# Aldagai erreal bat eta anitzeko funtzio errealen analisi matematikoa
# Irakasgaiaren Gida

Matematika Aplikatua Saila
Donostiako Unibertsitate Eskola Politeknikoa
Euskal Herriko Unibertsitatea

J.I. Barragués
A. Zatarain
I. Arrieta
C. Alcalde
J. Manterola
P. Nieto

# Gaien Aurkibidea

# 1 Zer adierazi nahi du ikasteak?

Ikastea ez da bakarrik buruan informazioa pilatzea. Ikastea ez da bakarrik informazioa non dagoen jakitea. Ikastea ez da bakarrik irakasleak klasean azaldutakoa, edo libururen baten azaltzen diren bezalako ariketak, ebazteko gai izatea. Ikastea laneko eremu batean problemak ebazteko gai izatea da.

Baina, zer da problema bat? Problema bat konpondu behar den egoera bat da, guretzat *berria* dena, hau da, hasiera batean ez dugu ebazpidea ezagutzen.

Nabari ezazu problema eta ariketaren arteko diferentzia. Ariketa bat ere konpondu behar den egoera bat da, baina guretzat berria ez dena, hau da, ebazpidea ezagutzen dugu.

Modu honetan, jakintza edukitzea problemei era *gai* batean aurre emateko ahalmena edukitzea da. Horrela iristen gara gakora: *gaitasuna.*

# 2 Zer da gaitasun bat?

Gaitasun bat funtzio, lan edo eginkizun bat era egokian garatzea posible egiten duten ezaupide, teknika, jokabide eta balioen konbinaketa bat da. Hona hemen gaitasun horietako adibide batzuk:

- Problema bateko zati desberdinak antzematea.
- Koadro eta taulak osatzeko datuak bilatzea, antolatzea eta adieraztea.
- Laborategiko lanarako teknikak erabiltzea.
- Behaketak, datuak eta neurriak interpretatzea.
- Egoerak deskribatzea.
- Komunikatzea, informatzea, argumentatzea,...

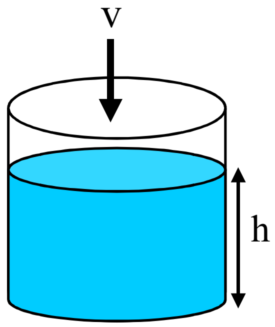
Goi mailako ikasketen irakasgai bakoitzak gaitasun hauek lor ditzazun laguntzen du. Irakasgai bakoitzak egindako ekarpena *irakasgaiaren gaitasunak* deitzen da.

Ikus dezakezunez, irakasteko ohiko moduarekiko desberdintasun handia dago: orain, irakasgaia ikastearen oinarrizko helburua ez da gai-zerrenda bat. Noski badagoela irakasgai bakoitzarako gai-zerrenda bat, baina hau bide bat da benetako garrantzia duena lortzeko: gaitasunak.

# 3 Zer da Analisi Matematikoa?

Injineruari, zientzialariari, teknikariari sortzen zaizkion problemak ebazteko beharrezkoa izan daiteke teoria matematiko desberdinak erabiltzea. Horietako teoria batzuk hauek dira: Analisi Matematikoa, Aljebra , Estatistika eta beste batzuk.

Analisi Matematikoak aldagai batzuen beste aldagaiekiko dependentzia aztertzeko baliabideak ematen dizkigu. Adibidez (ikus ondorengo irudia), suposa dezagun depositu zilindriko bat betetzeko abiadura $V$ litro segundoko dela. Zein da $h$ likidoren altuera aldatzeko abiadura?




## 4 Analisi Matematikoa irakasgaiaren lau gaitasunak

Analisi Matematikoa irakasgaiak lagunduko dizu ere injineruarentzat hain baliagarriak diren gaitasun horiek barneratzen. Honako hauek dira irakasgaiaren lau gaitasunak:

**1. Gaitasuna:** Zientzia eta Ingeniaritzako problemak ebazterakoan erabilgarriak diren Analisi matematikoaren teoria eta kontzeptuak antzematea.

**2. Gaitasuna:** Analisi matematikoan hornitutako Zientzia eta Ingeniaritzako problemak ebazteko kontzeptu eta prozedura garrantzitsuenak erabiltzea.

**3. Gaitasuna:** Problema ebazteko jarraitu den prozesu osoa matematikoki azaldu, Analisi Matematikoaren teoriak, kontzeptuak eta prozeduren bidez.

**4. Gaitasuna:** Zientzia eta Ingeniaritzako problemak ebazteko erabiliko diren eredu matematikoak eraikitzeko ordenagailu programak erabiltzea.

Orain ez duzu ondo ulertzen gaitasun hauen esanahia, noski, zehaztugabekoak iruditzen zaizkizu eta askoz hobeto ulertu zenuke irakasgairen gai-zerrenda. Utz dezagun gai-zerrenda gerorako. Orain gaitasunen esanahia azaltzen saiatuko dugu.

# 5 Zer adierazten dute gaitasunek?

## 1. Gaitasuna:

Zientzia eta Ingeniaritzako problemak ebazterakoan erabilgarriak diren Analisi matematikoaren teoria eta kontzeptuak antzematea.

Injineruak, zientzialariak, teknikariak ariketa matematikoak ebazteko gai izan behar du, funtzio deribatua puntu batean kalkulatu edo ekuazio diferentzial bat ebatzi, adibidez. Baina batzuetan Analisi Matematikoaren bidez ebazgarria den problema bat *mozorrotuta* ager daiteke, ez dakigu zeintzuk diren aplikatu behar ditugun kontzeptu matematikoak. Injineruak horrelako problemen *mozorroa* kentzeko, antzemateko eta soluzioa aurkitzeko gai izan behar du.

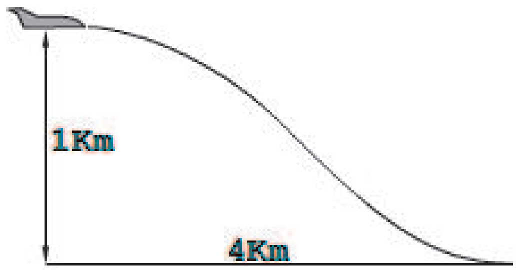
Ikus ditzagun adibide batzuk non ez den ikusten, modu erraz baten, deribatu, integratu edo ekuazio bat ebatzi behar den.

**1. Adibidea.** Kalkulagailuan edozein zenbaki positibo bat tekleatu. Kalkulatu bere erro karratua. Emaitzaren erroa karratua kalkulatu. Prozesu hau behin eta berriro errepikatu. Ikusiko duzu kasu guztietan azkenean pantailan 1 zenbakia agertzen dela. Zergatik?

**2. Adibidea.** Edozein zenbaki positibo $B$ aukeratu. Orain aukeratu beste zenbaki bat $x$. Kalkulatu $0.5(x+B/x)$ eta emaitzari $x$ deitu. Balio berri honi berriro $0.5(x+B/x)$ eragiketa aplikatu. Prozesu hau aldi batzuetan errepikatuz ateratzen den $x$ balioa $\sqrt{B}$ baliorantz geroz eta gehiago hurbiltzen dela ikusiko duzu. Beraz, metodo hau erabil daiteke erro karratuen balio hurbilduak kalkulatzeko. Baina, zergatik funtzionatzen du?

**3. Adibidea.** Suposa dezagun irudian agertzen den ontzian ura erritmo konstantean botatzen dugula, urako altuera instante bakoitzean $h$ izanik. $h$-ren grafiko posible bat marrazteko gai al zara?

**4. Adibidea.** Hegazkin bat lurreratzeko 1 Km-ko altueratik jaisten hasten da pistatik 4Km mendebaldera (Ikus irudia). Hegazkinaren ibilbide bat diseinatu bere oraingo posiziotik lurreratu arte.




## 2. Gaitasuna:

Analisi matematikoan hornitutako Zientzia eta Ingeniaritzako problemak ebazteko kontzeptu eta prozedura garrantzitsuenak erabiltzea.

Problema ebazteko erabil dezakegun *aparatu* matematikoa aurkitu ondoren, erabiltzeko gai izan behar dugu. Adibidez, ez zaigu ezertarako balio funtzio baten deribatua erabili behar dela jakiteak, ez badakigu deribatu hori kalkulatzen.

Beraz, problema bat ebazteko beharrezkoak diren prozedurak aplikatzeko gai izan behar dugu. Prozedura hauek batzuetan mekanikoak dira, adibidez, $y'(0.5)$-ren balioa kalkulatu $y(x) = x\cos(x)$ izanik.

Baina injineruarentzat prozedura preziatuenak ez dira errezeta bat aplikatzea besterik ez direnak. Prozedura baliotsuenak zera eskatzen dute: arrazoitzea, soluzio desberdinak saiatzea, eskematizatzea, suposaketak egitea, adibideak aurkitzea, informazioa bilatzea, datuak antolatzea, e.a.

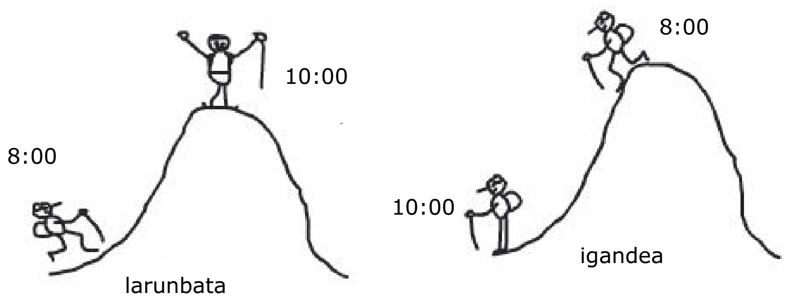
Berehala ikusiko dugu nola erabiltzen diren hauetako garrantzizko prozedura batzuk. Eta, bere esanahia hobeto ulertzeko, honako problema hau erabiliko dugu:

***Mendizalearen problema.*** *Larunbatean, goizeko zortzitan, 1500 metroko altitudeko mendi bat igotzen hasten zara. Bi ordu beranduago gailurrera iristen zara. Igandeko goizeko zortzitan jaitsiera hasten duzu eta behera iristeko 1.5 ordu behar dituzu.*
*Hau da galdera: igoera eta jaitsierako momentu batean egon al zinen bideko puntu berberan ordu berdinean?*

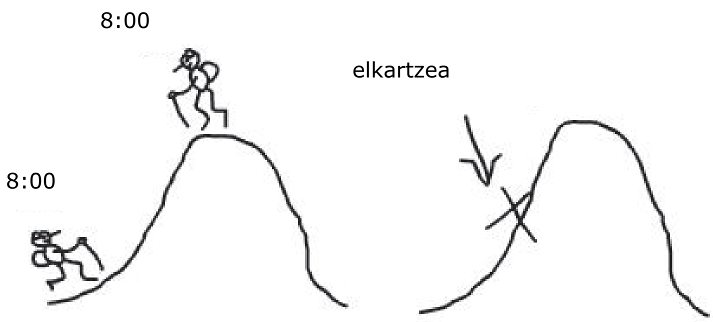
Hemen daukagu berriro *mozorrotuta* dagoen problema bat lehenengo gaitasuna menperatzen dugun aztertzeko. Ebazpena hasteko modu on bat Analisi kualitatiboa da. Kontutan hartu behar duzu azalduko ditugun prozedurak ez dutela ordena batean aplikatzeko beharrik, nahiz eta askotan ordena logiko bat existitu.

**Analisi kualitatiboa:** Problemaren aurrez aldeko analisia da, non edozien gauzak balio duen egoera ulertzeko: antzerakoak diren beste kasuak aztertu, bere garratziaz pentsatu, zertarako interesatzen zaigun pentsatu, orain arte ezagutzen duguna erabiliz ebatz dezakegun aztertu, grafiko argigarriak marraztu, adibide errazak ikertu. Eskuetan daukaguna ulertzeko laguntzen diguten edozein gauza erabiltzen dugu.

Mendizalearen probleman, marrazketa bat egiten has dezakezu:




Ideia! Eta bi mendizaleak *desberdinak* izango balira bezala kontsideratzen baditugu? Biak irteten dira egun berdineko goizeko zortzitan, baina bat behetik eta bestea gailurratik. Problema bera da:

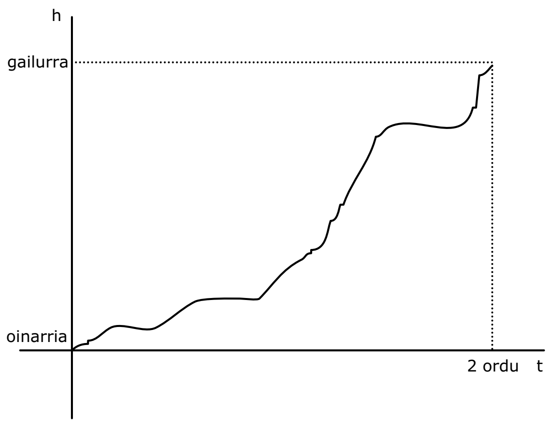



Bi mendizaleak puntu batean elkartuko dira ez? nolaz eta batek desagertzeko eta beste puntu batean agertzeko boterea ez duen. Beraz, elkartze-puntu horren existentziaz konbentzitu gara.

**Abstrakzioa:** Problema batean funtsezkoan ez diren elementuak, edo partikularrak direnak, aurkitu behar ditugu. Egoera era orokorrean definitzen dugu.

Mendizalearen problema ebazteko erabili dugun irtenbide intuitiboa nahikoa izan daiteke kasu batzuetan, baina guk zehazki ebazteko gai izan behar dugu. Gure probleman *denbora* eta *bideko puntua* agertzen direnez, bi aldagai hauek erlazionatu beharko ditugu. Beraz, aldagaiak erlazionatzeko problema bat daukagu eta Analisi Matematikoaren bidez ebazten saia dezakegu.

Probleman interesgarriak izan daitezkeen aldagaiak agertzen dira: denbora, irteteko eta iristeko orduak, momentu batean bideko posizioa, asteko eguna ... Baina, lehen egin dugun analisi kualitatiboak adierazten digunez, bakarrik bi aldagai daude interesatzen zaizkigunak: $t$ aldiunea eta $h$ mendiko puntua. $h$ aldagaia $t$-rekiko aldatzen da eta, orduan, $t$-ren funtzioa da. Marraz dezagun beste grafiko *matematikoago* bat:

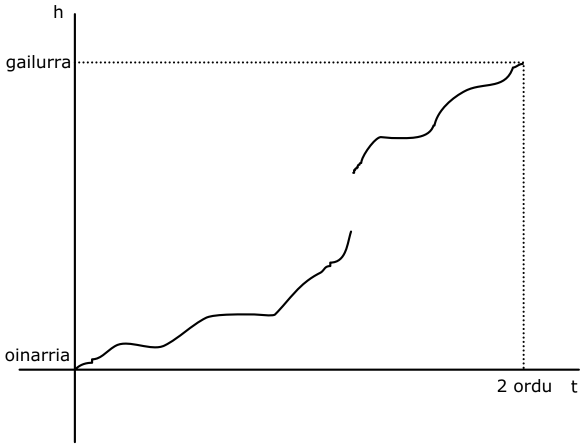


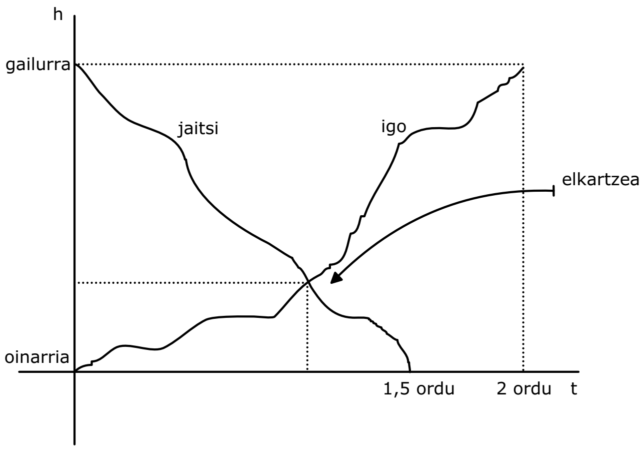

Momentu batean desagertu eta beste puntuan agertzeko boterea ez duzunez grafikoa ezin du horrelakoa izan:

Orain, bi mendizaleen ideia kontutan harturik, problema bera beste ikuspuntu batetik kontsidera dezakegu:

Orduan, problemaren soluzioa aurkitzeko, bi kurbak ebakitzen diren besterik ez dugu aztertu behar.

Egoera definitzen dugu: $i(t)$ eta $j(t)$ funtzioak emanik (igoera eta jaitsiera), $i(t) = j(t)$




betetzen den $t$ une bat existitzen dela frogatu behar dugu.

Frogatu nahi dugun propietatea *tesia* deitzen da. Gure tesia formalki idazten dugu:

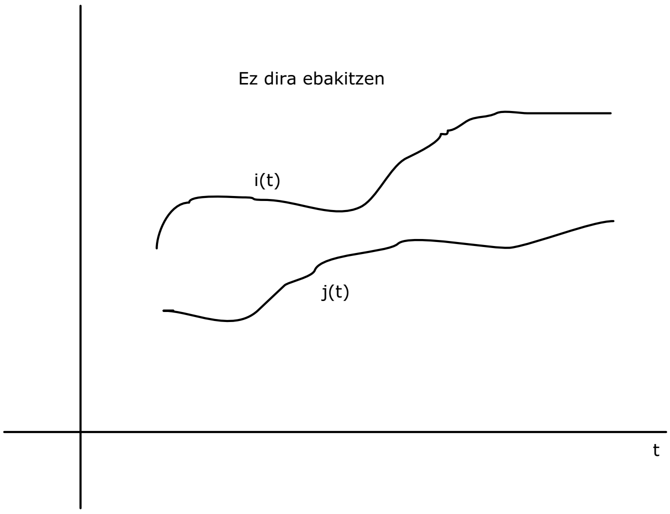
$$\exists t_0 \in [0, 1.5]/i(t_0) = j(t_0)$$

**Hipotesiak ezarri:** Hipotesia guk jartzen dugun suposaketa bat da problemaren ebazpena errezagoa izan dadin. Hipotesiak finkatzen ditugu ere hipotesiak betetzen direnean soilik betetzen diren emaitza matematikoak erabiltzeko. Hauek dira jartzen ditugun hipotesi batzuk: funtzioa gorakorra, jarraitua, deribagarria, mugatua, e.a.

Hipotesiak problema sinplifikatzen du baina eskakizun bat da ere. Geroz eta hipotesi gehiago erabiltzen baditugu, errazagoa izango da ebazpena, baina ezgauzagoa izango da ere, hipotesiak askotan betetzen ez diren eskakizunak direlako.

Teoria matematiko erabilgarria aukeratuz problema modu formalean enuntziatzen dugu.

Desmaterialtzeko boterea ez daukagunez, hipotesi arrazonagarri bat $i(t)$ eta $j(t)$-ren jarraitutasuna da. Baina hipotesi hori ez da nahikoa grafikoen arteko ebakigunea existitzen dela ziurtatzeko:



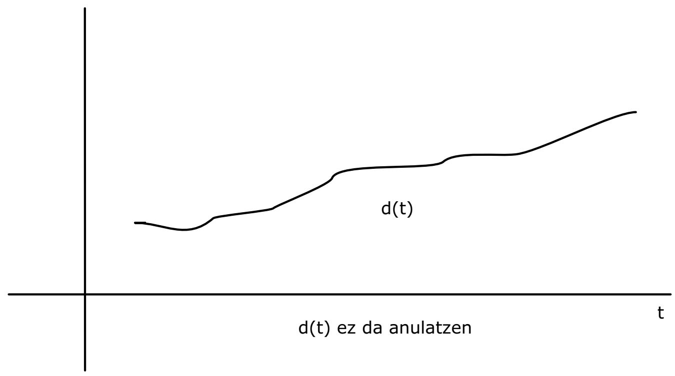

$i(t)$ eta $j(t)$ funtzioen arteko ebakigunea bilatzea eta funtzio diferentzia $d(t) = i(t) - j(t)$ anulatzeko puntua kalkulatzea gauza bera da. Orduan, beste problema bat defini dezakegu:

Hipotesia: $d(t)$ jarraitua
Tesia: $\exists t_0 / d(t_0) = 0$

$d(t)$ funtzioaren jarraitutasuna EZ da nahikoa puntu batean anulatzen dela ziurtatzeko, jakina:

**Soluzioen bilaketa:** Soluzioaren existentzia, bakartasuna edo propietateak aztertzen ditugu, erabiltzen ari garen teoriaren arabera.

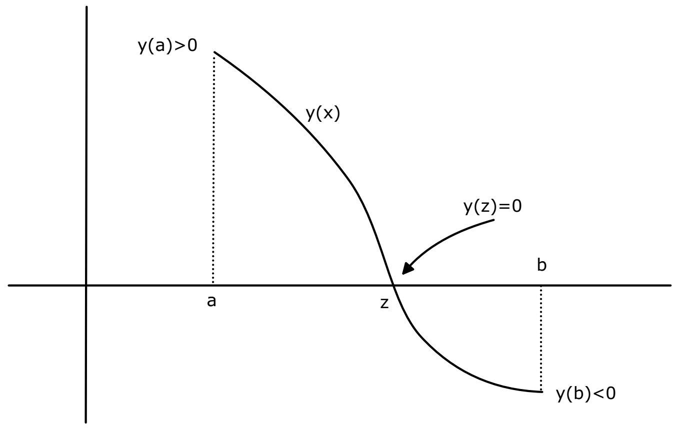
Beraz, hipotesi gehiago beharko ditugu. Funtzioa anulatzen duen puntu baten existentzia ziurtatzen duen emaitza matematiko bat bilatzeko unea iritsi da. Emaitza hori existitzen




da: Bolzano-ren teorema. Gogora dezagun:

**Bolzano-ren teorema:**
Hipotesiak: $y(x)$ funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua da eta tarteko muturretan hartzen dituen balioak zeinu aurkakoak dira, hau da, $y(a) > 0$ eta $y(b) < 0$, edo $y(a) < 0$ eta $y(b) > 0$.
Tesia: Badago gutxienez $z$ puntu bat $(a, b)$ tartean non $y(z) = 0$ betetzen den.

Bolzanoren teoremaren esangura geometrikoa oso argi dago:

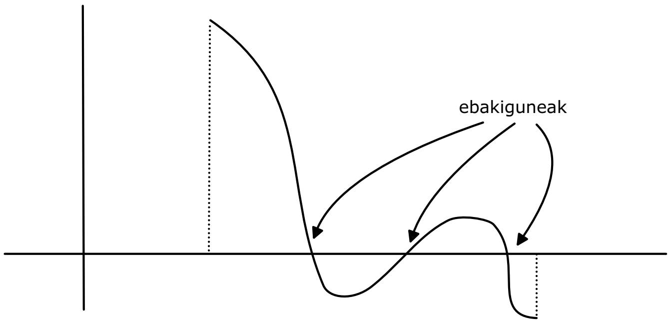



Orain, Bolzanoren teorema mendizalearen probleman aplikatuko dugu. Funtzioa $d(t) = i(t) - j(t)$ da. Tartea $[0, 1.5]$ da. Ikus dezagun gure kasuan hipotesi guztiak betetzen diren:

- ➜ $d(t)$ jarraitua da $[0, 1.5]$ tartean (desmaterialtzeko boterea baztertu dugu).
- ➜ $d(0) = i(0) - j(0) = 0 - gailurra < 0$ (gailurraren altuera 0 ez delako)
- ➜ $d(1.5) = i(1.5) - j(1.5) = i(1.5) - 0 > 0$ ($i(1.5) = 0$ izango balitz, hor izango genuke elkartze-puntua. $i(t)$ eta $j(t)$-ren grafikoen adibideak marraz ditzakezu kasu horren esanahia aztertzeko?)

Hipotesiak betetzen dira eta beraz, Bolzanoren teoremak esaten digunez, badago gutxienez puntu bat $(0, 1.5)$ tartean non bi ibilbideak ebakitzen diren.

Matematikan, existentzia aztertu ondoren, soluzioa bakarra den galde egiten dugu. Gure kasuan berehala ikusten dugu ebakigune bat baino gehiago egon daitezkeela. Bolzanoren teorema existentziarako teorema bat da, ez du bakartasuna ziurtatzen. Adibidez:



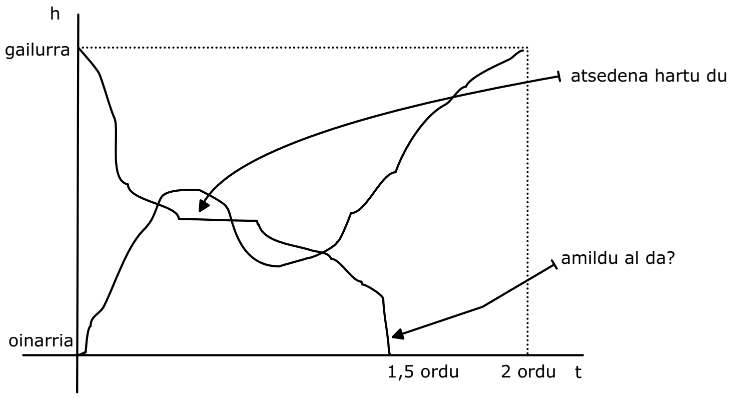

**Soluzioen interpretazioa:** Zer esan nahi dute lortutako soluzioek? Problemaren hasierako planteamendua kontutan hartuz, soluzioren batek zentzua al du? Zeintzuk dira bere mugak? Emaitza onak al dira?

Mendizalearen problemak soluzioa duela frogatu dugu. Jarri dugun baldintza bakarra jarraitutasuna da. Baina hipotesi hori oso arrazoizkoa da horrelako problemetan non objektuen desplazamendu fisiko eta erreala agertzen den. Gainera, gure kasuan soluzio desberdinak egon daitezke. Imajina ezazu mendizalea, igoeran edo jaitsieran, atzera egin, gelditu, berriro bere martxa jarraitu egiten duela... Adibidez:

**Orokorpenen bilaketa:** Jarri dugun hipotesiren bat ken al daiteke soluzio orokorrago bat lortzeko? Hori egitea interesgarria al da?

Problemaren enuntziatuarako aldaera desberdinak aurki ditzakegu. Adibide bezala, ondorengoak aztertu:

**1. aldaera:** Jaitsierako bidean, gosaria berotzeko gailurrean piztu zenuen sua itzaltzea ahaztu duzulaz konturatzen zara. Berriro igotzen zara, geldialditxo bat egin eta on-




doren behera zoaz. Kasu honetan ere espazio eta denborako kointzidentzia egongo al da?

**2. aldaera:** Sua itzaltzeko igotzen zara baina, ustekabean, gailurrean gorago igotzeko bidexka bat aurkitzen duzu. Zati bat gehiago igotzen duzu eta gero jaisten hasten zara. Kasu honetan ere espazio eta denborako kointzidentzia egongo al da?

## 3. Gaitasuna:

Problema ebazteko jarraitu den prozesu osoa matematikoki azaldu, Analisi Matematikoaren teoriak, kontzeptuak eta prozeduren bidez.

## 4. Gaitasuna:

Zientzia eta Ingeniaritzako problemak ebazteko erabiliko diren eredu matematikoak eraikitzeko ordenagailu programak erabiltzea.

Injineruak, zientzialariak, teknikariak problema ebazteko jarraitu den prozesu osoa zehazten eta justifikatzen duen txosten bat idazteko gai izan behar du. Problema ebazteko prozesua eskematizatzea, laburtzea eta azaltzea da helburua, barnean sartuz: egoeraren eztabaida, bere adierazpen formala, eremu analitikoaren eraketa, soluzioen existentziaren azterketa, ebazpen formala eta beharrezkoak diren emaitza teorikoak, proposatutako soluzioaren analisia eta orokorpenen bilaketa. Bata ere, gai izan behar da ordenagailu programaren baten bidez, ebazten ari den probleman sakondu eta eta emaitza lortzeko.

**Ariketa:** Aztertu dugun problemarako azaldu: zein izan den lortu dugun soluzioa, zer emaitza matematikoetan oinarritzen den, zer baldintzak behar diren soluzio bakarra egoteko eta zeintzuk diren lortu ditzakezun orokorpenak.

## 6 Analisi Matematikoaren gai-zerrenda

Kurtsoan zehar ondorengo gai-zerrenda erabiliz aipatutako hiru gaitasunak landuko ditugu:

**0. gaia.** Sarrera.

**1. gaia.** Zenbaki konplexuak.

**2. gaia.** Zenbakizko segidak.

**3. gaia.** Aldagai errealeko funtzio errealak.

**4. gaia.** Aldagai errealeko funtzio errealen azterketa lokala.

**5. gaia.** Aldagai errealeko funtzio errealen integrazioa.

**6. gaia.** Aldagai erreal anitzeko funtzio errealak.

**7. gaia.** Integral anizkoitza.

**8. gaia.** Lerro integrala

**9. gaia.** Ekuazio diferentzialak.

**10. gaia.** Laplace-ren transformatua.

**11. gaia.** Fourier-en serieak.

## 7 Irakasgaia jarraitzeko aldez aurretik ikasitako eta beharrezkoak diren ezagutzak.

Irakasgaia zailtasun handirik gabe jarraitzeko beharrezkoak dira matematikako ezagutza minimo batzuk. Maila hori lor dezazun aurretik ikasitako eta beharrezkoak diren ezagutzak dituzu taula hauetan eta autoebaluaketarako ariketak ere aurkituko dituzu.

**Multzoak, trigonometria eta eragiketa orokorra**

- Multzoen teoria ( elementuak, azpimultzoak, bilkura, ebakidura).
- Zenbakien multzoak (arruntak, osoak, arrazionalak, errealak).
- Newton-en binomioa.
- Oinarrizko irudien azalerak eta bolumenak.
- Trigonometriazko oinarrizko erlazioak.
- Zuzen baten ekuazioa.

**Notazio matematikoa**

- Sinboloak, definizioak, teoremak (hipotesiak, tesiak, inplikazioa, baliokidetza, propietateen ukapena), frogapen matematikoak.

**Oinarrizko kalkulu diferentziala eta integrala**

- Aldagai eta funtzioen kontzeptua. Funtzioen adierazpen grafikoak.
- Oinarrizko funtzioak eta bere adierazpen grafikoak (esponentziala, logaritmikoa, trigonometrikoak, potentziala eta balio absolutua)
- Limiteak eta jarraitasuna. Funtzio jarraituei buruzko oinarrizko teoremak (Bolzano, Darboux, bornaketa)
- Deribagarritasuna, Deribatuen kalkulua. Zuzen ukitzaileak eta normalak. Funtzio jarraitu eta deribagarrien oinarrizko teoremak. (Rolle, batazbesteko balioa).
- Oinarrizko integralen kalkulua. Newton-Leibniz formula. Azaleren kalkulua.
- Zuzen baten ekuazioa.

## 8 Norberen ebaluaketa.

Gogora ezazu gaiaren helburua, azaldutako lau gaitasunak zuk eskuratzea dela. Lortu duzun konpetentzia horien barneraketaren ebaluaketa egin dezazun, azterketen azaltzen direnen antzerakoak diren ariketak, zeharo ebatziak, prestatu ditugu. Garrantzizkoa da, ebazpenera jo baino lehenago, zuk ebazten saiatzea.

# 9 Bibliografia eta beste baliabideak.

## 9.1 Oinarrizko bibliografia.


- Piskunov, N. *Kalkulu diferentziala eta integrala I eta II.* Ed. UEU-UPV/EHU.

- Manterola, M.J;Alcalde C.;Barragués J.I.;Morais A. *Ingenieritzarako oinarri matematikoak.* Ed.Elhuyar.

- Larson, Hostetler y Edwards. *Cálculo I y II.* Ed. Pirámide.

- Zill, D.G. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones* Ed. Grupo editorial Iberoamericano.

- Kreyszig, E. *Matemáticas avanzadas para Ingeniería, tomos I y II.* Ed. Noriega- Limusa.


## 9.2 Irakasgaiaren apunteak.

Gai batzuk lantzeko apunteak emango dizkizugu. Oinarrizko bibliografia kontsultatzea ere beharrezkoa izango duzu. Apunteak ebatzitako adibideak eta proposatutako ariketak dituzte eta garrantzizkoa da zuk ebazten saiatzea.

## 9.3 Ariketa bilduma.

Gai bakoitza lantzeko ariketa zerrenda emango dizugu. Ariketa hauek gaitasunak lantzeko prestatuak daudenez, oso garrantzitsua da ahaleginak egitea lanak burutzeko pretsonalki eta lan taldearekin ere.

## 9.4 Softwarea.

Ordenagailua, ariketak ebazteko zein kontzeptuak hobeto ulertzeko, oso interesgarria den tresna izan daiteke. Kurtsoan zehar Winplot programa deritzona erabiltzen ikasiko duzu. Hau interneten dohainik dagoen programa da. Horrez gain, oso gutxi betetzen du eta aukera handiak ditu Analisi Matematikoa ikasteko. Aplikazio hau erabiliz, problema asko ebatziko dituzu.

Ingelesez, gaztelaniaz eta beste hizkuntza batzutan dagoen Winploten azkeneko bertsioa, interneteko ondorengo helbidean eskura dezakezu:

`www://math.exeter.edu./rparris/winplot.html`