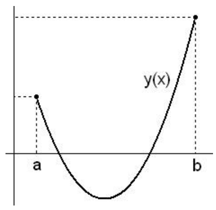
Gaiak 1 - 5: 3. Autoebaluaketa

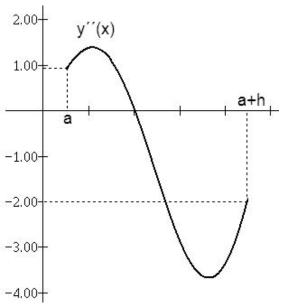
1 Ariketak

1 Ariketa. Izan bedi $[a, b]$ tartean definitutako hurrengo $h(x)$ funtzioa: $h(x) = \int_a^x y^2(t)dt$, non $y(t)$ hurrengo irudian agertzen den funtzioa den:



a) Aztertu $h(x)$ funtzioaren deribagarritasuna.
b) Aztertu $h(x)$ funtzioaren gorakortasuna/beherakortasuna eta muturren existentzia.
d) Aztertu $h(x)$ funtzioaren ahurtasuna/ganbiltasuna eta inflexio puntuen existentzia.
e) Marraztu $h(x)$ funtzioaren gutxi gora beherako grafikoa.

2 Ariketa. Demagun $y(x)$ funtzio bat bigarren ordenaraino deribagarria dela.
a) Eman $y(a+h)$-ren balioaren adierazpena Taylor-en polinomioa erabiliz, $n = 1$ baliorako.
b) $y'(a)$-ren balio hurbildua kalkulatu nahi dugu hurrengo adierazpena erabiliz: $\frac{y(a+h)-y(a)}{h}$
Hurrengo irudian $y''(x)$ funtzioaren grafikoa dago. Kalkulatu egindako errorearen borne bat.



3 Ariketa. R_1 eta R_2 bi erresistentzia paraleloan konektatzen badira, erresistentzia horien eta R erresultantearen balioaren arteko erlazioa ondorengoa da:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

a) Demagun R_1-en eta R_2-ren balioak 50 eta 75 artean mugitzen direla. Zein da R-ren erritmo aldaketa?
b) Demagun R_1 eta R_2 abiadura berean aldatzen direla. Aztertu R-ren erritmo aldaketa.

4 Ariketa. Izan bitez $[0, 2]$ tartea eta $h = 2/n$, ($n \in N$ izanik). Hurrengo puntuak hartzen dira:

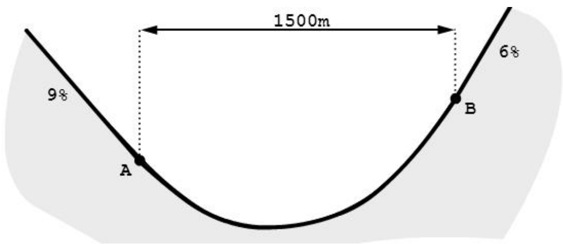
$$x_k = kh, \ k = 0, \dots, n$$

$$z_k \in [x_k, x_{k+1}, \ k = 0, \dots, n-1$$

Frogatu ondorengo limitea existitzen dela eta ondoren kalkulatu:

$$\lim_{h \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} h\sqrt{4 - (z_k)^2}$$

5 Ariketa. Autopistaren hiru zati eraiki nahi dira; horietarik bik %9 eta %6-ko maldak izango dituzte hurrenez hurren, eta erdiko zatia parabola itxurakoa izango da (ikus irudia). Kalkulatu hiru zatien ekuazioak.

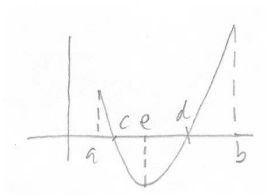


2 Ebazpenak

1 Ebazpena.

Suposatzen dugu hipotesiz $y(x)$ jarraitua dela $[a, b]$ tartean.
a) $h(x)$ deribagarria da eta $h'(x) = y^2(x)$, kalkuluaren oinarrizko teorema aplikatuz.
b) $h'(x) = y^2(x)$

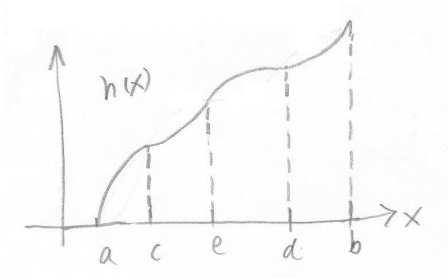
$$\forall x \in (a, c),\ h'(x) > 0 \Rightarrow h(x) \text{ gorakorra } (a, c) \text{ tartean}$$
$$\forall x \in (c, d),\ h'(x) > 0 \Rightarrow h(x) \text{ gorakorra } (c, d) \text{ tartean}$$
$$\forall x \in (d, b),\ h'(x) > 0 \Rightarrow h(x) \text{ gorakorra } (d, b) \text{ tartean}$$
$$h'(c) = h'(d) = 0 \Rightarrow \text{ mutur posibleak}$$



d) $h''(x) = 2y(x)y'(x)$, $y'(e) = 0$

$$\forall x \in (a, c),\ y(x) > 0,\ y'(x) < 0 \ \ (y(x) \text{ beherakorra delako}) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h''(x) < 0 \Rightarrow h(x) \text{ ganbila } (a, c) \text{ tartean}$$
$$\forall x \in (c, e),\ y(x) < 0,\ y'(x) < 0 \ \Rightarrow h''(x) > 0 \Rightarrow h(x) \text{ ahurra}$$
$$\forall x \in (e, d),\ y(x) < 0,\ y'(x) > 0 \ \Rightarrow h''(x) < 0 \Rightarrow h(x) \text{ ganbila}$$
$$\forall x \in (d, b),\ y(x) > 0,\ y'(x) > 0 \ \Rightarrow h''(x) > 0 \Rightarrow h(x) \text{ ahurra}$$

$x = c, d, e$ puntuetan ahurretik ganbilera eta alderantziz pasatzen da funtzioa, eta beraz, inflexio puntuak dira:



2 Ebazpena.

$$y(a+h) = y(a) + y'(a)h + \frac{y''(z)}{2}h^2, \quad z \in (a, a+h)$$

$$\frac{y(a+h) - y(a)}{h} - y'(a) = \frac{y''(z)}{2}\,h$$

$$\text{ERROREA} = \left| \frac{y(a+h) - y(a)}{h} - y'(a) \right| = \frac{|h|}{2}\,|y''(z)| \leq \frac{|h|}{2}\,4 = 2\,|h|$$

ERROREAREN BORNEA$= 2\,|h| = 2h$, $h > 0$ delako kasu honetan.

3 Ebazpena.

$$\frac{d}{dt}\,\frac{1}{R} = \frac{d}{dt}\,\frac{1}{R_1} + \frac{d}{dt}\,\frac{1}{R_2};\; R(t) = \frac{R_1(t)R_2(t)}{R_1(t) + R_2(t)}$$

a)$-R'(t)\,\frac{1}{R^2} = -R_1'(t)\,\frac{1}{R_1^2} - R_2'(t)\,\frac{1}{R_2^2}$

$R'(t) = R^2(t)\left(\frac{R_1'(t)}{R_1^2(t)} + \frac{R_2'(t)}{R_2^2(t)}\right) = \left(\frac{R_1(t)R_2(t)}{R_1(t) + R_2(t)}\right)^2 \left(\frac{50}{R_1^2(t)} + \frac{75}{R_2^2(t)}\right)$

b) $R_1'(t) = R_2'(t) = v(t)$

$R'(t) = \left(\frac{R_1(t)R_2(t)}{R_1(t) + R_2(t)}\right)^2 \left(\frac{v(t)}{R_1^2(t)} + \frac{v(t)}{R_2^2(t)}\right)$

4 Ebazpena.

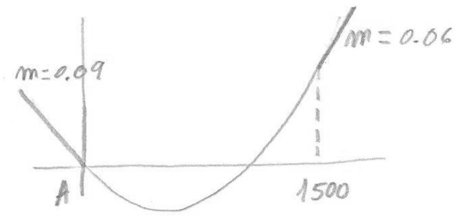
$$x_k = a + kh,\; k = 0, \ldots, n, \quad z_k \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 0, \ldots, n-1$$

$$h = \frac{b-a}{n} \;\Rightarrow\; \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} h\, y(z_k) = \int_a^b y(x)\,dx, \quad y(x) \text{ jarraitua izanik } [a,b] \text{ tartean}$$

Kasu honetan, $y(x) = \sqrt{4-x^2}$ jarraitua izango da $[a,b] = [0,2]$ tartean.

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{ll} x = 2\sin t & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dx = 2\cos t\,dt & x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt =$$
$$= 2\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt = \pi$$

5 Ebazpena.



$y(0) = 0$

$y'(0) = -0.09$

$y'(1500) = 0.06$

$y = ax^2 + bx + c$ itxurako erdiko zati bat hartzen dugu.

$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; c = 0, \quad y'(x) = 2ax + b$

$y'(0) = b = -0.09$

$y'(1500) = 3000a - 0.09 = 0.06 \;\Rightarrow\; a = 0.00005$

$y = 0.00005x^2 - 0.09x$ ZATI PARABOLIKOA

$y = -22.5 + 0.06(x - 1500)$ ZATI ZUZENA

$y = -0.09x$ EZKERRALDEKO ZATIA