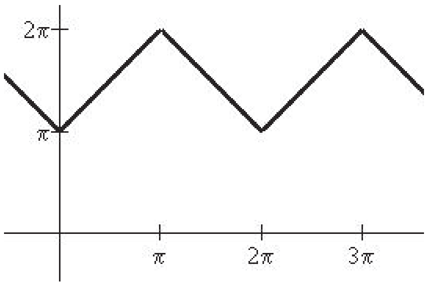
Gaiak 6 - 11: 8. Autoebaluaketa

1 Ariketak

1 Ariketa.



Izan bedi $r(t)$ irudian agertzen den 2π periodoko funtzio periodikoa. Bere Fourierren seriea kalkulatu eta konbergentzia aztertu.

2 Ariketa. Substantzi porotsu bat likido batekin bustita eta airearen eraginpean jarrita, bere hezetasuna galtzen du. Suposatuko dugu, hipotesiagatik, hezetasuna galtzeko abiadura substantziak duen likidoaren kantitatearekiko proportzionala dela.

a) Eredu matematiko bat osatu substantziak une bakoitzean duen likidoaren kantitatea $H(t)$ kalkulatzeko.

b) $H(t)$ funtzioen familia kalkulatu.

c) $H(t)$ funtzioa kalkulatu eta grafikoki adierazi, jakinik hezetasuna hiru egunetan $H = 1$ baliotik $H = 1/7$ baliora pasatzen dela.

3 Ariketa. Kontsideratu ondoren agertzen diren S_1, S_2 eta S_3 gainazalak. Izan bedi B S_2-ren barnealdean dagoen S_1 eta S_2 gainazalek mugatutako solidoa. B grafikoki adierazi eta bere bolumena kalkulatu.

$$S_1 : x^2 + y^2 = a(z - b) \quad (0 < a < b)$$
$$S_2 : x^2 + y^2 = a$$
$$S_3 : z = 2b$$

4 Ariketa. Suposa dezagun $y(t)$ funtzio deribagarriaren Laplaceren transformatua $Y(s)$ dela. Kalkulatu $F(s)$, $F(t) = te^{at}y'(t)$ funtzioaren Laplaceren transformatua, a konstantea dela suposatuz.

2 Ebazpenak

1 Ebazpena.

$r(t)$ bikoitia $\Rightarrow b_n = 0 \forall n$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (t+\pi)dt = \frac{3\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (t+\pi)\cos ntdt \overset{(*)}{=} \frac{2}{\pi}\left((t+\pi)\frac{\sin nt}{n}\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin ntdt\right) =$$

$$(*) \begin{cases} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{cases}$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\cos nt\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & n \text{ bikoitia bada} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & n \text{ bakoitia bada} \end{cases}$$

$$S(t) = \frac{3\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2}$$

$r(t)$ jarraitua denez, $S(t) = r(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$.

2 Ebazpena. a) $H'(t) = AH^2(t)$

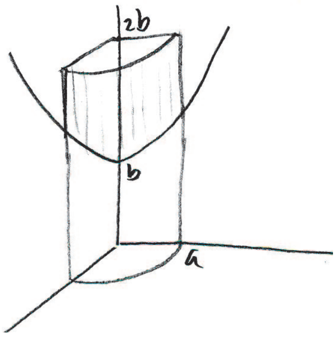
b) $\dfrac{dH}{H^2(t)} = Adt \Rightarrow -\dfrac{1}{H(t)} = At + k \Rightarrow H(t) = \dfrac{-1}{k+At}$

c) $H(0) = 1 \Rightarrow 1 = \dfrac{-1}{k} \Rightarrow k = -1$

$H(3) = \dfrac{1}{7} \Rightarrow \dfrac{1}{7} = \dfrac{-1}{-1+3A} \Rightarrow A = -2$

$H(t) = \dfrac{1}{1+2t}$

3 Ebazpena.



$$\text{Bolumena} = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^a\int_{\frac{\rho^2}{a}+b}^{2b}\rho dz d\rho d\theta =$$
$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^a \rho\left(b-\frac{\rho^2}{a}\right)d\rho d\theta =$$
$$= 4\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}a^2b-\frac{1}{4}a^3\right)d\theta =$$
$$= (2a^2b-a^3)\int_0^{\pi/2}d\theta = \frac{\pi}{2}(2a^2b-a^3)$$

4 Ebazpena.

$$\mathscr{L}(y(t)) = Y(s); \quad \mathscr{L}(y'(t)) = sY(s)-y(0)$$
$$\mathscr{L}(ty'(t)) = (-1)1\frac{d}{ds}(sY(s)-y(0)) = -(Y(s)+sY'(s)) = -sY'(s)-Y(s)$$
$$\mathscr{L}\left(e^{at}ty'(t)\right) = -(s-a)Y'(s-a)-Y(s-a)$$