Gaiak 1 - 5: 1. Autoebaluaketa

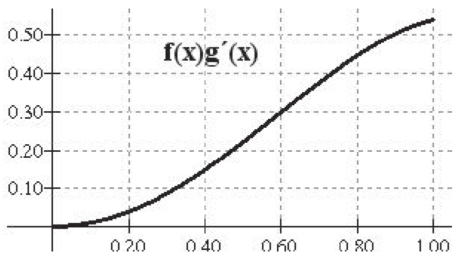
1 Ariketak

1 Ariketa. Izan bitez $f(x)$ eta $g(x)$ $[a, b]$ tartean definitutako bi funtzio.

a) Aurkitu $f(x)g'(x)$-en eta $f'(x)g(x)$-en batezbestekoaren arteko erlazioa.

b) Demagun $[a, b] = [0, 1]$ dela eta ondoko irudiak $f(x)g'(x)$ funtzioaren grafikoa adierazten duela. Grafiko hori erabiliz, kalkulatu gutxi gora behera, $f(x)g'(x)$ funtzioaren batezbestekoa. Arrazoitu erantzuna.

d) Demagun $g(0) = 0, g(1) = 1$ eta $f(1) = 0.8$ direla. Erabili aurreko bi atalak $f'(x)g(x)$ funtzioaren batezbestekoa gutxi gora behera kalkulatzeko.

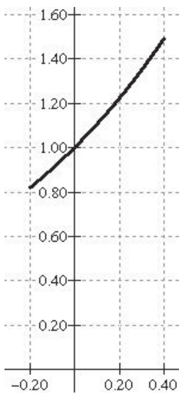


2 Ariketa. Izan bitez $F(z)$ eta $G(z)$ hurrengo baldintzak betetzen dituzten bi funtzio:

$$F'(z) + G(z) = \mathrm{e}^z + z^2$$
$$F(z) + G'(z) = \mathrm{e}^z + 2z$$
$$F(0) = 1, G(0) = 0$$

a) Kalkulatu $F(z)$ funtzioaren McLaurin-en 3. ordenako polinomioa. Erabili polinomio hori $F(0,2)$-ren balio hurbildua kalkulatzeko.

b) Ondoko irudiak $H(z) = \mathrm{e}^z - d^3G/dz^3$ funtzioaren grafikoa adierazten duela jakinik, erabili Taylor-en teorema, aurreko atalean lortutako hurbilketari dagokion errorearen borne bat emateko.



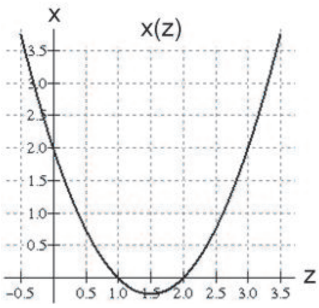
3 Ariketa.

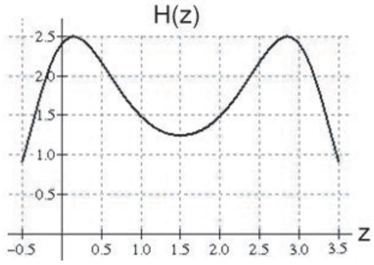
Goitik irekia den biltoki zilindriko bat eraiki nahi dugu, 0.5 cm-ko lodiera duen txapa metaliko bat erabiliz; biltokiak 1 m^3-ko edukiera izan behar du. Biltokia eraikitzeko, noski, ahalik eta txapa gutxiena erabiltzea interesatzen zaigu. Biltokia 80×80 cm-ko oinarria eta 215 cm-ko luzera duen zulo batean (ikus irudia) instalatu behar da. Kalkulatu biltokiaren dimentsioak eta bera fabrikatzeko behar den txaparen prezioa.

4 Ariketa. Demagun $h(x)$ funtzio jarraitua dela $[0, 2]$ tartean, eta bere integrala I kalkulatzeko $x = x(z)$ aldagai aldaketa erabili dugula (ikusi $x(z)$-ren grafikoa irudian). Modu horretan, $F(z)$ funtzio berri bat lortuko dugu; funtzio hori $[p, q]$ tarte berri batean integratu beharko dugu:

$$I = \int_0^2 h(x)dx = \int_p^q F(z)dz$$

a) Esan nola kalkulatu daitekeen $F(z)$ funtzioa.
b) Kalkulatu p eta q integrazio limite berriak. Aukera bat baino gehiago al dago?
d) $F(z)$ funtzioaren $H(z)$ jatorrizko funtzioa kalkulatu dugu eta grafikoki adierazi dugu (ikus irudia). Grafiko hori erabiliz, kalkulatu integralaren I balio hurbildua.





5 Ariketa. Definitu x_n segida baten limitea. Definizioa erabiliz, frogatu $x_n = 2n/(n+1)$ segidaren limitea 2 dela.

6 Ariketa. Hurrengo marrazkian ontzi baten irudia dago. Demagun ontzi horretara ura botatzen dugula, erritmo konstantean; modu horretan, t une bakoitzean urak $h(t)$ altuera lortuko du. Marraztu $h(t)$ funtzioaren gutxi gora beherako grafiko posible bat (aztertu $h(t)$ funtzioaren jarraitasuna, deribagarritasuna, gorakortasuna/beherakortasuna, ahurtasuna/ganbiltasuna).

2 Ebazpenak

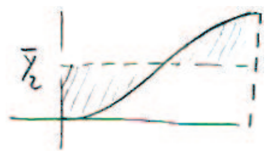
1 Ebazpena. Zatitako integrazioa aplikatuz:

a) $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)dx \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(x)g(x)dx = \frac{f(b)g(b)-f(a)g(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g'(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \overline{y}_1 = \frac{f(b)g(b)-f(a)g(a)}{b-a} - \overline{y}_2$$

b)



Bi azalerak berdinak izan beharko dira. Eta beraz:

$\overline{y}_2 \approx 0.27$

d) $\overline{y}_1 = 0.8 - \overline{y}_2 \quad \Rightarrow \quad \overline{y}_1 \approx 0.8 - 0.27 = 0.53$

2 Ebazpena.

$$F(z) = F(0) + F'(0)z + \frac{F''(0)z^2}{2!} + \frac{F'''(0)}{3!}z^3 + \frac{F^{\prime v}(u)}{4!}z^4, \quad u \in (0,z)$$

Hipotesia: $F(z)$ eta $G(z)$ deribagarriak dira behar ditugun ordenetaraino.

$$F'(z) + G(z) = \mathrm{e}^z + z^2 \Rightarrow F'' + G' = \mathrm{e}^z + 2z \Rightarrow F''' + G'' = \mathrm{e}^z + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F^{\prime v} + G''' = \mathrm{e}^z \Rightarrow F^{\prime v} = \mathrm{e}^z - G'''$$

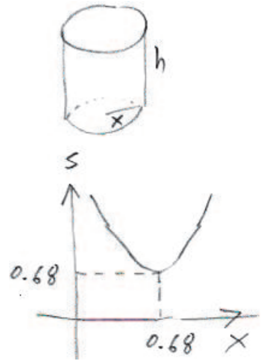
$$\left.\begin{array}{l} F(0) = 1, \quad G(0) = 0 \\ F' + G = \mathrm{e}^z + z^2 \\ F + G' = \mathrm{e}^z + 2z \\ F' + G'' = \mathrm{e}^z + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} F'(0) + G(0) = 1 \Rightarrow F'(0) = 1 \\ F(0) + G'(0) = 1 \Rightarrow G'(0) = 1 - 1 = 0 \\ F''(0) + G'(0) = 1 \Rightarrow F''(0) = 1 \\ F'(0) + G''(0) = 3 \Rightarrow G''(0) = 3 - 1 = 2 \\ F'''(0) + G''(0) = 3 \Rightarrow F'''(0) = 3 - 2 = 1 \end{array}$$

$$P_3(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}; \quad \left|\frac{F'^{v}(u)}{4!} 0.2^4\right|_{u\in(0,0.2)} \overset{\text{GRAFIKOA}}{\leq} \frac{1.3}{4!}(0.2)^4 \leftarrow \text{ BORNEA}$$

$$\text{APROX} = P_3(0.2) = 1 + 0.2 + \frac{(0.2)^2}{2}$$

3 Ebazpena. Bolumena: $V = \pi x^2 h = 1 \Rightarrow h = \dfrac{1}{\pi x^2}$

Gainazala: $S = \pi x^2 + 2\pi x h = \pi x^2 + \dfrac{2}{x}$



$$S'(x) = 2\pi x - \frac{2}{x^2}; \quad S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 0.68$$

$$h = \frac{1}{\pi \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 0.68 \text{ m}$$

$$S''(x) = 2\pi + 4x^{-3}; \quad S''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\right) > 0 \Rightarrow \text{ Minimoa}$$

Arazoa da ez dela zuloan sartzen: $68 \cdot 2 + \underbrace{2 \cdot 0.5}_{\text{txaparen lodiera}} > 80$ cm baita. Har dezagun 0.68-tik gertuen dagoen x balioa:

$x = 0.395 \ \Rightarrow \ 2x = 0.79$ (1 cm-ko lodiera gehituz 80 cm geratzen dira)

Ikus dezagun ea orain altuera nahikoa dugun:

$$h = \frac{1}{\pi(0.395)^2} = 2.04 \text{ m } < 2.15 \text{ m}$$

4 Ebazpena. a) $F(z) = y(x(z)) \cdot x'(z)$ ($x'(z)$ jarraitua dela suposatuz)

b) $x \in [0, 2]$ izanik:

$x = 0 \Rightarrow z = 1, 2$

$x = 2 \Rightarrow z = 0, 3$

Beraz, p eta q aukeratzeko aukera ezberdinak dauzkagu:

$$I = \int_1^0 F(z)\, dz = \int_1^3 F(z)\, dz = \int_2^0 F(z)\, dz = \int_2^3 F(z)\, dz$$

d) $I = H(q) - H(p) = H(0) - H(1) = H(3) - H(1) = H(0) - H(2) = H(3) - H(2) \approx 2.4 - 1.5 = 0.9$

5 Ebazpena.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \geq n_0 \;\; x_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$$

$$l = 2 \;\; x_n = \frac{2n}{n+1}; \quad 2 - \epsilon < \frac{2n}{n+1} < 2 + \epsilon \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\epsilon < \frac{2n}{n+1} - 2 < \epsilon \;\Leftrightarrow\; -\epsilon < \frac{-2}{n+1} < \epsilon$$

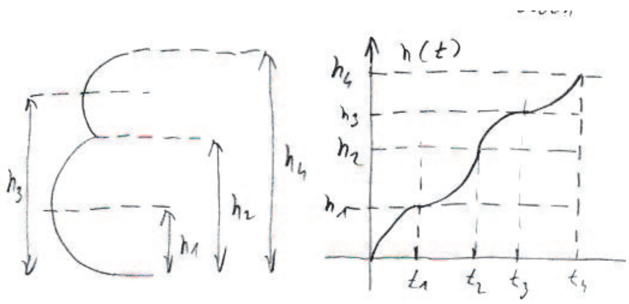
Orduan, edozein $\epsilon > 0$ emanda, n bat hartzen dugu non:

$$-\epsilon < \frac{-2}{n+1} \;\Rightarrow\; \epsilon > \frac{2}{n+1} \;\Rightarrow\; \frac{2}{\epsilon} < n + 1 \;\Rightarrow\; n > \frac{2}{\epsilon} - 1$$

Adibidez:

$\epsilon = 0.01$ bada, $n > \frac{2}{0.01} - 1 = 200 - 1 = 199$ aukeratzen dugu.

$\epsilon = 0.001$ bada, $n > \frac{2}{0.001} - 1 = 2000 - 1 = 1999$ aukeratzen dugu.



6 Ebazpena. h gorakorra da $(0, t_4)$ tartean

$t \in (0, t_1)$ abiadura beherakorra $\Rightarrow$ $h'' < 0 \Rightarrow h$ ganbila
$t \in (t_1, t_2)$ abiadura gorakorra $\Rightarrow$ $h'' > 0 \Rightarrow h$ ahurra
$t \in (t_2, t_3)$ abiadura beherakorra $\Rightarrow$ $h'' < 0 \Rightarrow h$ ganbila
$t \in (t_3, t_4)$ abiadura gorakorra $\Rightarrow$ $h'' > 0 \Rightarrow h$ ahurra
Inflexio puntuak: t_1, t_2, t_3; funtzio jarraitua $[0, t_4]$ tartean.