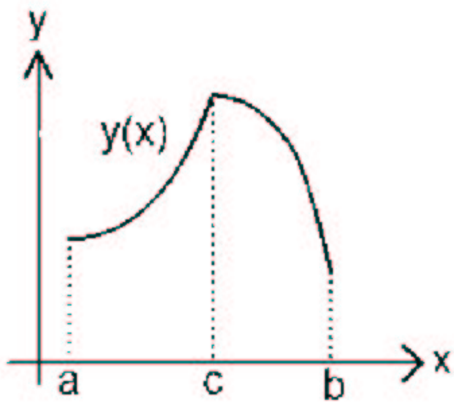
Jakin beharrezkoen 2. autoebaluaketa

1 Ariketak

1 Ariketa. (1) irudian azaltzen den adierazpen grafikoa duen funtzioa aztertu.



Irudia 1: (1) ariketaren adierazpena

2 Ariketa. (Bidai baten ibilgaluaren batesbezteko abiadura 84 Km/h izan da. Ibilgaluaren abiadura uneren baten 84Km/h izan al da?

3 Ariketa. Demagun enpresa baten mozkina urteen zehar

$$B(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 3}$$

funtzioen bidez adierazita dagoela

Analisigile batek dioenez, mozkinak joera berdina jarraitzen badute, epe luzean mozkina gutxi gora behera lineala izango da, $B(x) = ax + b$ erakoa hain zuzen. Zertan datza analisigilearen baieztapena?

4 Ariketa. (Demagun A zenbaki errealez osatutako multzoa dela.

$a \in A$ zenbakia puntu isolatua da honako baldintza betetzen duenean:

$\exists \epsilon > 0 \mid (a - \epsilon, a + \epsilon) \cap A = \{a\}$

1. Aurkako baldintza formalki adierazi, hau da, $a \in A$ zenbakiak bete behar duen baldintza puntu isolatua izan ez dadin.

2. Lortu $a \in A$ puntu isolatuak honako kasuetan

   (a) $A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$

   (b) $A = (1, 3] \cup \{4\}$

2 Ebazpenak

Erlazionatutako emaitzak

1 Ebazpena. 1. $y(x)$ funtzio deribagarria da (a,b) tartean. $y'(x) > 0$ baldin eta soilik baldin, $y(x)$ gorakorra den (a,b) tartean; $y'(x) < 0$ baldin eta soilik baldin, $y(x)$ beherakorra den (a,b) tartean.

2.

3. $y(x)$ funtzioa (a,b) tartean deribagarria baldin bada, $y(x)$-n adierazpen grafikoa ahurra da (ahurra gorantz) (a,b) tartean, x tarteko edozein puntuko ukitzailea lerromakurraren azpitik gelditzen denean puntuaren ingurunone baten; $y(x)$-n adierazpen grafikoa ganbila (ahurra beherantz) (a,b) tartean x tarteko edozein puntuko ukitzailea lerromakurraren gainetik gelditzen denean puntuaren inguruen baten.

4. S$y(x)$ kurbaren ahurtasuna aldatzen bada c puntuan, $x = c$ puntua $y(x)$ lerromakurraren inflexio-puntua da.

5. $y(x)$ funtzioa (a,b) tartean deribagarria baldin bada, $y(x)$-en adierazpen grafikoa ahurra da (a,b) tartean, baldin eta soilik baldin, $y''(x) > 0, \forall x \in (a,b)$ betetzen den; $y(x)$-en adierazpen grafikoa ganbila da (a,b) tartean, baldin eta soilik baldin $y''(x) < 0, \forall x \in (a,b)$.

6. $y(x)$ funtzioa (a,b) tartean definituta dugu, eta $c \in (a,b)$. $y(x)$ deribagarria baldin bada $x = c$ puntuan, puntu horretan ezkerretik eta eskubuti ukitzaileak berdinak dira Alboko ukiutzaileak ezberdinak direnean $y(x)$ ez da deribagarria $x = c$ puntuan.

Ebazpena

(1) irudian dugun $y(x)$-en adierazpena aztertuz ezin dugu zihurtatu jarraitua den ala ez, edo deribagarria den ala ez, horretarako adierazpen analitikoa behar dugu. Baina, arrazoizkoa dirudi $y(x)$ jarraitua eta bi aldiz deribagarria dela esatea $x = c$ ez diren (a,b) tarteko puntuetan.

Jarraitasuna eta deribagarritasuna $x \neq c$-rentzat hipotesi bezala hartuz,

- $y(x)$ gorakorra da (a,c) tartean, beraz, $y'(x) > 0$ da (a,c)-n.
- $y(x)$beherakorra da (c,b)tartean, beraz, $y'(x) < 0$ da (c,b)-n.
- $y(x)$ maximo erlatiboa du $x = c$ puntuan.

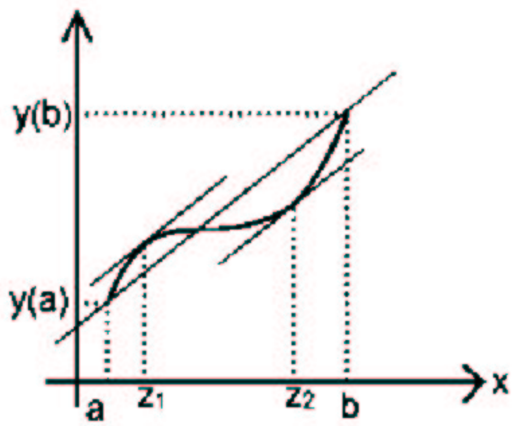
- $y(x)$ adierazpen grafikoa ahurra da (a, c) tartean, beraz $y''(x) < 0$ da (a, c)-n.
- $y(x)$ adierazpen grafikoa ganbila da (c, b) tartean, beraz $y''(x) < 0$ da (c, b)-n.
- $x = c$ puntuan $y(x)$-ren adierazpen grafikoak alboko uklitzaile desberdinak dituela dirudi, beraz, $y(x)$ ez litzateke deribagarria $x = c$ puntuan. Puntu horretan, adirazpen grafikoaren ahurtasuna aldatzen da, beraz inflexio puntua dugu $x = c$ puntuan.

2 Ebazpena. Erlazionatutako emaitzak

1. $y(x)$ funtzio jarraitua eta deribagarria baldin bada $[a, b]$ tartean, $y(x)$-en abiadura x-rekiko $v(x) = y'(x)$ da. $y(x)$ funtzioaren batazbesteko abiadura $[a, b]$tartean honako hau da.

$$v_m = \frac{y(b) - y(a)}{b - a}$$

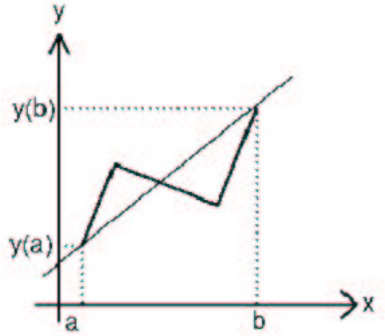
2. (Batazbesteko balioaren teorema) $y(x)$ futzioa jarraitua baldin bada $[a, b]$ tartean eta deribagarria (a, b) tartean,orduan, $\exists z \in (a, b)$ non $y(x)$-ren abiadura batezbestko balioa den, hau da $y'(z) = (y(b) - y(a))/(b - a)$. Horren esan nahia grafikoki $z \in (a, b)$ puntu dago non ukitzailea eta $(a, y(a))$ $(b, y(b)$ pasatzen den ebakitzailea paraleloak diren. (2) irudiko adierazpen grafikoan, baldintza hori betetzen duten bi puntu daude z_1 eta z_2



Irudia 2: (2) ariketaren adierazpena

Ebazpena

Batazbesteko teoremaren balditzaren bat betetzen ez bada, orduan ezin dugu zihurtatu tesia betetzen denik. (3) irudian adierazitako funtzioa jarraitua da baina ez deribagarria eta ez dago $z \in (a,b)$ punturik $y'(z) = (y(b) - y(a))/(b-a)$ betetzen duena



Irudia 3: (4) ariketaren adierazpena

Ariketaren kasuan arrazoizkoa dirudi hipotesiak betetzen direla esatea, $y(x)$ jarraitua $[a,b]$-n eta y deribagarrria (a,b)-n, desplazamendu fisikoaz ari garelako. Beraz batazbesteko teorema aplikatuz $\exists z \in (a,b)$ non $E'(z) = 84$ den.

3 Ebazpena. Erlazionatutako emaitzak

1. Epe luzerako mozkina lineala izatea matematikoki, $B(x)$ funtzioak asintota zeiharra duela esatea da, asintota $y = ax + b$ erakoa dela $x \to \infty$ duenean.

2. a eta b koefizienteak era honetan lortzen ditugu:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} \\ b &= \lim_{x\to\infty} y(x) - a \cdot x \end{aligned}$$

Ebazpena

Gure kasuan

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{x(x+3)} = 2 \\ b &= \lim_{x\to\infty} y(x) - a\cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{x+3} - 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{-7x}{x+3} = -6 \end{aligned}$$

Beraz analisigileak arrazoia du, epe luzerako mozkina $y = 2x - 6$ funtzio linealearen antzerakoa izango da.

4 Ebazpena. Erlazionatutako emaitzak

1. A multzo bat izanik, u A-ren elementua baldin bada, u elementua A-ren barne dagoela esaten dugu eta $u \in A$ eran adierazten dugu.

2. A eta B bi multzo baldin badira, A-ren elementu guztiak B-b daudenean A B-ren azpimultzoa dela edo B-ren baitan dagoela esaten dugu eta $A \subset B$ eran adierazten dugu.

3. A eta B multzoen bilkura, $A \cup B$ eran adierazita, bi multzoetatik gutxienez baten dauden elementuez osatutako multzoa da.

4. A eta B multzoen ebakidura, $A \cap B$ eran adierazita, multzo bietan dauden elementuek osatzen dute multzoa da.

Ebazpena

1. $\forall \epsilon > 0 \quad \exists y \neq a \mid y \in (a-\epsilon, a+\epsilon) \cap A$
2. (a) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\} = A$
   (b) $\{4\}$