Gaiak 1 - 5: 4. Autoebaluaketa

1 Ariketak

1 Ariketa. $4z^3+4z^2+(1-2i)z=0$ ekuazioaren erroek triangelu bat osatzen dute. Grafikoki adierazi eta kalkulatu bere perimetroa eta bere azalera.

2 Ariketa. Zenbakizko segida baten ondorengo propietateak definitu: dibergentea $+\infty$rantz, goi mugatua, gorakorra. Segida batek hiru propietateak batera bete al ditzake? Eta bi bakarrik?

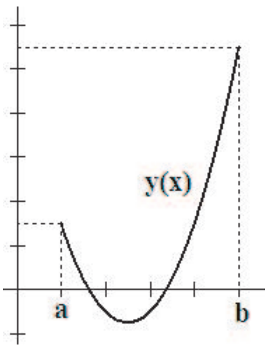
3 Ariketa. Manufaktura-prozesu batean erabilitako osagaien erosketa eta garraioko kostua honela kalkula daiteke:

$$K(x) = 10\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x+3}\right) \qquad x \in [3,6]$$

non K dolarretan neurtuta dagoen eta x eskariaren tamainua den, unitateko ehunetan. Baiztapen honen ziurtasuna aztertu: "Existitzen da eskariaren tamainu bat, non kostuaren aldaketako arrazoia nulua den".

4 Ariketa. Izan bedi $h(x)$ $[a,b]$ tartean definiturik dagoen funtzio hau:

$$h(x) = \int_a^x y(z)dz$$



non $y(x)$ irudian agertzen den funtzioa den. Aztertu:

a) $h(x)$ funtzioaren lehenengo eta bigarren deribatuen existentzia.

b) $h(x)$ funtzioaren gorapena.

c) $h(x)$ funtzioaren ahurtasuna.

d) $h(x)$ funtzioaren inflexio-puntuak.

e) $y(x)$ funtzioaren batezbesteko balioa $[a,b]$ tartean gutxi gora behera kokatu, egindakoa justifikatzen.

5 Ariketa. $[a, b]$ tartean puntu hauek hartzen dira: $z_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, n-1$, $x_k = a + kh$, $k = 0, \ldots, n$, $h = (b-a)/n$. Ondorengo limitea existitzen dela frogatu eta bere balioa kalkulatu:

$$\lim_{h \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} h z_k e^{z_k}$$

6 Ariketa. $s(u)$ funtzioaren ahal den ordena maximoko McLaurinen polinomioa kalkulatu. $s(-0.2)$ kalkulatzerakoan sortutako errorea bornatu.

$$s(u) = \begin{cases} e^u & u \leq 0 \\ u^3 + 0.5u^2 + u + 1 & u > 0 \end{cases}$$

7 Ariketa. Ondorengo taulan $y(x)$ funtzioaren bost balio azaltzen dira. Suposa dezagun kurba OX ardatzarekiko biratzen dela. Kalkulatu sortutako solidoaren bolumenaren balio hurbildua.

x	0.00	0.125	0.25	0.375	0.50
y	1.00	0.98	0.94	0.88	0.80

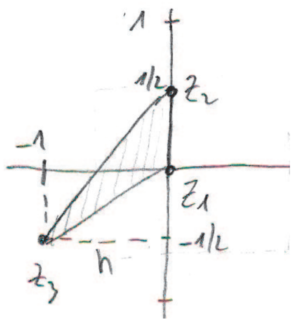
2 Ebazpenak

1 Ebazpena.

$$4z^3 + 4z^2 + (1-2i)z = 0 \Leftrightarrow z(4z^2 + 4z + 1 - 2i) = 0$$

$$4z^2 + 4z + 1 - 2i = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16(1-2i)}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{2i}}{2}$$

$$\sqrt{2i} = \sqrt{2_{\frac{\pi}{2}}} = \left\langle \begin{array}{l} \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i \\ \sqrt{2}_{\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 1 - i \end{array} \right.$$



Erroak: $z_1 = 0$, $z_2 = i/2$, $z_3 = 1 - i/2$

Perimetroa: $|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1| = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

Azalera: $\frac{|z_1 - z_2|h}{2} = \frac{1}{4}$

2 Ebazpena.

- Dibergentea $+\infty$rantz:

$$\lim_{n\to\infty} \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} | \forall n > n_0 \quad x_n > M$$

- Goi mugatua:

$$\exists M \in \mathbb{R} | \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq M$$

- Gorakorra:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} > x_n$$

Lehenengo bi propietateak bateraezinak dira, segida batean ezin dira batera gertatu.

Dibergentea + Gorakorra: adibidez, $x_n = n$

Goi mugatua + Gorakorra: adibidez, $x_n = -\dfrac{1}{n}$

3 Ebazpena.

$$K(x) = 10\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x+3}\right) \qquad x \in [3,6], \quad \exists z \in (3,6) | K'(z) = 0?$$

$K(x)$ funtzioa $[3,6]$ tartean jarraitua eta $(3,6)$ tartean deribagarria da.
$K(3) = 25/3 = K(6)$; orduan, Rolleren teoremagatik, $\exists z \in (3,6)|K'(z) = 0$.

$$K'(x) = 10\left(\frac{3}{(x+3)^2} - \frac{1}{x^2}\right)$$

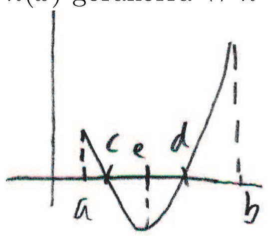
$$K'(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{(z+3)^2} = \frac{1}{z^2} \Leftrightarrow 2z^2 - 6z - 9 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{6 \pm \sqrt{108}}{4} \left\langle \begin{array}{c} 4.09 \\ -1.098 \end{array} \right.$$

Orduan, nahi genuen puntua $z \simeq 4.09 \in (3,6)$

4 Ebazpena. Hipotesia bezala, $y(x)$ $[a,b]$ tartean jarraitua dela onartuko dugu.

a) $y(x)$ jarraitua $[a,b]$ tartean $\Rightarrow$ $h(x)$ deribagarria da eta $h'(x) = y(x)$.
Onartzen badugu ere $y(x)$ deribagarria dela (grafikoan ikusten denez, zentzuzkoa dirudi), $h''(x) = y'(x)$.

b) $h(x)$ gorakorra $\Leftrightarrow$ $h'(x) = 0 \Leftrightarrow y(x) > 0$; beraz,

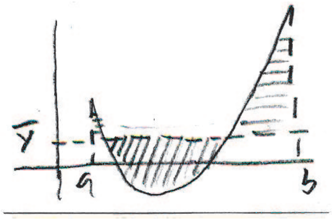


- $h(x)$ gorakorra da $(a,c) \cup (d,b)$ eremuan.
- $h(x)$ beherakorra da (c,d) tartean.

c) $h(x)$ ahurra $\Leftrightarrow$ $h''(x) = 0 \Leftrightarrow y'(x) > 0 \Leftrightarrow y(x)$ gorakorra; beraz,

- $h(x)$ ahurra da (e,b) tartean.
- $h(x)$ ganbila da (a,e) tartean.

d) Ahurtasuna $x = e$ puntuan aldatzen da $\Rightarrow$ inflexio-puntua da.

e) 

Kurbak mugatutako azalerek $\bar{y}$-ren gainetik eta azpitik berdinak izan behar dute.

5 Ebazpena. $y(x)$ funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua bada eta hartzen baditugu $h = (b - a)/n$, $x_k = a + kh$, $k = 0, \ldots, n$, $z_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, n-1$, orduan:

$$\lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} hy(z_k) = \int_a^b y(x)dx$$

Gure kasuan $y(x) = xe^x$ jarraitua da $[a, b]$ tartean:

$$\lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} hz_k e^{z_k} = \int_a^b xe^x dx = L$$

Zatikako integrazioa aplikatzen dugu $u = x$, $du = dx$, $dv = e^x dx$, $v = e^x$ harturik:

$$L = xe^x\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b e^x dx = be^b - ae^a - e^b + e^a$$

6 Ebazpena. ikus dezagun zein ordenerainoko den $s(u)$ deribagarria $u = 0$ puntuan:

- $s(0^+) = s(0^-) = 1 \Rightarrow$ jarraitua da.
- $s'(0^+) = 3u^2 + u + 1\Big|_{u=0} = 1$, $s'(0^-) = e^u\Big|_{u=0} = 1 \Rightarrow$ existitzen da $s'(0) = 1$.
- $s''(0^+) = 6u + 1\Big|_{u=0} = 1$, $s''(0^-) = e^u\Big|_{u=0} = 1 \Rightarrow$ existitzen da $s''(0) = 1$.
- $s'''(0^+) = 6$, $s'''(0^-) = e^u\Big|_{u=0} = 1 \Rightarrow$ ez da existitzen da $s'''(0)$.

Beraz, $p_2(u) = 1 + u + 0.5u^2$. Errorea bornatzeko $p_1(u) = 1 + u$ erabiliko dugu, $s''(u)$ erabili ahal izateko:

$$y(a + h) - p_1(a + h) = \frac{y''(z)h^2}{2}, \quad z \in (a, a + h)$$

Gure kasuan $a = 0$ eta $h = -0.2$

$$|s(-0.2) - p_1(-0.2)| = \frac{(0.2)^2}{2} e^z, \quad z \in (-0.2, 0)$$

Beraz, $ERROREA \leq \dfrac{0.04}{2} e^0 = 0.01$, eta hurbilketa: $p_1(-0.2) = 1 - 0.2 = 0.8$.

7 Ebazpena. $B = \pi \displaystyle\int_a^b y^2(x)dx$ kalkulatzeko laukizuzenen formula erabiliko dugu, azpitarteen ezkerreko muturra harturik, $h = 0.125$, $a = 0$ eta $b = 0.5$.

x	y	y^2
0	1	1
0.125	0.98	0.9604
0.250	0.94	0.8836
0.375	0.88	0.7744
0.5	0.8	0.64

$$B \simeq \pi \cdot 0.125(1 + 0.9604 + 0.8836 + 0.7744) = 1.6723$$