Gaiak 6 - 11: 9. Autoebaluaketa

1 Ariketak

1 Ariketa. Izan bedi $z(x,y)$ ondorengo eran eta $D = \{x \in [0,2], y \in [0,1]\}$ eremuan definitutako funtzioa:

$$z(x,y) = \begin{cases} 2x^2+1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

a) Funtzioa marraztu eta bere jarraitasuna aztertu.

b) Gainetik $z(x,y)$ gainazalak eta azpitik D eremuak mugatutako gorputzaren bolumena kalkulatu.

2 Ariketa. Izan bedi $y = x^2 + Cx$ funtzio familia non C edozein konstante erreala den.

a) Funtzio familia hori marraztu.

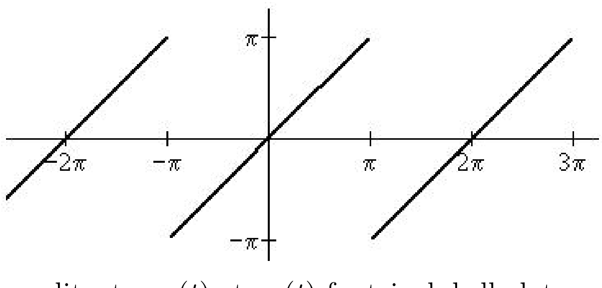
b) Planoko edozein (x_0, y_0) puntua hartuz, ba al dago funtzio familian puntu honetatik pasatzen den kurbarik?. Kurba hori bakarra al da?

c) Aurkitu E.D.A bat bere soluzioa funtzio familia hau izan dadin.

d) Aurreko atalan lortutako E.D.A. ebatzi; hau da, $y = x^2 + Cx$ soluzioa lortu.

3 Ariketa.

Irudian agertzen den $y(x)$ funtzio periodikoa hartu. Bere Fourierren seriea $S(x)$ kalkulatu, $S(x)$-ren konbergentzia aztertu eta bere espektro diskretua lortu.



4 Ariketa. Ondorengo baldintzak betetzen dituzten $x(t)$ eta $y(t)$ funtzioak kalkulatu:

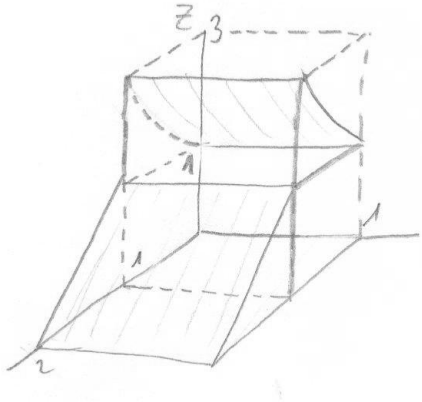
$x' = 2x - 3y$

$y' = y - 2x$

$x(0) = 8$, $y(0) = 3$

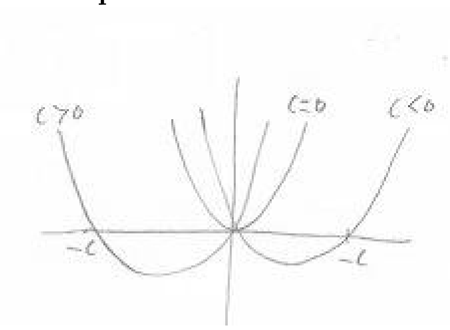
2 Ebazpenak

1 Ebazpena. $z(x,y) = \begin{cases} 2x^2+1 & 0 \le x \le 1 \\ 2-x & 1 < x \le 2 \end{cases}$



$$V = \int_1^2 \int_0^1 (2-x)\,dy\,dx + \int_0^1 \int_0^1 (2x+1)\,dy\,dx =$$
$$= \int_1^2 (2-x)\,dx + \int_0^1 (2x^2+1)\,dx = \frac{13}{6}$$

2 Ebazpena.



b) $y_0 = x_0^2 + Cx_0 \Rightarrow C = \dfrac{y_0 - x_0^2}{x_0}$ $\quad x_0 \neq 0$ bada

Kurba bakarra dago $x_0 = 0$ denean ezik.

c) $\begin{cases} y = x^2 + Cx \\ y' = 2x + C \Rightarrow C = y' - 2x \end{cases} \Rightarrow y = x^2 + x(y' - 2x)$

$y + x^2 = xy'$

d) $y' - \dfrac{1}{x}\,y = x$ lehen ordenako ekuazio lineala

$$y = \mathrm{e}^{\int \frac{dx}{x}} \left(C + \int x\,\mathrm{e}^{-\int \frac{dx}{x}}\,dx \right) = x(C+x)$$

3 Ebazpena. $y(x)$ bakoitia $\Rightarrow a_n = 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \,\sin nx\, dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin nx\, dx & v = \dfrac{-\cos nx}{n} \end{bmatrix} =$$

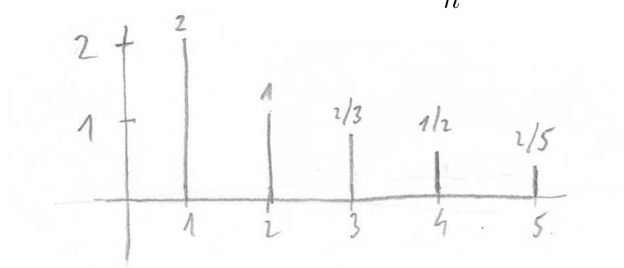
$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\,\cos nx}{n}\Big|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx\, dx \right) = \frac{-2}{n}\, cos\pi n = \frac{2}{n}\,(-1)^{n+1}$$

$$S(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$$

$x \neq (2k+1)\pi$: $\quad y(x)$ jarraia da $\Rightarrow S(x) = y(x)$

$x_k = (2k+1)\pi : \Rightarrow S(x_k) = \dfrac{y(x_k^+) - y(x_k^-)}{2} = \dfrac{\pi - \pi}{2} = 0$

ESPEKTROA: $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \dfrac{2}{n} \quad n \geq 1$



4 Ebazpena. $\mathscr{L}(x) = X$; $\mathscr{L}(y) = Y$

$$\left.\begin{array}{l} sX - 8 = 2X - 3Y \\ sY - 3 = Y - 2X \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} (s-2)X + 3Y = 8 \\ 2X + (s-1)Y = 3 \end{array}\right\}$$

$$X = \frac{3}{s-4} + \frac{5}{s+1} \Rightarrow x(t) = 3\,\mathrm{e}^{4t} + 5\,\mathrm{e}^{-t}$$

$$Y = \frac{-2}{s-4} + \frac{5}{s+1} \Rightarrow y(t) = -2\,\mathrm{e}^{4t} + 5\,\mathrm{e}^{-t}$$