

Gaiak 1 - 5: 2. Autoebaluaketa

1 Ariketak

1 Ariketa. Arrazoituz, ondorengo galderak erantzun:

1. Zer baldintzak bete behar dituzte bi zenbaki konplexuen moduluek bi zenbaki horien biderkaketa erreala izateko?
2. Zer baldintzak bete behar dituzte bi zenbaki konplexuen moduluek bere zatiketa irudikari hutsa izateko?.

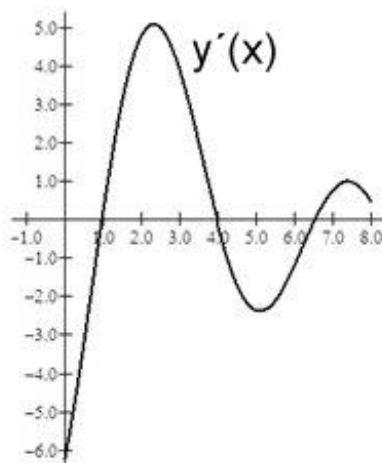
2 Ariketa. Zenbaki errearen segidako limitearen kontzeptua definitu. Kontzeptu hau erabili ondorengo segiden konbergentzia atertzeko:

$$a) a_n = \frac{1}{n^3} \quad b) b_n = \begin{cases} 2 & n \text{ 100-en anizkoitza bada} \\ \frac{n}{n+1} & \text{beste kasuetan} \end{cases} \quad c) c_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

3 Ariketa.

Ondorengo irudian $y(x)$ funtzio baten deribatua agertzen da. Ondorengo galderak erantzun:

1. Zer tartetan $y(x)$ gorakorra/beherakorra da?
2. Zer puntuetan muturra du?
3. Zer azpitartetan ahurra/ganbila da?
4. Zer puntuetan inflexio puntua du?



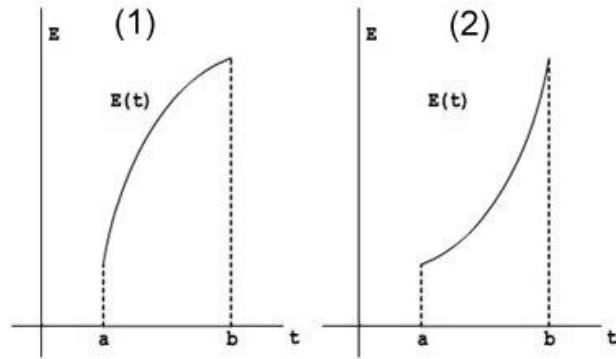
4 Ariketa. Esan ondorengo baieztapena egiazkoa den: Demagun $y(x)$ jarraia dela \mathbb{R} -n eta bere integrala nulua dela $[a, b]$ tartean. Orduan, $y(x) = 0$ edozein x errealarako.

5 Ariketa. Ondorengo grafikoetan bi ibilgailu desberdinek ibilitako $E(t)$ espazioa $[a, b]$ denbora tartean agertzen da.

1. Ibilgailu bakoitzaren batezbesteko azelerazioa positiboa edo negatiboa izan da?.

2. Demagun ibilgailu baten abiadura $t = a$ unean, 70 km/h-koa zela eta $t = b$ unean 40 km/h-koa; bigarren ibilgailuaren abiadurak $t = a$ eta $t = b$ unean 12 km/h-koa eta 35 km/h-koa izan ziren hurrenez hurren. Esan zer grafikoari dagozkion datu pare bakoitza.

3. Aurreko atalako datuen arabera eta jakinik bi ibilgailu horiek 15 segundu ibiltzen direla zein da ibilgailu bakoitzaren batzbesteko azelerazioa?.



2 Ebazpenak

1 Ebazpena. 1. $\rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'} = \rho \rho'_{\theta+\theta'} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \theta + \theta' = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

2. $\frac{\rho_\theta}{\rho'_{\theta'}} = \left(\frac{\rho}{\rho'} \right)_{\theta-\theta'}$ irudikari hutsa $\Leftrightarrow \theta - \theta' = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

2 Ebazpena.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \quad x_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$$

1. $l = 0, \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \quad \frac{1}{n^3} < \epsilon$

non $n_0 > \frac{1}{\sqrt[3]{\epsilon}}$ den.

2. Ez dago limiterik: $l = 1$ hartzen badugu $\epsilon = 1$ denerako, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, hartzen dugu $n > n_0$ non n 100-en anizkoitza den orduan $b_n = 2 \notin (0, 2)$

3. $l = 0: \quad -\epsilon < \frac{(-1)^n}{n+1} < \epsilon$, har dezagun $n_0 > \frac{1}{\epsilon} - 1$

3 Ebazpena. 1. $y'(x) < 0$ en $(0, 1) \cup (4, 6.5) \Rightarrow y(x)$ beherakorra

$y'(x) > 0$ en $(1, 4) \cup (6.5, 8) \Rightarrow y(x)$ gorakorra.

2. $y'(1) = y'(4) = y'(6.5) = 0$; aldakuntza \Rightarrow mutur erlatiboa.

3. $y'(x)$ gorakorra $(0, 2.5)$ tartean $\Rightarrow y(x)$ ahurra.

$y'(x)$ beherakorra $(2.5, 5)$ tartean $\Rightarrow y(x)$ ganbila.

$y'(x)$ gorakorra $(5, 7.5)$ tartean $\Rightarrow y(x)$ ganbila.

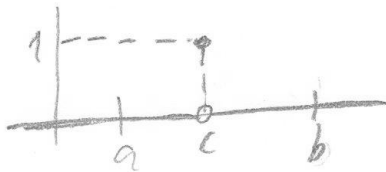
$y'(x)$ beherakorra $(7.5, 8)$ tartean $\Rightarrow y(x)$ ganbila.

4. $x = 2.5, 5, 7.5, 8$ puntueta ahurtasuna aldatzen da \Rightarrow Inflexio puntuak

4 Ebazpena. Demagun badagoela $c \in \mathbb{R} \mid f(c) \neq 0$. $y(c) > 0$ bada, $y(x)$ jarraia denez, badago $(c - \epsilon, c + \epsilon)$ tarte bat non $y(x) > 0$ den, beraz ondorengo kontraesana lortzen da $\int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} y(x) dx > 0$.

Beraz, $y(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$y(x)$ jarraia ez bada, adibidez



$$y(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in (-\infty, c) \cup (c, \infty) \\ 1 & x = c \end{cases}$$

$$y(x) \neq 0 \text{ da baina } \int_a^b y(x) dx = 0$$

5 Ebazpena. 1. 1. ibilgailua: $E(t)$ ganbila denez $\Rightarrow E''(t) < 0$

$$\text{Batezbesteko azelerazioa} = \frac{1}{b-a} \int_a^b E''(t) dt < 0$$

2. ibilgailua: $E(t)$ ahurra denez $\Rightarrow E''(t) > 0$

$$\text{Batezbesteko azelerazioa} = \frac{1}{b-a} \int_a^b E''(t) dt > 0$$

2. 1. ibilgailua: $E''(t) < 0 \Rightarrow E'(t)$ beherakorra da.

2. ibilgailua: $E''(t) > 0 \Rightarrow E'(t)$ gorakorra da.

Beraz, 1. ibilgailuari ondorengo datuak dagozkio: 70 – 40 Km/h eta 2. ibilgailuari: 12 – 35 Km/h

$$3. 1. \text{ ibilgailua: Batezbesteko azelerazioa } \frac{3600}{15} \int_a^b E''(t) dt = 240 E'(t) \Big|_{t=a}^{t=b} = 240 (E'(b) - E'(a)) = 240(40 - 70) = -7200 \text{ Km/h} = -0.6 \text{ m/s}^2$$

$$2. \text{ ibilgailua: Batezbesteko azelerazioa} = 240(35 - 12) = 5520 \text{ Km/h} = 0.42 \text{ m/s}^2$$