1,2}x_2^k - a_{1,3}x_3^k - \dots - a_{1,n}x_n^k \\ a_{2,1}x_1^{k+1} + a_{2,2}x_2^{k+1} = b_2 - a_{2,3}x_3^k - \dots - a_{2,n}x_n^k \\ a_{3,1}x_1^{k+1} + a_{3,2}x_2^{k+1} + a_{3,3}x_3^{k+1} = b_3 - \dots - a_{3,n}x_n^k \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1^{k+1} + a_{n,2}x_2^{k+1} + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} + a_{n,n}x_n^{k+1} = b_n \end{cases}$$

Expresado matricialmente resulta:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ \vdots \\ x_n^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Si se organiza la matriz de coeficientes del sistema A como $L+D+U$, la expresión matricial resultante es: $(L+D) \cdot x^{k+1} = b - U \cdot x^k$. Despejando x^{k+1} , resulta: $x^{k+1} = (L+D)^{-1} \cdot b - (L+D)^{-1} \cdot U \cdot x^k$.

Por tanto, $T = -(L+D)^{-1} \cdot U$ y $c = (L+D)^{-1} \cdot b$.

Ejemplo con Mathematica:

```

Método de Gauss-Seidel

In[8]:= Mcoef =  $\begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ;

In[9]:= ind =  $\{5, 1, \frac{-5}{6}\}$ ;

Valores iniciales

In[14]:= xold = {0, 0, 0}; xnew = Table[0, {Length[Mcoef]}]; tol = 10-6; Itermax = 40; k = 1; sol = {xold, 0}; Clear[error]

Método de Jacobi

In[15]:= While[k ≤ Itermax,

  Do[xnew[[i]] =  $\left( \text{ind}[[i]] - \sum_{j=1}^{i-1} \text{Mcoef}[[i, j]] * \text{xnew}[[j]] - \sum_{j=i+1}^{\text{Length}[\text{Mcoef}]} \text{Mcoef}[[i, j]] * \text{xold}[[j]] \right) / \text{Mcoef}[[i, i]]$ ,

    {i, 1, Length[Mcoef]}];

  error = Max[Abs[xnew - xold]]; sol = Append[sol, {xnew, error}];

  If[error < tol, Print[" "]; Print["Después de ", k, " iteraciones la solución es:"]; Print[xnew // N]; Break[],

    k = k + 1; xold = xnew];

Después de 12 iteraciones la solución es:

{0.666667, 0.5, -0.333333}

In[16]:= sol = Table[Flatten[sol[[i]], {i, 1, Length[sol]}];

In[17]:= Style[TableForm[N[Transpose[sol], 4], TableHeadings -> {"x", "y", "z", "error"}, Range[0, Length[sol] - 1]],

  FontSize -> 12]
  
```

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	0	0.5556	0.6728	0.6689	0.6675	0.6670	0.6668	0.6667	0.6667	0.6667	0.6667	0.6667	0.6667
y	0	0.5278	0.5100	0.5036	0.5013	0.5005	0.5002	0.5001	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
z	0	-0.3056	-0.3233	-0.3297	-0.3320	-0.3329	-0.3332	-0.3333	-0.3333	-0.3333	-0.3333	-0.3333	-0.3333
error	0	0.5556	0.1173	0.006409	0.002314	0.0008357	0.0003018	0.0001090	0.00003935	0.00001421	5.132 × 10 ⁻⁶	1.853 × 10 ⁻⁶	6.692 × 10 ⁻⁷

Convergencia de los métodos iterativos.

En este apartado se estudian diversas características de los métodos iterativos que permiten determinar si el proceso de cálculo será o no será convergente.

En primer lugar se estudian las condiciones que debe cumplir la matriz T del proceso de cálculo $x^k = T \cdot x^{k-1} + c$ para que los métodos iterativos sean convergentes.

- Para cualquier vector aproximación inicial x^0 , la sucesión $\{x^{(k)}\}$ obtenida a partir de la expresión $x^k = T \cdot x^{k-1} + c$, converge a la solución de sistema de ecuaciones lineales $A \cdot x = b$ si y solo si $\|T\| < 1$.

Demostración:

Basta recordar que $\|x^{(k)} - x\| \leq \|T\|^k \cdot \|x^{(0)} - x\|$

- Para cualquier vector aproximación inicial x^0 , la sucesión $\{x^{(k)}\}$ obtenida a partir de la expresión $x^k = T \cdot x^{k-1} + c$, converge a la solución de sistema de ecuaciones lineales $A \cdot x = b$ si y solo si $\rho(T) < 1$.

La demostración de este teorema se basa en la diagonalización o triangularización de matrices.

Por otro lado $\rho(T)$ es una cota inferior de todas las normas matriciales de $\|T\|$, por lo que siempre se puede construir una norma tal que $\|T\| = \rho(T) + \varepsilon$ para cualquier valor de ε , por pequeño que este sea.

Por tanto si $\rho(T) < 1$, tomando un ε suficientemente pequeño, se tiene una norma tal que $\|T\| = \rho(T) + \varepsilon < 1$ lo que asegura la convergencia del método.

A continuación se analizarán ciertas condiciones que debe cumplir la matriz de coeficientes A del sistema de ecuaciones $A \cdot x = b$, para que los métodos iterativos converjan.

- Que la matriz de coeficientes A sea estrictamente diagonal dominante es una condición suficiente de convergencia de los métodos iterativos de resolución de ecuaciones lineales para cualquier vector aproximación x^0 que se utilice.

Demostración:

Una matriz es estrictamente diagonal dominante si $|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| \quad i = 1, 2, \dots, n$. Por tanto al calcular

la matriz T de Jacobi o de Gauss-Seidel, resulta que $\|T\|_{\infty} < 1$.

Como es evidente, el hecho de que la matriz A no sea estrictamente diagonal dominante no implica que el proceso sea divergente, puesto que pueden existir otras normas matriciales para las cuales $\|T\| < 1$.

- Por último, si la matriz de coeficientes A es simétrica definida positiva, se puede demostrar que el método de Gauss-Seidel converge a la solución del sistema para cualquier vector aproximación x^0 que se utilice.

Ejercicios

1.- Resolver los siguientes sistemas utilizando el método de Jacobi

a)

$$\begin{array}{rcll} -x & +11y & -z & +3t = 25 \\ 2x & -y & +10z & -t = -11 \\ 10x & -y & +2z & = 6 \\ & 3y & -z & +8t = 15 \end{array} \quad \varepsilon = 10^{-3} \quad y \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{array}{rcl} 4y & +2z & = 2 \\ 4x & +2y & +10z = 6, \\ 5x & +4y & = 5 \end{array} \quad \varepsilon = 10^{-1} \quad y \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{array}{rcl} 4x & +2y & +z = 11 \\ -x & +2y & = 3, \\ 2x & +y & +4z = 16 \end{array} \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.- Realizar 5 iteraciones del método de Jacobi

$$\begin{array}{rcl} 2x & +5y & +5z = 12 \\ 5x & +2y & +5z = 12 \\ 5x & +5y & +2z = 12 \end{array}$$

¿Es convergente? Justificar la respuesta.

3.- Resolver, mediante el método de Gauss-Seidel y considerando como vector inicial el vector nulo, los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{rcl} a) & \begin{array}{rcl} 4x & -y & = 2 \\ -x & +4y & -z = 6 \\ & -y & +4z = 2 \end{array} & b) & \begin{array}{rcl} 2x & -y & +10z & -t = -11 \\ & 3y & -z & +8t = 15 \\ 10x & -y & +2z & = 6 \\ -x & +11y & -z & 3t = 25 \end{array} \end{array}$$

3.- a) Resolver el siguiente sistema por el método de Gauss

$$\begin{array}{rcl} -2x & +y & = 1 \\ x & -2y & +z = 0 \\ & y & -2z +t = 0 \\ & & z & -2t = 0 \end{array}$$

b) Realizar 4 etapas del método de Gauss-Seidel partiendo de valores iniciales

$$x^{(0)} = (0.7, 0.5, 0.3, 0.1)^t.$$

4.- Realizar 4 iteraciones del método de Gauss-Seidel, redondeando los cálculos a a cuatro cifras decimales, para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 0.1x + 7y - 0.3z &= -19.3 \\ 3x - 0.1y - 0.2z &= 7.85 \\ 0.3x - 0.2y + 10z &= 71.4 \end{aligned} \quad \text{con } x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.- Realizar cuatro iteraciones del método de Gauss-Seidel para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 1.78x + 3.01y - 4.88z &= -7.70 \\ 4.63x - 1.06y - 2.27z &= -6.36 \\ -3.39x + 9.81y - 4.78z &= 3.95 \end{aligned} \quad \text{con } x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.71 \\ 0.2 \\ 3.2 \end{pmatrix}$$

6.- Resolver el siguiente sistema mediante el método de Jacobi, con una precisión de 10^{-3} ,

$$\begin{aligned} 10x + y + z &= 12 \\ x + 10y + z &= 12 \\ x + y + 10z &= 12 \end{aligned}$$

7.- Dado el sistema:

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ 4y &= 2 \\ x + 4z &= 4 \end{aligned}$$

Estudiar la convergencia del método de Gauss-Seidel. Utilizando este método calcular el resultado obtenido después de la segunda etapa de iteración partiendo del vector $x^{(0)} = (1, 0, 0)^t$.