

9. Kapitula

Ekuaizio diferentzial arruntak

9.1 Arazoaren aurkezpena

Dakigun bezala, naturako fenomenoak elkarren menpekoak diren aldagai batzuei lotuta daude (distantziak, altuerak, mailak, dentsitateak, indarrak, tenperaturak, etab.); horregatik, x aldagai batek aldaketaren bat jasaten badu, bere menpekoak diren beste aldagai guztiek ere, $y_1, y_2, y_3, \dots$ aldaketaren bat jasan dezakete. Gogoratu Kalkulu infinitesimalaren helburua, menpeko x aldagaiaren eraginez suerta daitezkeen y aldagaiaren aldaketak aztertzean datzala. Zientziak eta ingeniartzak, benetako fenomeno bat aztertzen dutenean, lehendabizi benetan garrantzitsuak diren aldagaiak zehazten dituzte, eta gero, beraien arteko menpekotasunak aurkitzen saiatzen dira: hau da, fenomenoaren arazoitu ahal izango duen eredu matematiko bat aurkitzen saiatzen dira. Dagoeneko erabili dituzu benetako fenomenoak aztertzeko eredu matematiko batzuk: Newton-en bigarren legea ($F = ma$), Ohm-en legea ($R = V/I$) eta abiadura konstantean ibilitako espazio-luzera ($E = Vt$).

Bestalde, badakigu y , x -en menpeko aldagaia bada, $y(x)$ funtzioaren deribatuak (x -ekiko), y -ren abiadura aldaketa (x -ekiko) adierazten duela eta $y'(x) = dy/dx$ bidez adierazten dela. Modu berean, y -ren x -ekiko deribatuak abiaduraren abiadura adierazten du, hau da, y -ren azelerazioa x -ekiko: $y''(x) = d^2y/dx^2$.

Zientzian eta ingeniartzan interesgarriak diren naturako fenomeno asko, ekuazio bat edo gehiagoren bidez adieraz daitezke; ekuazio horietan, bai magnitudeak eta baita beraien abiadura aldaketak ere agertzen dira. Hau da, $y(x), y'(x), y''(x), \dots$ agertzen dira. Ikus ditzagun adibide batzuk:

1. Solido baten erorketa libre Lehen aipatu dugun Newton-en bigarren legean $y(t)$ magnitude bat agertzen da; magnitude honek m masa konstanteko gorputz batek, $F(t)$ indar baten eraginpean, egindako distantzia adierazten du. $y(t)$ funtzioaren azelerazioa t -rekiko $a(t) = y''(t)$ denez, gorputzaren mugimendu lerrozuzena adierazten duen eredu matematikoa hurrengo da: $F(t) = my''(t)$.

Demagun, gorputza libre erortzen dela, grabitatearen indarrarekin soilik. Kasu honetan, $F = mg$, non g grabitateak eragindako azelerazioa den ($g = 9.8m/s^2$). $y(t)$ aldagaiak, gorputzak egindako distantzia adierazten du, erortzen hasi den momentutik ($t = 0$) t momentu arte. Beraz:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = g \quad (1)$$

Aurreko ekuazioa, gorputz baten erorketa aztertzeko erabili daitezkeen eredu matematiko posible bat izan daiteke. Eredu hori oso sinplea da, eta hobetu dezakegu, aireak gorputzaren erorketan eragiten duen erresistentzia indarra ere kontutan hartuz.

Adibidez, hipotesi bezala, pentsa dezakegu airearen erresistentzia indarra momentu bakoitzeko abiadurarekiko proportzionala dela. Horrela, erorketa librearen fenomenoaz zertaz, bigarren eredu konplexuago bat lortzen dugu:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - k \frac{dy}{dt} \quad (2)$$

Ikusitako bi eruedetan interesatzen zaigun magnitudea, $y(t)$, agertzen da, eta baita $y(t)$ -ren deribatuak denborarekiko. Bi ekuazioak ekuazio diferentzial arruntan adibideak dira. "Arrunta" hitzak, ekuazio mota hauetan, aldagai bakarrarekiko deribatuak agertzen direla esan nahi du (gure kasuan, t aldagaia). Hau da, ekuazio diferentzial arruntak, y magnitude jakin bat, y -ren aldaketa (x aldagaiarekiko) batekin erlazionatzen duten ekuazioak dira. Hemendik aurrera, ekuazio diferentzial arruntak EDA siglen bidez adieraziko ditugu.

Erorketa librearen fenomenoaren azterketa ez da bukatzen EDA baten bidez zehaztu dugun eredu matematikoarekin, noski. Benetan interesatzen zaiguna, EDA-ren soluzioa aurkitzea da, hau da, zehaztea zein funtzio(k) betetzen du(t)en EDA hori. Lehenengo adibide sinplea hartuko dugu; nahikoa da bi aldiz integratzea ondokoa lortzeko:

$$y''(t) = g \Rightarrow y'(t) = gt + K_1 \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + K_1t + K_2 \quad (3)$$

Soluzio hori aztertuz, lehenengo ondorioa lortzen dugu: EDA batek ez du soluzio bakarra, baizik eta bere soluzioa funtzio familia (multzo) bat da. (3) funtzio multzoa (1) EDA-ren soluzioa da. K_1 eta K_2 edozein balio izan daitezke. K_1 -eri eta K_2 -ri balio zehatzak emanaz, (3) multzoko funtzio ezberdinak lortzen ditugu. Bi konstante hauek ba al dute esanahi fisikorik? Bai. K_1 -ek gorputzaren abiadura adierazten du $t = 0$ denean (hasierako abiadura); K_2 konstanteak, berriz, $t = 0$ unean gorputzak egindako ibilbidearen luzera adierazten du.

Beraz, nahiz eta EDA-ko ez eduki soluzioa den funtzio bakarra, baldintza batzuk gehitu ondoren soluzioa bakarra izan daiteke. Adibidez, demagun gorputza gure altuerara 3 m/s -ko abiaduraz iristen dela, eta 6 m egin dituela. Orduan, (3) funtzio multzotik, baldintza horiek betetzen dituen soluzio bakarra aukeratzen dugu:

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + 3t + 6 \quad (4)$$

(4) soluzioari, (3)-ren ebazpen partikularra deitzen zaio. Soluzio partikularra lortzeko ezarri ditugun baldintzei ($y(0) = 6, y'(0) = 3$), hasierako baldintzak deitzen zaie;

hau da, $y(t)$ ebazpenak bete behar dituen baldintzak dira, t -ren balio jakin baterako (gure kasuan, $t = 0$ izan da). Beste baldintza mota batzuetan ere pentsa dezakegu (3) familiaren soluzio bat aukeratzeko orduan. Adibidez, demagun $t = 1$ unean, gorputzak $y = 9.9 \text{ m}$ egin dituela, eta $t = 2$ unean, berriz, $y = 26.5 \text{ m}$; hau da:

$$\begin{aligned} y(1) &= 9.9 \\ y(2) &= 26.5 \end{aligned} \quad (5)$$

Baldintza hauei inguruko baldintzak deitzen zaie, denbora momentu ezberdinetako baldintzak direlako. (5) baldintzak betetzen dituen (3) familiako soluziorik existitzen den aztertzeke:

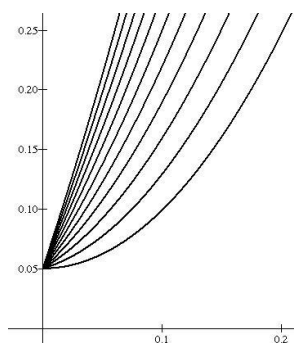
$$9.9 = 4.9 + K_1 + K_2 \wedge 26.5 = 19.6 + 2K_1 + K_2 \Rightarrow K_1 = 2 \wedge K_2 = 3$$

$$y(t) = 4.9t^2 + 2t + 3$$

Ezarritako baldintzen arabera, soluzio bat baino gehiago egon daitezke. Demagun, adibidez, $y(0) = 0.05$ betetzen duten (3)-ren soluzioak bilatu nahi ditugula. Kasu horretan:

$$y(t) = 4.9t^2 + K_2t + 0.05 \quad (6)$$

(3)-ren azpi-familia bat da. Aztertu ondorengo irudia, (6) funtzioen grafiko batzuk marraztu dira, K_2 -ri balio ezberdinak emanez.



9.1 Irudia: (6) funtzioen grafiko batzuk

9.1. Ariketa Zehaztu $y'(0) = 0.3$ betetzen duten funtzioez osatutako (3) soluzioen azpi-familia. Marraztu funtzio horietako batzuen grafikoak.

9.2. Ariketa $y''(x) = x$ EDA emanda, aurkitu hurrengo hasierako baldintzak betetzen dituen $y(x)$ soluzioa: $y(0) = 1, y'(0) = 2$. Aurkitu, baita ere, hurrengo inguruko baldintzak betetzen dituen soluzioa: $y(0) = 1, y(1) = 1/6$. Existitzen al da $y(0) = 1, y(1) = 19/6, y(-1) = -7/6$ baldintzak betetzen dituen soluziorik? Planoko hiru puntu emanda, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, zein baldintzetan existituko da lehenengo bietatik pasatzen den soluzio bakarra? Eta hiruretatik pasatzen dena?

9.3. Ariketa $y'(x) = k$ EDA emanda, bere soluzioaren adierazpen grafikoa egin, eta zehaztu koordenatu planoko edozein puntutik, (x_0, y_0) , pasatzen den soluzio partikularra.

9.4. Ariketa Orain arte ikusi dugunarekin, prozedura bakarra daukagu $y'(x) = f(x), y''(x) = f(x), \dots, y^n(x) = f(x)$ moduko EDA-en soluzioak kalkulatzeko. Esplikatu $y^n(x) = f(x)$ EDA-ren soluzioa kalkulatzeko erabili daitekeen metodoa, $f(x)$ funtzio ezagun bat izanik. Nolakoa izango da soluzioa? Zenbat konstante agertuko dira bertan? Pentsa ezazu modu horretako EDA batean eta aplikatu aurreko prozedura bere soluzio orokorra kalkulatzeko.

Erorketa librearen fenomenoaz aztertzen jarraituko dugu. Fenomenoa deskribatzeko (1) ereduak aukeratuz gero, ikusi dugu $y(t)$ ibilbidea aurkitzeko gai garela (ikus (2) ekuazioa), eta soluzio orokorrean agertzen diren bi konstanteei esanahi fisikoa emateko gai, eta baita ibilbide posibleen grafikoa marrazteko ere.

Baina, gogoratu, fenomeno bera deskribatzeko bigarren eredu bat ere ikusi dugula; eredu honetan, kontutan hartzen genuen, gorputzak, erortzean airearekin duen marruskadura indarra. Suposatu genuen, indar hau gorputzaren abiadurarekiko proportzionala zela une bakoitzean, eta horren bidez, eredu berri bat eraiki dugu:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - k \frac{dy}{dt} \quad (7)$$

EDA honen soluzio orokorra aurkitzeko, lehen erabilitako prozedura bera jarrai dezakegu; hau da, ekuazioaren bi aldeak integratuz:

$$my' = mg \int dt - ky \Rightarrow my' = mgt - ky + K_1 \quad (8)$$

Ekuazio hau, oraindik EDA da, $y'(t)$ funtzioa agertzen baita. Berriz integratuko ditugu 8 ekuazioaren bi aldeak:

$$my = \frac{1}{2} mgt^2 - k \int y dt + K_1 t + K_2 \quad (9)$$

Ezin dugu jarraitu. Ezin dugu kalkulatu

$$\int y dt$$

ez baitugu $y(t)$ ezagutzen; hori da kalkulatu nahi duguna, hain zuzen. Adibide honekin, ikus daiteke EDA guztiak ezin daitezkeela integrazioarekin soilik ebatzi. Badaukagu, beraz, konpondu beharreko arazo berri bat: EDA-en soluzioak kalkulatzeko metodoak garatu beharko ditugu; baina ikusi dugunez, ez dira nahikoak izango jatorrizko funtzioak kalkulatzeko dituzten metodoak.

2. Malgukiak eta zirkuitu elektrikoak

Lehenengo adibidean ikusi dugu nola gorputz baten erorketa librearen fenomeno (gravitate indarra eta airearen marruskadura indarra kontutan hartuz soilik) EDA bat eta hasierako bi baldintzen bidez modelizatu daitekeen:

$$my'' + ky' = mg$$

$$y(0) = y_0$$

$$y'(0) = v_0 \quad (10)$$

non:

m : gorputzaren masa

k : gorputzaren menpekora den proportzionaltasun konstantea

y_0 : $t = 0$ momentuan egindako ibilbidea

v_0 : $t = 0$ momentuko abiadura

Aipagarria da beste fenomeno fisiko garrantzitsu batzuk ere (10)-aren antzeko eredu baten bidez aztertu daitezkeela. Eta bitxiena da posible dela fenomeno hauek erorketa librearekin zerikusirik ez izatea. Modu horretako bi fenomeno aztertuko ditugu: malguki baten oszilazio libreak eta zirkuitu elektrikoak. Ikusi malgukiaren irudia (2a); malgukitik m masako gorputz bat zintzilikatuta dago, orekan. Gorputzetik beheraka tiratzen badugu, malgukia d distantzia bateraino luzatzen da (2b irudia). Gorputza askatzen badugu, oszilatzen hasiko da. $F(t)$ indar aldakor bat ere eragin diezaiokegu. Baldintza horietan, gorputzaren oszilazioak aztertzeko eredu bat hurrengoa da:

$$my'' + ay' + ky = F(t)$$

$$y(0) = d$$

$$y'(0) = v_0 \quad (11)$$

non:

$y(t)$: gorputzaren posizioa t momentuan

m : gorputzaren masa

a : esekidura konstantea (adibidez, gorputzak oszilatzen duen ingurumena airea, ura edo beroa barreiatzeko malgukia egon daitekeen olioren bat izan daiteke; azken kasu horretan, a konstante ezberdinak izango genituzke).

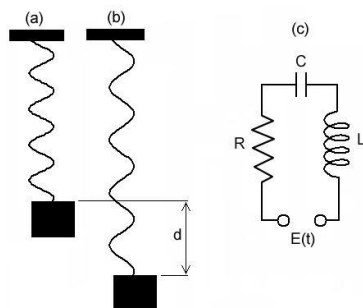
k : malgukiaren ezaugarrien menpekora den konstantea. Adibidez, malgukia 20cm luzatzen bada 10 Kg -ko masa batekin, $k = 10/20 = 0.5\text{ Kg/cm}$

d : hasierako luzera

v_0 : hasierako abiadura

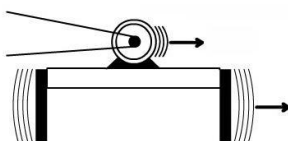
$F(t)$: t une bakoitzean gorputzari eragiten dion indarra

Ohartu, (11) ereduari, 2 ordenako EDA, (10) eredukoaren oso antzekoa dela. (10)-ean ez da agertzen ky gaia, baina bere gai askeak (eskuinekoa) (11)-aren esanahi fisiko bera du: gorputzean eragiten duen indar bat da. (10) ereduari, indar hori konstantea da ($F(t) = mg$); eta (11)-ean berriz, aldakorra izan daiteke. Gainera, (11)-ren hasierako baldintzek bi ereduari esanahi fisiko bera dute. (11) ereduari sistema mekaniko bibradore askotan agertzen da (makinen zati mugikorrak, zubien bibrazioak autoen eraginez, etb.). 3 irudian mugimenduan dagoen motor bat ageri da; motorrak bibratu egiten du eta bere bibrazioa instalatuta dagoen sistema osora igortzen du.



9.2 Irudia: (a) eta (b) malkugi baten luzamendua; (c) zirkuitua

11 ereduak, zirkuitu elektriko batzuk aztertzeke ere balio du; 2c irudikoa, adibidez. Zirkuitu horretan L induktantzia bat (Henrio-tan neurtuta), R erresistentzia bat (Ohmio-



9.3 Irudia: mugimenduan dagoen motorra

tan neurtuta) eta C kapazitate bat (Faradio-tan neurtuta) seriean konektatu dira, $E(t)$ tentsio aldakor batekin (Voltio-tan neurtuta). Baldintza hauetan, zirkuituan dabilen $I(t)$ intentsitatearen balioa kalkulatzeko ondorengo eredua erabili daiteke:

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

$$I(0) = i_0$$

$$I'(0) = a_0 \quad (12)$$

Ohartu, eredu horretan EDA-ren gai askea $E'(t)$ dela, hau da, $E(t)$ -ren abiadura denborarekiko. (12) eredua (11)-renaren berbera da. Baina, zer adierazten dute, kasu honetan, hasierako baldintzetan dauden $I(0)$ eta $I'(0)$ balioek? Fenomeno fisiko honetan, ez daude gorputzen mugimenduak, karga elektrikoak baizik. $q(t)$ kondentsadorearen karga bada t une bakoitzean, orduan $q'(t) = I(t)$ betetzen da. $I(0)$, $t = 0$ hasierako momentuan zirkuituan dagoen intentsitatearen balioa da, eta $I'(0)$, berriz, intentsitatearen abiadura aldaketa da, hasierako momentu horretan.

Hala ere, (11) eta (12) ereduetan agertzen diren EDA-k ebazteko, (10) eredukoa ebazteko izan dugun arazo bera dugu: ezin dugu ebatzi integrazioaren bidez, soilik. $y(x)$ EDA-ren soluzioa baldin bada, ezin dugu ondorengo eragiketa egin:

$$\int y(x)dx$$

$y(x)$ ez baitugu ezagutzen (hori da kalkulatu nahi duguna). Lehen esan dugun bezala, konpondu behar dugun arazoa hau da: EDA ezberdinen soluzioak kalkulatzeko metodoak garatzea. Eta bestalde, edozein teoria matematikoan garrantzitsua den arazo bati ere soluzioa aurkitu behar diogu: existentzia eta bakartasuna. Hau da, zein baldintzetan ziurtatu dezakegu EDA-ren $y(x)$ soluzio bakar bat existitzen dela? Gai honetan, arazo hauei erantzuna aurkituko diegu. Oraingoz, defini ditzagun EDA-ren soluzioen inguruan aurkitu ditugun bi kontzeptuak:

9.1. Definizioa n ordenako EDA, $y(x)$ funtzioaren eta bere deribatuen $y'(x), y''(x), \dots, y^n(x)$ arteko erlazioa ezartzen duen ekuazioa da. Ondorengo itxura izango du EDA batek orokorki:

$$F(x, y, y'(x), y''(x), \dots, y^n(x)) = 0 \quad (13)$$

9.2. Definizioa (13) ekuazioa egiaztatzen duen $y(x)$ edozein funtzio, EDA-ren soluzioa dela esaten da.

9.5. Ariketa Frogatu $y = \sin x, y = \cos x, y = 2 \cos x - 3 \sin x$ funtzioak $2y'' + y = 0$ EDA-ren soluzioak direla. Frogatu, orokorrean, $y = K_1 \cos x + K_2 \sin x$ familiako edozein funtzio EDA horren soluzioa dela.

9.6. Ariketa $y = x^2 + Kx$ funtzioen familia emanda, K konstante erreala izanik:

1. Funtzio-familiaren adierazpen grafikoa egin.
2. Planoko edozein (x_0, y_0) puntu emanda, ziurtatu al daiteke puntu horretatik pasatzen den familiako kurbaren bat existitzen dela? Bakarra al da kurba hori?
3. Aurkitu EDA bat bere soluzioa funtzio-familia hori izango dena.

9.7. Ariketa Naftalinazko esfera batek bolumena galtzen du lurrinketaren ondorioz; suposatzen dugu lurrinketa-abiadura bere azalerarekiko proportzionala dela. Ikus dezakegun bezala, esferaren diametroa 2 cm-tik 1 cm-ra txikitu da lau hilabetetan. Eraiki esferaren diametroa (momentu bakoitzean) kalkulatzeko eredu matematikoa. Ebatzi problema, baina orain, suposatu lurrinketa-abiadura bere azaleraren karratua-rekiko proportzionala dela.

9.8. Ariketa Substantzia porotsu bat likido batez hezetuta dago eta airean dago; substantzia horrek bere hezetasuna galtzen du; demagun hezetasunaren galera-abiadura substantziak duen likidoaren edukierarekiko proportzionala dela. Eraiki substantziak (momentu bakoitzean) duen likido kantitatea kalkulatzeko eredu matematikoa bat.

9.2 EDA baten soluzioaren lehenengo hurbilketa

Arazoa sinplifikatzeko, lehendabizi 1.go ordenako EDA-k aztertuko ditugu, eta ondorengo itxura dutenak, zehazki:

$$y' = F(x, y) \quad (14)$$

Hau da, EDA-en kasu partikular bat aztertuko dugu: $y'(x)$, x eta y -ren menpean askatu daitezkeen 1.go ordenako ekuazioak. Itxura hori duten (edo itxura horretara murriztu daitezkeen) EDA-en adibide batzuk hurrengoak dira:

$$y' = x^2 + y^2$$

$$y' = xy + 1$$

$$xy' = 2y + 3xy'$$

Hurrengo EDA-k, aldiz, 1.go ordenakoak dira, baina ezin dira 14-ko itxuran idatzi:

$$y' = x + \exp^{xy'}$$

$$\sin(xy') = y' + xy$$

$$\ln(x + y') = 2 - 3x + y'$$

Zergatik aztertu nahi dira (14) itxurako EDA-k? Ondorengo arrazoiengatik:

1. Egoera errealean, normalean (14) itxura duten EDA-k agertzen dira. Adibidez, 5. eta 6. ariketetako EDA-k modu horretakoak dira.
2. (14) itxurako EDA-k ebazteko hainbat metodo dago; 3. atalean ikusiko ditugu metodo hauek.
3. 4. atalean ikusiko dugun bezala, baldintza jakin batzuekin, posible da (14) itxurako EDA-ren soluzio bakar baten existentzia ziurtatzea ((x_0, y_0) puntu zehatz batetik pasatzen den soluzioa, hain zuzen); hau da, baldintza jakin batzuekin ziurtatu daiteke problemaren soluzio bakar bat existitzen dela:

$$y' = F(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (15)$$

Kasu batzuetan (15) problemaren soluzio bakar hori zehazki kalkulatzeko aukera izango dugu, eta bestetan, soluzio hurbilduak kalkulatu beharko ditugu; soluzio hurbildu horiek zenbakizko metodoen bidez kalkulatu ditugu, 5. atalean ikusiko dugun bezala.

Baina, orain arte dakigunarekin, (15) problemaren $y(x)$ soluzioa ikuspuntu ezberdinetatik azter dezakegu, nahiz eta oraindik ez jakin nola kalkulatu $y(x)$. Atal honetan (15)-en soluzioa aztertzeko erabiliko ditugun ideiak hurrengoak dira:

$y(x)$ -en deribatuen azterketa. Ohartu (15) problemako EDA-k $y'(x)$ -ren adierazpena ematen digula zuzenean. Honek $y(x)$ -en gorakortasuna / beherakortasuna aztertzeko ideia ematen digu, eta baita, $y(x)$ -i ukitzaila den zuzena $((x_0, y_0)$ puntu bakoitzean) kalkulatzeko ere. Gainera, (15)-eko EDA-tik abiatuta, posible da $y''(x)$ -en adierazpena lortzea, eta beraz, $y(x)$ -en ahurtasuna/ganbiltasuna aztertu ahal izango dugu horrekin.

$y(x)$ -en hurbilketa Taylor-en polinomioen bidez. (15)-eko EDA-tik abiatuz, $y'(x_0)$ lortu daiteke, eta inplizituki deribatuz, $y''(x_0), y'''(x_0)$, etab. ere bai. Beraz, posible da dagoeneko $y(x)$ hurbiltzea x_0 -ren inguruneke polinomio baten bidez. Hemen daukagu berriz, gure Taylor-en teorema garrantzitsua, kasu honetan, (15) problemaren $y(x)$ soluzioari buruzko informazioa emateko!

Azter ditzagun xehetasun gehiagorekin bi aukera horiek.

9.2.1 $y(x)$ -en deribatuen azterketa

Hurrengo EDA-ren soluzioen jokaera aztertuko dugu:

$$y' = x^2 y \quad (16)$$

Dakigunez, $y(x)$ -en gorakortasuna/beherakortasuna $y'(x)$ -ren zeinuarekin erlazionatuta dago, hau da:

$y(x)$ gorakorra (a, b) tartean $\Leftrightarrow y'(x) > 0$ (a, b) tartean

$y(x)$ beherakorra (a, b) tartean $\Leftrightarrow y'(x) < 0$ (a, b) tartean

Kasu honetan, $y'(x) = x^2 y$ funtzioaren zeinua aztertu beharko dugu:

$$y'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 y > 0 \Leftrightarrow y > 0$$

$$y'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 y < 0 \Leftrightarrow y < 0$$

Beraz, $y(x)$ (16) EDA-ren soluzio bat bada, $y'(x) > 0$ betetzen den $x \in (a, b)$ tartean $y(x)$ funtzioa gorakorra da. Eta $y'(x) < 0$ betetzen den $x \in (a, b)$ tartean berriz, beherakorra. Hau da, grafikoa goiko planoerdian duen 16 EDA-ren $y(x)$ soluzio bat, gorakorra izango da; eta bere grafikoa beheko planoerdian badu, berriz, $y(x)$ beherakorra.

Azter dezagun orain, $y(x)$ -en ahurtasuna/ganbiltasuna. Horretarako $y''(x)$ -en zeinua aztertu beharko dugu:

$y(x)$ ahurra da (a, b) tartean $\Leftrightarrow y''(x) > 0$ (a, b) tartean

$y(x)$ ganbila da (a, b) tartean $\Leftrightarrow y''(x) < 0$ (a, b) tartean

$y''(x)$ kalkulatzeko (16) ekuazioa inplizituki deribatuko dugu:

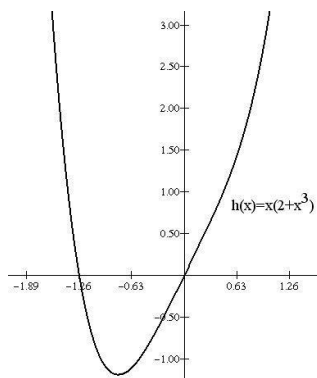
$$y''(x) = \frac{d}{dx}(x^2 y) = 2xy + x^2 y' = yx(2 + x^3) \quad (17)$$

Beraz, $y''(x)$, $y(x)$ faktoreen eta $h(x) = x(2 + x^3)$ funtzioaren biderkaduraz osatuta dago. Azter dezagun bere zeinua:

$y''(x) > 0 \Leftrightarrow y(x)$ eta $h(x)$ funtzioek zeinu bera dute

$y''(x) < 0 \Leftrightarrow y(x)$ eta $h(x)$ funtzioek aurkakoko zeinua dute

$h(x)$ -en grafikoak, funtzioa positiboa edo negatiboa deneko tartekak zehazteko balio digu. Ikusi 4 irudia. $h(x)$ -en erroak: $x = 0, x = -(2)^{1/3} \cong -1.26$. Beraz:



9.4 Irudia: $h(x)$ -en grafikoa

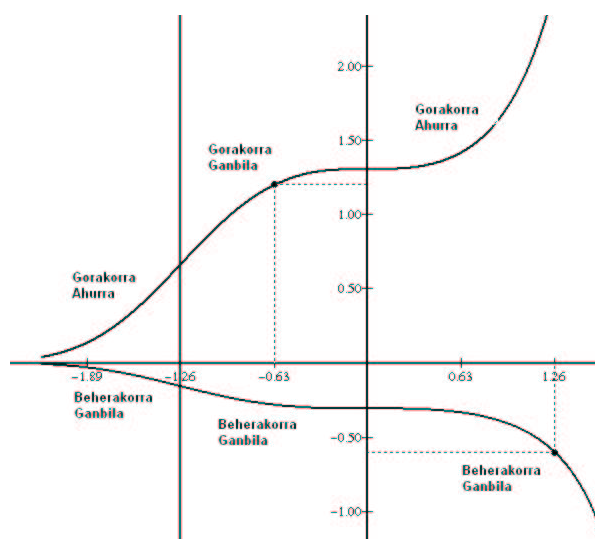
$$h(x) = x(2 + x^3) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1.26) \cup (0, \infty)$$

$$h(x) = x(2 + x^3) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1.26, 0)$$

Hurrengo taulak $y(x)$ funtzioaren ahurtasuna/ganbeltasuna erakusten digu:

x -en tartea	$y(x)$ -en tartea	$y(x)$ -en ahurtasuna/ganbeltasuna
$x \in (-\infty, -1.26)$	$y \in (0, \infty)$	ahurra
$x \in (-1.26, 0)$	$y \in (0, \infty)$	ganbila
$x \in (0, \infty)$	$y \in (0, \infty)$	ahurra
$x \in (-\infty, -1.26)$	$y \in (-\infty, 0)$	ganbila
$x \in (-1.26, 0)$	$y \in (-\infty, 0)$	ahurra
$x \in (0, \infty)$	$y \in (-\infty, 0)$	ganbila

Ohartu $x = -1.26$ eta $x = 0$ puntuetan $y(x)$ -en ahurtasuna/ganbeltasuna aldatzen dela, beraz, inflexio puntuak dira. 5 irudian, aurreko baldintzak betetzen dituzten bi funtzio posibleren grafikoak agertzen dira. Goiko planoerdian dagoen grafikoa $(-0.63, 1.2)$ puntutik pasatzen da eta beheko planoerdian dagoena, berriz, $(1.26, -0.6)$ puntutik. Ezin dugu ziurtatu, noski, bi funtzio hauek (16) EDA-ren soluzioak izango direnik; soilik esan dezakegu, beherakortasun/gorakortasuneko eta ahurtasun/ganbeltasuneko baldintzak, (16) EDA-ren $y(x)$ soluzioak bezala betetzen dituztela.



9.5 Irudia: bi funtzio posibleren grafikoak

Bestalde, $y' = F(x, y)$ EDA-k, $y(x)$ funtzioaren zuzen ukitzailea kalkulatzeko aukera ematen digu (x_0, y_0) puntu bakoitzean. Zuzen horren malda $F(x_0, y_0)$ denez, bere ekuazioa hurrengoa izango da:

$$y - y_0 = F(x_0, y_0)(x - x_0)$$

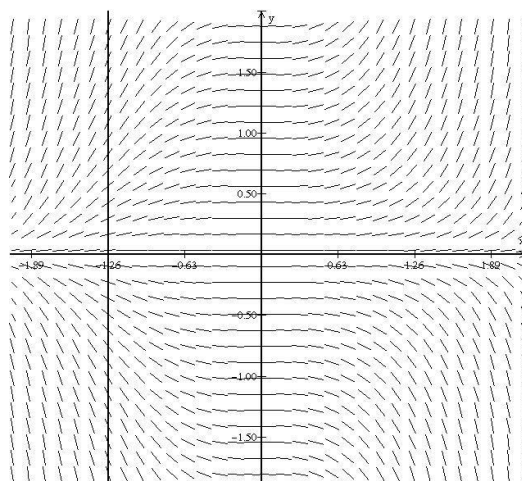
16 EDA-ren kasuan, (x_0, y_0) puntu bakoitzeko zuzen ukitzailearen ekuazioa hauxe izango da:

$$y = y_0 + x_0^2 y_0 (x - x_0)$$

Adibidez, 5 irudian agertzen diren puntuetan ($(-0.63, 1.2)$ eta $(1.26, -0.6)$), zuzen ukitzaileen ekuazioak

$$y = 1.2 + 0.476(x + 0.63) \text{ eta } y = -0.6 - 0.953(x - 1.26)$$

izango dira, hurrenez-hurren. Orain, eragiketa horiek egiten baditugu XY planoko puntu askorekin, eta bakoitzean, zuzen ukitzaillearen segmentu txiki bat marrazten badugu, EDA-ren soluzioen jokaeraren irudi bat lortuko dugu: $y(x)$ -en malden eremua da. 6 irudian, (16) EDA-ren $y(x)$ -en malden eremua agertzen da.

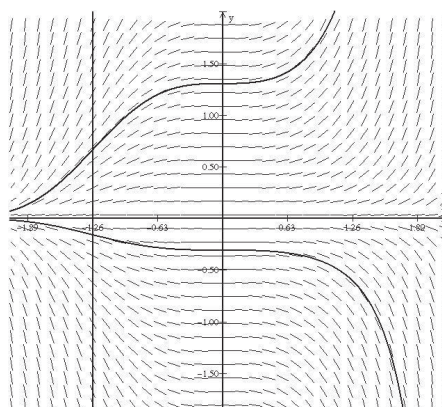


9.6 Irudia: $y(x)$ -en malden eremua

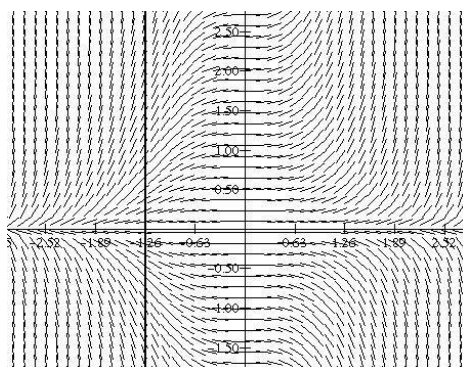
Orain, 6 irudiko malden eremuaren gainean, 5 irudiko bi soluzio posibleen grafikoak marraztuko ditugu. Eraitza 7 irudian dago. Ikus daitekeenez, malda-eremuak soluzio posibleak zehatzago marrazten laguntzen digu (puntu bakoitzeko ukitzailleekin). Malda-eremuak, dentsuagoak izan daitezke, noski, 8 irudian agertzen den bezala:

Ohartu, $y(x)$ -en malda-eremu hauek, (16) EDA-ren soluzioen gorakortasun/beherakortasunari buruzko informazioa ematen digutela. $y(x)$ soluzioen ahurtasun/ganbiltasunari buruzko informazioa lortzeko, $y'(x)$ -en malda-eremua marraz daiteke. $y''(x)$ lortzeko, berriz, nahikoa da (17) inplizituki deribatzea, eta $y''(x) = yx(2 + x^3)$ lortzen da. 9 irudian $y'(x)$ -en malda-eremua dago. Egiaztatu grafiko honetan lortutakoa, aurretik analitikoki lortu genuen emaitzarekin (5 irudia): $y''(x)$ -en ($y'(x)$ -en deribatuaren) zeinua, $x = 0$ eta $x = -1.26$ puntuetan aldatzen da, $y(x)$ funtzioak inflexio puntua duen lekuan, hain zuzen.

Azkenik, begiratu 10 irudia; (16) EDA-ren soluzioaren beste aukera batzuk marraztu dira (malda-eremuaren gainean). Baina kasu honetan, ukitzaille bakoitzaren segmentuak



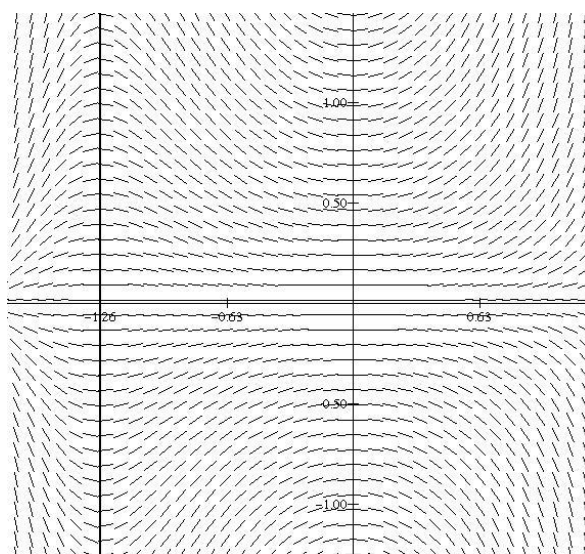
9.7 Irudia: aurreko bi grafikoak malden eremuan



9.8 Irudia: malda-eremu dentsuagoa

luzera handiagokoak marraztu ditugu.

Ohartu, eremu ahurretan, zuzen ukitzailea beti funtzioaren azpitik geratzen dela, eta eremu ganbiletan, berriz, ukitzailea funtzioaren gainetik. Gogoratu zehazki horiexek direla ahurtasuna/ganbiltasuna definitzen dituzten baldintza geometrikoak.

9.9 Irudia: $y'(x)$ -en malda eremua

9.2.2 $y(x)$ -en hurbilketa Taylor-en polinomioen bidez

Aurreko atalean, (16) problemaren $y(x)$ soluzioaren azterketa kualitatiboa egin dugu, $y(x)$ -ek bete behar dituen propietateak lortu ditugulako. Orain, azterketa analitikoa egingo dugu; eta horren bidez, $y(x)$ soluzioaren hurbilketa bat lortuko dugu, Taylor-en teoremaren laguntzaz. Gogoratuko duzunez, $y(x)$ n ordenaraino deribagarria baldin bada, Taylor-en n ordenako polinomioa $x = a$ puntuan ondorengoa da:

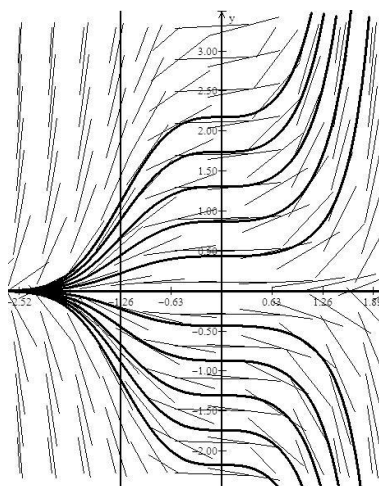
$$P_n(x) = y(a) + y'(a)(x - a) + \frac{y''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{y^n(a)}{n!}(x - a)^n$$

Gure kasuan, $a = x_0$, $y(a) = y_0$, $y'(x_0) = F(x_0, y_0) = x_0^2 y_0$, $y''(x_0) = y_0 x_0 (2 + x_0^3)$. Beraz, kalkula dezakegu dagoeneko Taylor-en 2 ordenako polinomioa, $P_2(x)$. Hala ere, lor dezagun $y'''(x_0)$ -ren balioa $P_3(x)$ kalkulatzeko. (17) inplizituki deribatuz, erraz egiaztatu daiteke:

$$y'''(x) = y(2 + 6x^3 + x^6) \Rightarrow y'''(x_0) = y(2 + 6x_0^3 + x_0^6)$$

Horrela, dagoeneko idatz dezakegu $P_3(x)$ polinomioa:

$$P_3(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3$$



9.10 Irudia: (16)-en soluzioaren beste aukera posible batzuk

$(-0.63, 1.2)$ puntuan, ondorengo lortzen da:

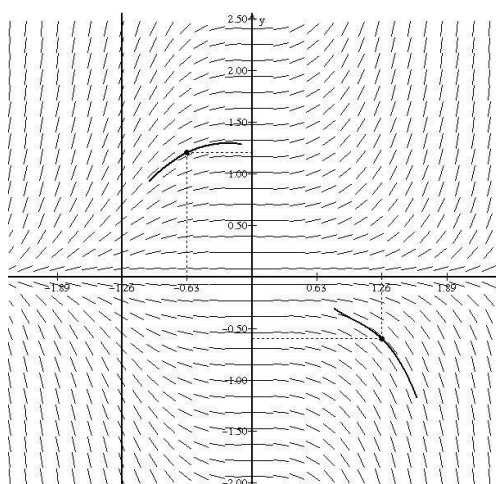
$$P_3(x) = 1.2 + 0.476(x + 0.63) - 0.6615(x + 0.63)^2 + 0.1125(x + 0.63)^3$$

Eta $(1.26, -0.6)$ puntuan:

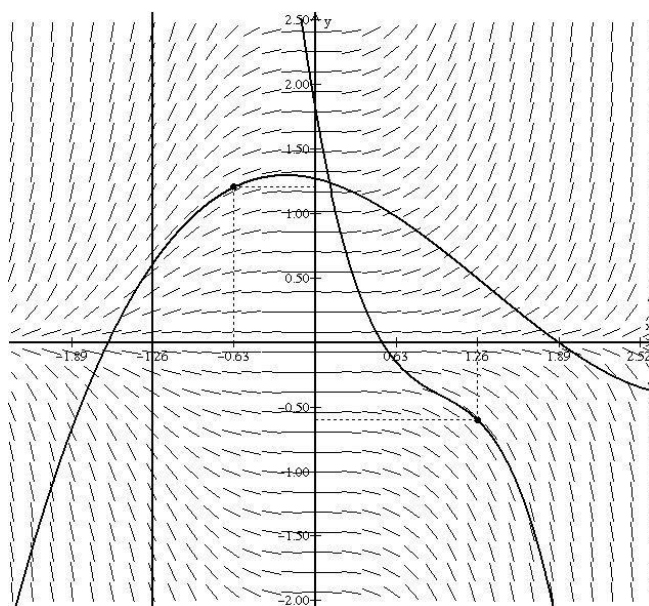
$$P_3(x) = -0.6 - 0.953(x - 1.26) - 1.512(x - 1.26)^2 - 1.8(x - 1.26)^3$$

11 irudian, aurreko bi polinomioen grafikoen zati txikiak daude marraztuta ($y(x)$ -en malda eremuarekin). Ohartu, polinomioen grafikoak eta ukitzaileen segmentu txikiak ia paraleloak direla. Polinomioek eta EDA-en soluzioek oso antzeko jokaera dute.

Hala ere, ez da ahaztu behar, Taylor-en n ordenako polinomioak, funtzioaren hurbilketa lokal bat ematen digula soilik; hau da, $P_n(x)$, $y(x)$ -era hurbiltzen da polinomioa kalkulatu den puntuaren inguruan. Begiratu 12 irudia. Aurreko bi polinomioen grafikoak daude, baina oraingoan tarte handiago bat hartuta. Ikus daitekeenez, polinomioak kalkulatu diren puntuetatik urrun, funtzioek ez dute EDA-ren soluzioen jokaera berbera, hau da, hauen ukitzaileak ez datoz bat malda-eremuko ukitzaileekin.



9.11 Irudia: bi polinomioen grafikoen zatiak



9.12 Irudia: aurreko bi polinomioen grafikoak tarte zabalago bat hartuta

9.2.3 Ekuazio homogeneoak.

$y' = f(\frac{y}{x})$ itxurako ekuazioari homogeneoa deritzo. Ikus ditzagun ondorengo adibideak:

$$y' = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \iff y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad (9.1)$$

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \iff y' = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad (9.2)$$

$$y' = \frac{x}{y} \iff y' = \frac{y}{x} \quad (9.3)$$

Ekuazio hauek ebazteko $\frac{y}{x} = z$ aldaketa egingo dugu. Honen ondorioz, ekuazioan z eta z -ren deribatua x -etik agertuko dira. Hau da:

$$z = \frac{y}{x} \implies y = zx \implies y' = z + xz' \quad (9.4)$$

Hasierako ekuazioan ordezkatzuz:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \implies f(z) = y' = z + xz' \quad (9.5)$$

Beraz:

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x} \quad (9.6)$$

Azkeneko ekuazio hau aldagai banduetako ekuazio diferentziala denez, soluzio orokorra adierazpen hau integratuz lortzen da. Hots:

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \ln|x| + k \quad (9.7)$$

Berdintzaren ezkerreko atalan agertzen den integrala kalkulatu gero, hasierako $z = \frac{y}{x}$ aldagai-aldaketa desegin beharko da.

9.9. Ariketa Metodo hau erabiliz, atalaren hasieran emandako adibideetan dauden E.D.A. ebatzi.

9.2.4 Ekuazio zehatzak.

Idatz dezagun $y' = F(x, y)$ ekuazioa era diferentzialean, hau da:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (9.8)$$

Adibidez:

1.

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2} \iff xydx + (y^2 - x^2)dy = 0 \quad (M = xy, N = y^2 - x^2) \quad (9.9)$$

2.

$$y' = x + y \iff (x + y)dx - dy = 0 \quad (M = x + y, N = -1) \quad (9.10)$$

$(M(x, y), N(x, y))$ bektorea $U(x, y)$ funtzio baten gradientea bada, hau da:

$$U_x(x, y) = M(x, y) \quad (9.11)$$

$$U_y(x, y) = N(x, y) \quad (9.12)$$

orduan ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $U(x, y) = k$ izango da.

Froga dezagun $U(x, y) = k$ itxurako funtzioek E.D.A. betetzen dutela. x -ekiko deribatuz eta katearen erregela aplikatuz ondorengoa lortzen dugu:

$$\frac{d}{dx}U(x, y) = 0 \implies U_x(x, y) + U_y(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \implies \quad (9.13)$$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (9.14)$$

Azkeneko hau froga daiteke gradientearen esanahia erabiliz. Hau da:

1. $U(x, y) = k$, $z = U(x, y)$ gainazalaren maila-lerro bat da.

2. Puntu bakoitzean, $U(x, y)$ -ren gradientea, puntu horretatik pasatzen den maila-lerroare kiko perpendikularra da.
3. Puntu bakoitzean, $U(x, y)$ -ren gradientea, $(U_x(x, y), U_y(x, y))$ bektorea da. (x, y) puntuan bektore perpendikular bat $(-U_y(x, y), U_x(x, y))$ izango da. Beraz, $y(x)$ -ren malda, puntu bakoitzean, $y' = \frac{-U_x(x, y)}{U_y(x, y)}$ izango da. Orduan, $y' = \frac{-M(x, y)}{N(x, y)}$ lortu dugu eta hau gure ekuazio diferentziala da.

Beraz, ekuazio diferentzial honen soluzio orokorra kalkulatzeko $U_x(x, y) = M(x, y)$ eta $U_y(x, y) = N(x, y)$ baldintzak betetzen dituen $U(x, y)$ funtzioa lortu beharko dugu. Baldintza hauek betetzen dituzten ekuazio diferentzialak ekuazio diferentzial zehatzak dira. Soluzio orokorrari funtzio potentziala deritzo.

Adibidez, $3x^2y^2dx + 2x^3ydy = 0$ ekuazioa zehatza da, $U(x, y) = x^3y^2$ funtzioak (9.11) eta (9.12) baldintzak betetzen dituelako. Orduan, ekuazioaren soluzio orokorra $x^3y^2 = k$ izango da. Zer kasuetan existitzen da $U(x, y)$ funtzioa?. Eta $U(x, y)$ existitzen bada nola kalkulatu da?.

$U_x(x, y) = M(x, y)$ baldintza y -rekiko deribatzen badugu $U_{xy}(x, y) = M_y(x, y)$ lortzen dugu eta $U_y(x, y) = N(x, y)$ baldintza x -rekiko deribatuz $U_{yx}(x, y) = N_x(x, y)$ lortzen da.

Demagun $U(x, y)$ funtzioak bigarren ordenako deribatu partzial jarraiak onartzen dituela. Schwartz-en teorema aplikatuz $U_{xy}(x, y) = U_{yx}(x, y)$ berdintza lortzen da. Beraz, (9.8) ekuazioa zehatza izateko beharrezkoa da $M_y(x, y) = N_x(x, y)$ berdintza betetzea.

9.1. Adibidea

$$(y + 2xy^3) dx + (x + 3x^2y^2) dy = 0 \quad (9.15)$$

ekuazioa zehatza da $M_y = 1 + 6xy^2 = N_x$ betzetzen delako.

Orduan, $U(x, y)$ funtzio bat existitzen da non ondorengo baldintzak betetzen diren:

$$U_x = y + 2xy^3 \quad (9.16)$$

$$U_y = x + 3x^2y^2 \quad (9.17)$$

(9.16) berdintza integratuz:

$$U = \int (y + 2xy^3) dx = xy + x^2y^3 + h(y) \quad (9.18)$$

(9.16) berdintza integratzean lortutako integrazio konstantea y -ren menpeko funtzioa izan daiteke; horregatik konstanteari $h(y)$ deitzen diogu. Funtzio hau determinatzeko (9.18) x -rekiko deribatuko dugu eta 9.17 ekuazioarekin berdinduko dugu, hau da:

$$U_y = x + 3x^2y^2 + h'(y) = x + 3x^2y^2 \implies h'(y) = 0 \implies h(y) = k \quad (9.19)$$

$U(x, y) = xy + x^2y^3 + k$ itxurako funtzio guztiek (9.16) eta (9.17) baldintzak betetzen dituzte. Beraz, E.D.A.-ren soluzio orokorra

$$U(x, y) = xy + x^2y^3 = k \quad (9.20)$$

izango da. (9.20) ekuazioa x eta y aldagaien arteko erlazioa da non hautazko k konstantea agertzen den. Hala ere, (9.20) ekuazioan y aldagaia ez da era esplizituan agertzen. Zer adierazten du (9.20) familiak?. k konstante errealearen balio finko bakoitzarako, (9.20) ekuazioak planoko kurba bat adierazten du non (x, y) puntuek (9.20) baldintza betetzen duten.

Hurrengo (9.13) irudian $k = 0.2$ baliorako lortzen den kurba agertzen da. Argi denez, grafikoa ez da $y(x)$ funtzio batena; x bakoitzari y -ren balio bat baino gahiago dagozkio. Adibidez, $x = -2$ abzisa hartuz hiru puntu lortzen dira

$$(-2, 0.753), (-2, -0.102), (-2, -0.650)$$

$x = 0.4$ abzisa hartuz ordea, $(0.4, 0.461)$ puntu bakarra lortzen da.

Kurbako (x_0, y_0) puntua hartuz, badago kurbako zati bat zeina $y(x)$ funtzioaren adierazpena den. $y(x)$ funtzioa E.D.A.-ren soluzioa x_0 puntuaren ingurune batean da.

(9.14) irudian kurbaren lau zati agertzen dira

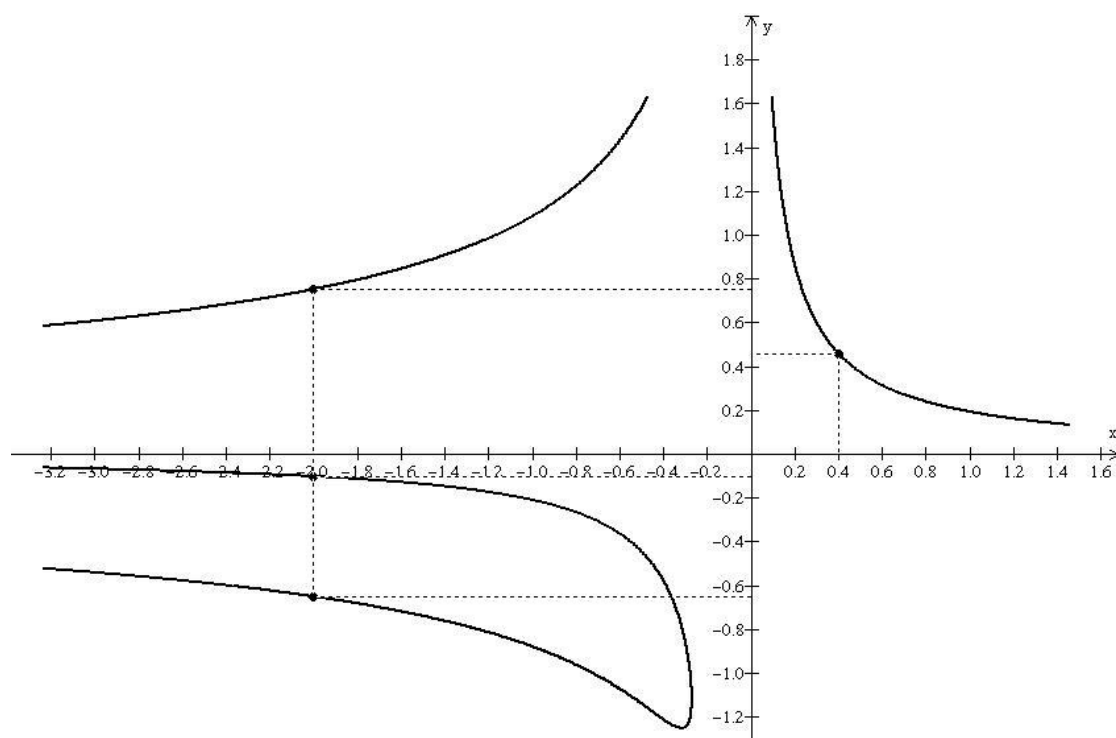
$$(-2, 0.753), (-2, -0.102), (-2, -0.650), (0.4, 0.461)$$

puntuei dagozkiena hain zuzen ere.

Lau zati hauek hainbeste $y(x)$ funtzio desberdinen adierazpen grafikoak dira. Hauetako funtzio bakoitza, puntu bakoitzetik pasatzen den E.D.A.-ren soluzio bakarra da.

9.10. Ariketa Har itzazu (9.20) kurba familia.

1. Planoko hautazko $P(x_0, y_0)$ puntua izanik, badago P puntutik pasatzen den (9.20) familiako kurbaren bat?.



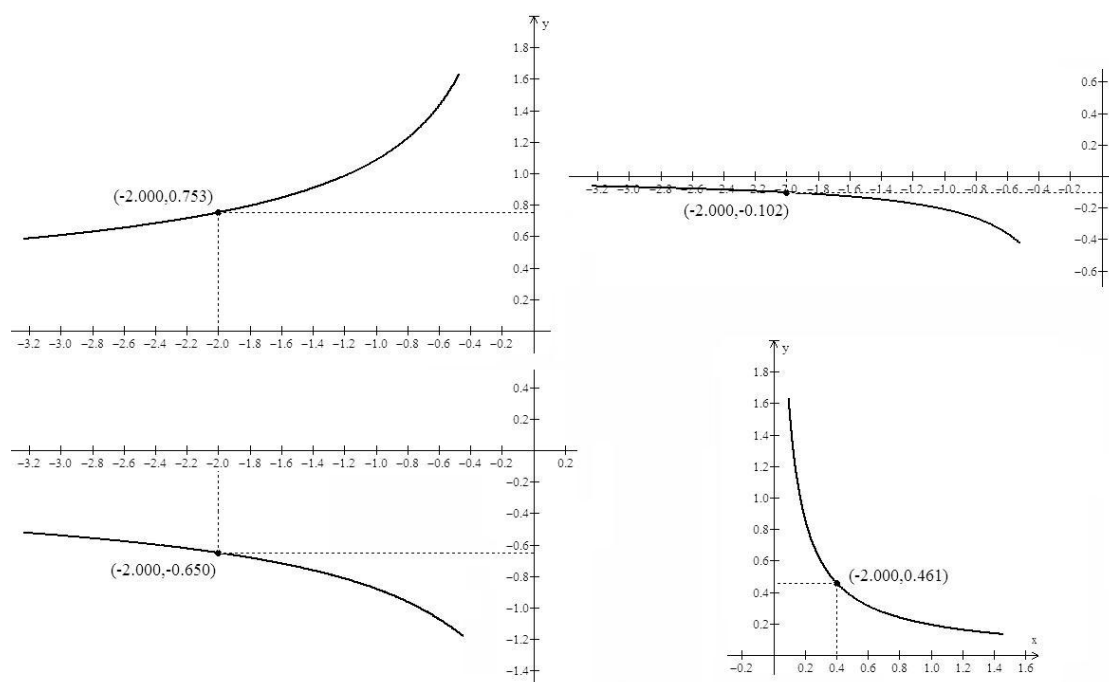
9.13 Irudia: Funtzio implizitua

2. Finka dezagun k konstantearen balioa (9.20) familiako kurba konkretu bat hartzeko. Hautazko x_0 hartzen badugu, badago kurban P punturen bat non bere abzisa x_0 den?.
3. Finka dezagun k konstantearen balioa (9.20) familiako kurba konkretu bat hartzeko. Hautazko y_0 hartzen badugu, badago kurban abzisa hau duen P punturik?.

9.2.5 Zehatz bihur daitezkeen ekuazio diferentzialak. Integrazio-faktorea.

Aurreko atalan ikusi dugu

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (9.21)$$



9.14 Irudia: Kurbaren lau zati

zehatza denean (hau da, $M_y(x, y) = N_x(x, y)$ denean), orduan badakigu bere soluzio orokorra lortzeko erabili behar dugun metodo bat. (9.21) zehatza ez izan arren, batzuetan badago $G(x, y)$ funtzio bat aurkitzerik non (9.21) ekuazioa $G(x, y)$ faktoreaz biderkatzean lortutako ekuazioa zehatza den. $G(x, y)$ funtzioari **integrazio-faktorea** deritzo. Adibidez, hurrengo ekuazioa ez da zehatza:

$$y dx + (x^2 y^2 - x) dy = 0 \quad (9.22)$$

Konproba dezagun:

$$\begin{aligned} M &= y & M_y &= 1 \\ N &= x^2 y^2 - x & N_x &= 2xy^2 - 1 \end{aligned}$$

(9.22) ekuazioa $G(x) = 1/x^2$ integrazio-faktoreaz biderkatuz gero, E.D.A. ondorengo eran

geratzen zaigu:

$$\frac{y}{x^2} dx + \left(y^2 - \frac{1}{x}\right) dy = 0 \quad (9.23)$$

Ekuazio hau zehatza da ondorengo baldintzak betetzen direlako:

$$\begin{aligned} M &= \frac{y}{x^2} \\ N &= y^2 - \frac{1}{x} \\ M_y &= \frac{1}{x^2} = N_x \end{aligned}$$

9.2.4 atalan azaldutako metodoa erabiliz, (9.23) ekuazioaren soluzio orokorra kalkulatu.

Nola kalkula dezakegu (9.21) ekuazioaren integrazio-faktore bat?. Oro har, oso zaila da $G(x, y)$ integrazio-faktore bat aurkitzea. Hala ere, ekuazio batzuetan $G(x, y) = x^n y^m$ itxurako integrazio-faktore bat kalkula daiteke; m eta n determinatzeke dauden konstante errealak dira. Aplika dezagun prozedura hau ondorengo ekuazioari:

$$2y dx + (3y - 2x) dy = 0 \quad (9.24)$$

Ekuazio hau ez da zehatza $M_y = 2$, $N_x = -2$ betetzen direlako. (9.24) ekuazioa $G(x, y) = x^n y^m$ faktoreaz biderkatuz:

$$2y^{m+1} x^n dx + (3y^{m+1} x^n - 2x^{n+1} y^m) dy = 0$$

Ekuazioa zehatza izan behar duenez:

$$M_y = 2(m+1)y^m x^n = N_x = 3nx^{n-1}y^{m+1} - 2(n+1)x^n y^m$$

Eragiketak eginez:

$$2x^n y^m (m+n+2) = 3nx^{n-1} y^{m+1}$$

Simplifikatuz:

$$2x(m+n+2) = 3ny$$

Zeintzu dira n eta m -ren balioak aurreko berdintza edozein x eta y -rekiko betetzeko?. Kasu honetan soluzio bakarra dago: $n = 0$, $m = -2$. (9.23) ekuazioa $G(y) = y^{-2}$ integrazio-faktoreaz biderkatuz gero, ekuazioa ondorengo eran geratzen da:

$$\frac{2}{y} dx + \left(\frac{3}{y} - \frac{2x}{y^2}\right) dy = 0 \quad (9.25)$$

Kalkula ezazu (9.25) ekuazioaren soluzio orokorra, 9.2.4 atalan azaldutako prozedura erabiliz.

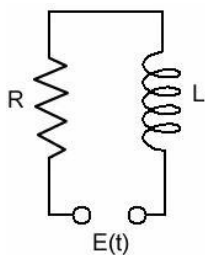
9.11. Ariketa Izan bedi $(x^2 + y^2 + 1)dx - y(x + 1)dy = 0$ ekuazioa. Froga ezazu ez dagoela $G(x, y) = x^n y^m$ itxurako integrazio-faktorerik. Kalkula ezazu $G(x) = (x + 1)^n$ itxurako integrazio-faktorea eta ekuazioaren soluzio orokorra lortu.

9.2.6 Ekuazio linealak

Ondorengo itxurako E.D.A.-ri ekuazio diferentzial lineala deritzo

$$y' + y \cdot P(x) = Q(x) \quad (9.26)$$

Itxura honetako ekuazioa askotan aplikazio praktikoetan agertzen da. Adibidez, zirkuitu elektrikoetan, erresistentzia eta induktantzia elikadura-iturriarekin seriean konektatzen direnean (ikus 9.15 irudia).



9.15 Irudia: RL zirkuitua

Froga daiteke zirkuituan, denbora unitate bakoitzean, ibiltzen den $I(t)$ intentsitatea ondorengo ekuazioaren bidez modelizatzen dela:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E$$

non L induktantziaren balioa, R erresistentziarena eta E aplikatutako tentsioa diren. Ekuazio hau L faktoreaz zatituz, (9.26) itxuran gertzen zaigu. Orokorrean, L eta R konstanteak dira, baina E denboraren menpe dagoen funtzioa izan daiteke. Hau gertatzen da adibidez, zirkuituan $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$ itxurako tentsio alternoa aplikatzen denean.

(9.26) ekuazioaren soluzio orokorra lortzeko

$$e^{\int P(x) dx}$$

integrazio-faktorea erabiltzen dugu:

$$y' e^{\int P(x) dx} + y P(x) e^{\int P(x) dx} = Q(x) e^{\int P(x) dx} \quad (9.27)$$

Azkeneko hau ondorengo eran idatz daiteke:

$$\frac{d}{dx} \left(y e^{\int P(x) dx} \right) = Q(x) e^{\int P(x) dx}$$

Beraz:

$$y e^{\int P(x) dx} = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + k$$

k hautazko konstantea da. $y(x)$ askatuz (9.26) E.D.A.-ren soluzio orokorra lortzen da.

$$y(x) = e^{-\int P(x) dx} \left(k + \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx \right) \quad (9.28)$$

9.12. Ariketa Ondorengo problemaren soluzioa aurkitu:

$$y' - 2y = e^{3x}$$

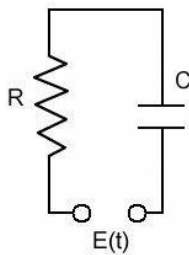
$$y(0) = -1$$

9.13. Ariketa Ondorengo E.D.A.-ren soluzio orokorra bi era desberdinetan lortu:

$$x^2 y'' + 2xy' = 2$$

1. lehen ordenako ekuazio lineal bihurtzen duen aldagai-aldaketa aurkituz.
2. Ezkerreko atala bi funtzioen biderkaketaren deribatu moduan idatziz.

9.14. Ariketa Froga ezazu $z = y^{1-n}$ aldagi-aldaketak $y' + yP(x) = y^n Q(x)$ Bernoulli-ren ekuazioa ekuazio lineal bihurtzen duela. (LAGUNTZA: Hasteko ekuazioa y^{-n} faktoreaz biderkatu. Ondoren aldagi-aldaketa egin).



9.16 Irudia: RC zirkuitua

9.15. Ariketa $Q(t)$ kargaren C kondentsadorea R erresistentziarekin eta $E(t)$ elikadura-iturriarekin seriean konektatuta dago (ikus 9.16 irudia). Honen modelizazioa hau da:

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t)$$

Soluzioa aurkitu. Demagun $R = 20 \Omega$, $C = 0.01 F$ eta $E(t) = 60e^{-2t} V$ direla. Kondentsadorearen hasierako karga $Q(0) = 0$ bada, $Q(t)$ kalkulatu, marraztu eta aurkitu zer unetan karga maximoa den, karga hori emanetz.

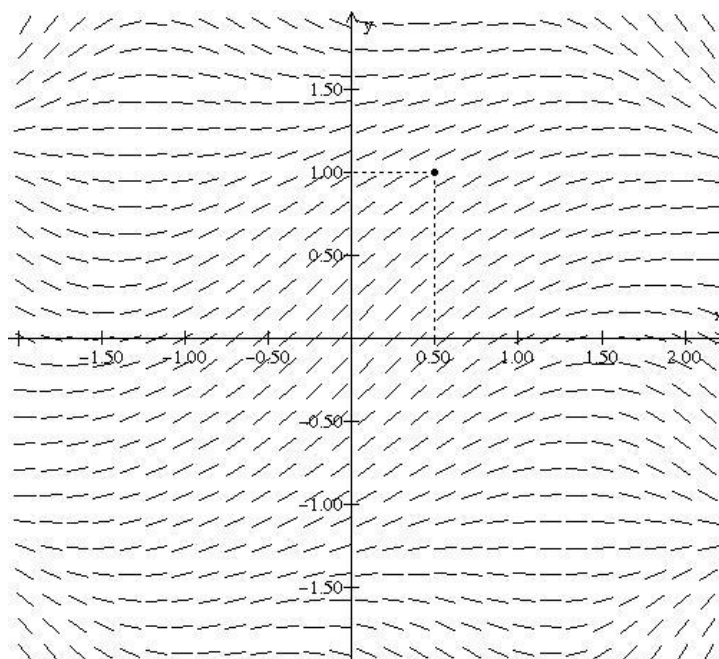
9.3 Soluzioaren existentzia eta bakartasuna.

Aurreko atalan $y' = F(x, y)$ E.D.A. ebazteko metodo batzuk ikusi ditugu. Metodo horiek erabiltzeko beharrezkoa izan da ekuazioak baldintza batzuk betetzea. Esan dezakegu, beraz, metodo hauek ez direla orokorrak. Batzuetan, ez dago aurkitzerik metodo analitikoren bat ekuazioa ebazteko. Har dezagun adibidez ondorengo problema:

$$y' = \sin(xy) + \cos(x + y), \quad y(0.5) = 1 \quad (9.29)$$

(9.29) ekuazioa ez dago ebazterik aurretik emandako metodoak erabiliz (frogatu adibide moduan). Hala ere, soluzioen malden eremua marrazten badugu (ikus 9.16 irudia), ematen du $y(x)$ soluzioaren hurbilketa bat lor dezakegula; soluzio horrek (9.29) betetzen duelarik. Horrez gain, $y(x)$ -ren hurbilketa bat Taylor-en polinomioen bidez aurkitu genezake.

9.16. Ariketa 9.17 irudian (9.29)-ren soluzioa gutxi gora behera marraztu. Taylor-en $P_2(x)$ eta $P_3(x)$ polinomioak $a = 0.5$ puntuan kalkulatu eta puntu horren ingurunean marraztu.



9.17 Irudia: 9.29-ren malden eremua

Interesatzen zaigu zer baldintzetan

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (9.30)$$

ekuazioak $y(x)$ soluzio orokorra onartzen duen.

Ondorengo teoreman galdera hau erantzuten da.

9.1. Teorema (*Soluzioaren existentzia eta bakartasuna.*)

Demagun $F(x, y)$ funtzioa eta $F_y(x, y)$ deribatu partziala XY planoko D eremu batean jarraiak direla. Demagun (x_0, y_0) puntua D eremuan dagoela. Orduan, badago $y(x)$ funtzio bakarra, x_0 puntuaren ingurune batean definituta dagoena eta (9.30) baldintzak betetzen dituena.

Ikus ditzagun teorema honen ondorio batzuk.

1. $F(x, y)$ funtzioa eta $F_y(x, y)$ bere deribatu partziala XY planoko D eremu batean jarraiak badira, $y' = F(x, y)$ E.D.A.-ren soluzioak diren $y(x)$ infinitu soluzio existitzen

dira. $(x_0, y_0) \in D$ puntua finkatzen badugu, orduan, (x_0, y_0) puntutik pasatzen den $y(x)$ soluzio bakarra existitzen da. Hau da: $y(x_0) = y_0$. Adibidez, $y' + y = e^{-x}$ lehen ordenako ekuazio lineala hartuz, 9.2.6 atalan ikusitako prozedura erabil daiteke bere soluzioa kalkulatzeko eta konprobatzeko soluzio hori hau dela:

$$y = e^{-x}(k + x) \quad (9.31)$$

Existentzi teorema aztertzen badugu $F(x, y) = e^{-x} - y$ lortzen da. Funtzio hau XY planoan ondo definituta dago eta jarraia da, bere deribatu partziala, $F_y(x, y)$ ere jarraia izanik. Orduan, teorema honek ziurtatzen du (x_0, y_0) puntua finkatzen dugunean (9.31) familiako funtzio bakarra existitzen dela non $y(x_0) = y_0$ betetzen den. Ikus dezagun nola kalkula daitekeen soluzio hori, hau da, nola kalkulatu k -ren balioa:

$$y(x_0) = y_0 \Rightarrow y_0 = e^{-x_0}(k + x_0) \Rightarrow k = y_0 e^{x_0} - x_0 \quad (9.32)$$

Demagun $(0, 1.5)$ puntutik pasatzen den (9.31)-ren funtzio bakarra lortu nahi dugula. Orduan (9.32) erabiliz, $k = 1.5$ dela lortzen da. Beraz,

$$y' + y = e^{-x}, \quad y(0) = 1.5$$

problemaren soluzio bakarra $y = e^{-x}(1.5 + x)$ izango da. 9.17 irudian (9.31) familiaren malden eremua eta familiako funtzio batzuk azaltzen dira. Funtzio bakoitza lortzeko (x_0, y_0) puntua finkatu da eta k -ren balioa (9.32) baldintza erabiliz kalkulatu da.

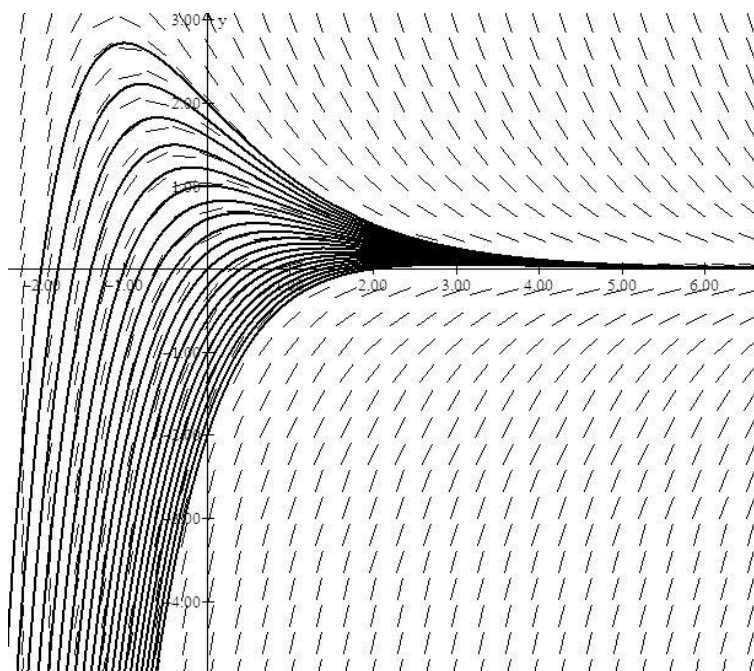
2. (9.31) funtzioetako familia $y' + y = e^{-x}$ E.D.A.-ren soluzio orokorra deitzen da. Honek ondorengoa esan nahi du: (x_0, y_0) puntutik pasatzen den eta (9.31) familia dagoen funtzio bakarra existitzen dela non $y' + y = e^{-x}$ betetzen den. $y' = F(x, y)$ -ren soluzio orokorra

$$y = H(x, k) \quad (9.33)$$

funtzioetako familia da non edozein (x_0, y_0) punturako $y(x)$ funtzio bakarra existitzen den (9.33) familia dagoena eta $y(x_0) = y_0$ baldintza betetzen duena. Edo berdina dena, k_0 balio bakarra dago non $y_0 = H(x_0, k_0)$ den.

3. (9.33) familian y aldagaia, x eta k -ren menpe era esplizituan idatzita dago. Hala ere, $y' = F(x, y)$ E.D.A.-ren soluzio orokorra ez dago beti era esplizituan idazterik, (9.33) ekuazioan egin dugun bezala, baizik eta era implizituan, hau da:

$$H(x, y, k) = 0 \quad (9.34)$$



9.18 Irudia: 9.32 familia

Adibidez, ondorengo ekuazio homogeneoaren soluzio orokorra

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2} \quad (9.35)$$

hau da (frogatu adibide gisa 9.2.3 atalan erabilitako prozedura erabiliz) :

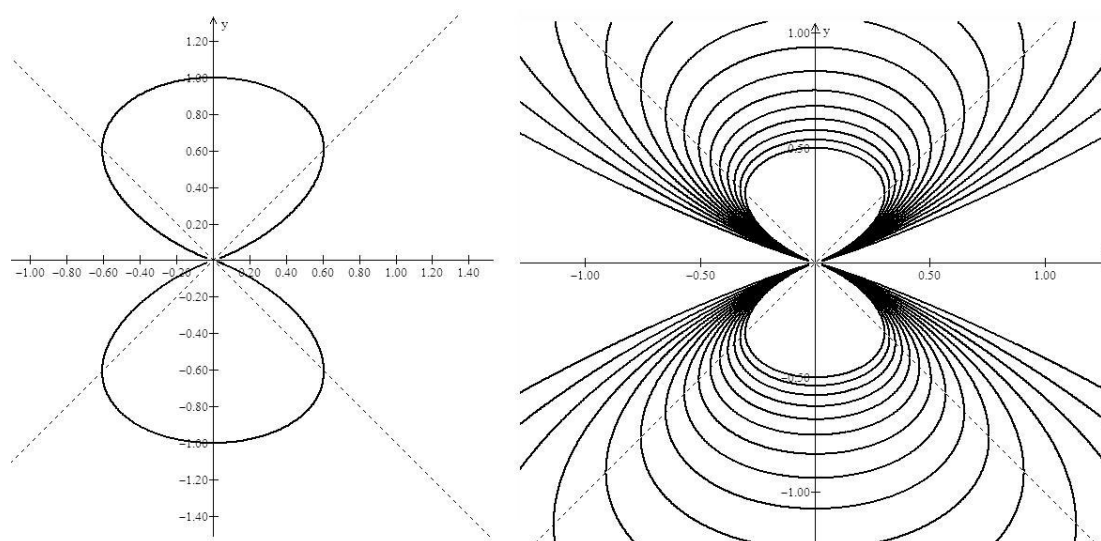
$$\frac{-x^2}{2y^2} = \ln |ky| \quad (9.36)$$

Ez dago (9.36) familiako funtzioak era esplizituan idazterik. Hau da: ez dago y , x eta k -ren menpe askatzerik.

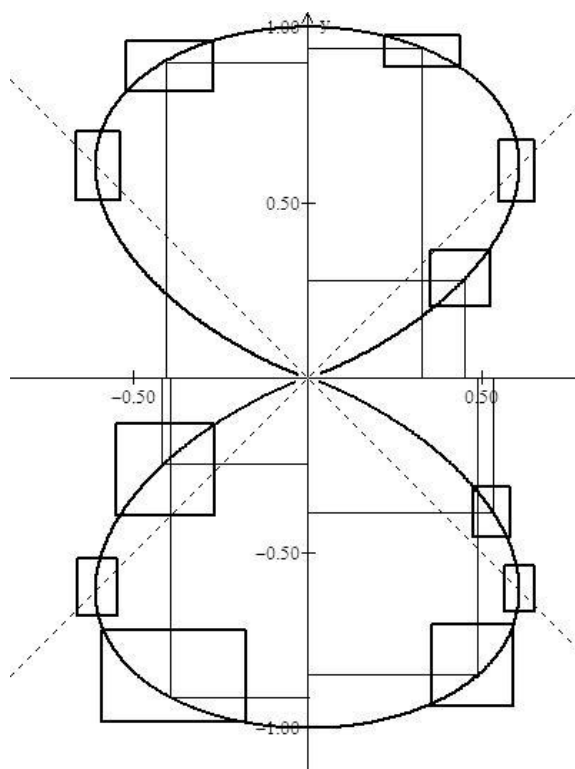
Ikus 9.19 irudia. Ezkerrean (9.36) ekuazioan $k = 1$ eginez lortutako kurba marraztu da. Eskuinean, berriz, familiako beste funtzio batzuk, k -ren balio desberdinetarako lortu direnak, marraztu dira. Existentzi teorema edozein (x, y) -rako aplikatu daiteke, $y = x$ denean

ezik. Puntu hauetan (9.35) E.D.A.-ren izendatzailea anulatzen da. $y = x$ zuzenaren dauden puntuetarako ezik, (x_0, y_0) puntu bakoitzarako badago $y(x)$ funtzioa x_0 -ren ingurunean definituta dagoena eta $y(x_0) = y_0$ betetzen duena. Existentzi teoremak, (9.30) problemak $y(x)$ soluzioa onartzen duela, ziurtatzen du baina $y(x)$ funtzioa x_0 -ren ingurune batean definituta egongo da. Beraz, teorema honek, puntuaren ingurune batean soluzioaren existentzia, ziurtatzen du. Itxura honetako beste teorema batzuk ikusi ditugu non propietateak lokalki ematen diren. Adibidez, Taylor-en polinomioa, $y(x)$ -ren gorakortasuna eta beherakortasuna x_0 -ren ingurune batean ($y'(x_0)$ -ren zeinuaren arabera aztertzen direnak), maximo eta minimo lokalak x_0 puntuan (deribatuen zeinuaren arabera x_0 puntuan aztertzen direnak), etb.

Har dezagun berriro gure adibidea. Har ezazu 9.19 irudiako edozein kurba. Kurba honek ez du $y = y(x)$ funtzio bakarria adierazten x -ren balio finko baterako y -ren balio bat baino gehiago lortzen direlako. Kurbako (x_0, y_0) puntu finko bat aukeratzen baduzu, orduan, har dezakezu kurbaren zati txiki bat $y(x)$ funtzioa adierazten duena. 9.20 irudian $y(x)$ soluzio lokalak adierazten duten kurbako zati desberdinak agertzen dira. Soluzio hauek, soluzioaren existentzia aztertzen den puntuaren ingurune batean definituta daude. $y = x$ zuzenaren dauden puntuetan ez dago $y(x)$ funtzio lokalik. Lehen esan dugunaren arabera, puntu horietan ez dago existentzi teorema aplikatzerik.



9.19 Irudia: 9.36 familia



9.20 Irudia: kurba lokalak

9.4 2. ordenako ekuazio diferentzialak

9.4.1 Soluzioen existentzia eta bakartasuna

Orain arte $y' = F(x, y)$ erako lehenengo ordenako ekuazio diferentzialak aztertu ditugu. Soluzioen esangura eta soluzio horiek aurkitzeko metodo analitiko batzuk ikusi ditugu. Baina, 1. ordenako EDak ez dira zientzian eta ingeniartzan garrantzia duten bakarrak. 1. atalean, fenomeno erreal eta garrantzitsu batzuk eredutzeko erabilgarriak diren 2. ordenako ekuazio batzuk ikusi genuen,

- Aizearen marruskadura kontutan hartuz gorputz baten jaisketa aztertzerakoan azaltzen den EDA.

$$m \frac{d^2 y}{dx^2} = mg - k \frac{dy}{dx}$$

- $F(t)$ indar aldakorra jasutzen duen malguki baten oszilazioak aztertzerakoan azaltzen den EDA.

$$my'' + cy' + ky = F(t)$$

- $E(t)$ tentsioa duen eta erresistentzia, kondentsadorea eta harila seriean konektatuta dituen zirkuitu elektriko baten korrontea aztertzerakoan azaltzen den EDA.

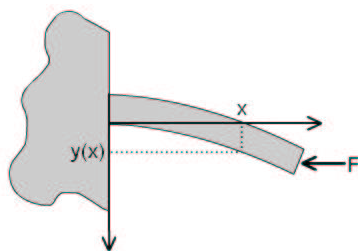
$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

2. ordenako EDA ebazteko beharra beste egoera askotan ere gertatzen da, $y(x)$ magnitudearen aldatze era aztertu behar dugunean.

- Aurreko RCL zirkuitoan, $Q(t)$ kondentsadorearen karga 2. ordenako EDA baten soluzioa da.

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

- F indar horizontal eta konstante bat, mutur bat landatua duen habe baten mutur askean aplikatzen dugunean (ikus (9.21) irudia) habearen deflexioa $y(x)$ ekuazio diferentzial arrunt baten bidez lortzen da.



9.21 Irudia: Habe baten deflexioa

$$EIy'' + Fy = -\frac{W(L-x)^2}{2L}$$

E eta I habearen ezaugarri fisikoen araberrako konstanteak dira (E elastikotasun modulua eta I sekzioaren inertzia momentua), L habearen luzera eta W pisua.

Adibide hauetan ikusi ditugun ekuazioak era honetakoak dira:

$$ay'' + by' + cy = F(x) \quad (9.37)$$

a, b eta d konstante errealak eta $F(x)$ funtzio bat direlarik.

Era honetako ekuazioak ebazteko bideak ikusiko ditugu atal honetan.

9.3. Definizioa . (9.37) ekuazioa koefiziente konstantedun, 2. ordenako ekuazio diferentzial lineala da. $F(x) = 0$ denean homogeneoa dela esaten da.

Oharra:

Aurreko atal baten aztertu genuen ekuazio homogeneoak eta ekuazio diferentzial lineal homogeneoak ez dira gauza berdina.

1. ordenako ekuazioa diferentzial arruntak aztertu dugunean era honetako hastapen problemak ebazpenaz arduratu gara

$$y' = F(x, y) \quad y(x_0) = y_0 \quad (9.38)$$

1. ordenako ekuazioa diferentzial arruntak ebazterakoan, $y' = F(x, y)$ EDA-ren soluzio orokorraz aritu ginen eta zer nolako baldintzetan bakarra den (9.38) ekuazioaren soluzioa.

Gauza berdina egingo dugu orain problema honekin.

$$ay'' + by' + cy = F(x)y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = m_0 \quad (9.39)$$

non $F(x, y)$ funtzioa jarraitua den

(9.39) problemaren hastapen baldintzak bi dira, bilatzen dugun funtzioa, (x_0, y_0) puntutik pasatzen da eta x_0 puntuan m_0 malda duen EDA-ren soluzioa izan behar du.

9.4. Definizioa *Bi konstanteen menpe dagoen*

$$y = f(x, k_1, k_2) \quad (9.40)$$

funtzioa sorta (9.37) EDA-ren soluzio orokorra da, honako baldintzak betetzen dituenean:

1. (9.37) funtzio sortako edozein funtzioek EDA betetzen du.
2. Edozein (x_0, y_0) eta m_0 balioentzat, funtzio sortako funtzio bakar batek betezen ditu hastapen baldintza horiek

9.2. Adibidea Egiaztatu funtzio sorta hau

$$y = k_1 e^x + k_2 e^{-x} - x^2 - 2 \quad (9.41)$$

ekuazio diferentzial honen soluzioa dela.

$$y'' - y = x^2 \quad (9.42)$$

Ikus dezagun (9.41) funtzio sortako edozein funtzio (9.42) ekuazio diferentzialaren soluzioa dela konstanteen edozein balioentzat.

(9.41) deribatuz

$$y' = k_1 e^x - k_2 e^{-x} - 2x$$

$$y' = k_1 e^x + k_2 e^{-x} - 2$$

eta (9.42) ekuazioaren ezkerreko gaian ordezkatzuz

$$y'' - y = k_1 e^x + k_2 e^{-x} - 2 - (k_1 e^x + k_2 e^{-x} - x^2 - 2) = x^2$$

Hastapen baldintzak $y(x_0) = y_0$ eta $y'(x_0) = m_0$ finkatzen ditugu eta (9.41) funtzio sortatik baldintza horiek betetzen dituen aurkituko dugu.

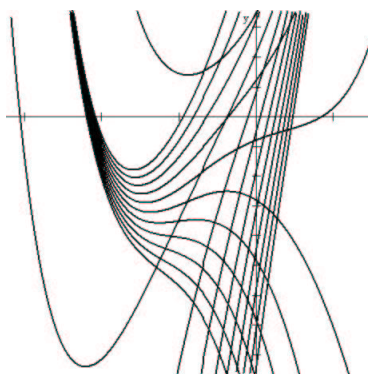
$$\begin{cases} y_0 = k_1 e^{x_0} + k_2 e^{-x_0} - x_0^2 - 2 \\ m_0 = k_1 e^{x_0} - k_2 e^{-x_0} - 2x_0 \end{cases} \quad (9.43)$$

Ekuazio-sistema askatuz koefizienteen balioak lortzen ditugu. Sistemak soluzio bakarra du

$$\begin{vmatrix} e^{x_0} & e^{-x_0} \\ e^{x_0} & -e^{-x_0} \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

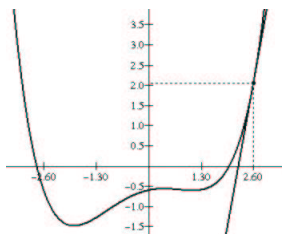
delako.

(9.22) irudian (9.41) funtzio sortako funtzio batzuen adierazpena dugu. (x_0, y_0) puntutik funtzio sortako infinitu funtzio pasatzen dira baina horietatik malda m_0 duen bakarra.



9.22 Irudia: (9.41) funtzio sortako funtzio batzuk

(9.23) irudian (9.41) funtzio sortako $(2.6, 2.05555)$ puntutik pasatuz, $y'(2.6) = 5.52643$ betetzen duen funtzioaren adierazpena dugu. Irudi horretan $x_0 = 2.$ puntuan ukitzailea adierazita dago. $k_1 = 0.8$ eta $k_2 = 0.6$ konstanteen balioak (9.43) sistema askatuz lortu dira.



9.23 Irudia: Hastapen baldintzak betetzen dituen funtzioa

Adibide honetan egiaztatuko dugu bi parametroen menpe dagoen funtzio sorta ekuazio diferentzial arrunta baten soluzioa dela. Soluzio orokorrak bilatzeko metodoren bat ezagutzea interesatzen zaigu.

Adibide hori aztertzen jarraitzen dugu. (9.41) soluzio orokorrak bi zatien, $y_1(x)$ eta $y_2(x)$, batura da

$$y(x) = (k_1 e^x + k_2 e^{-x}) - x^2 - 2$$

$$y_1 = k_1 e^x + k_2 e^{-x}$$

$$y = -x^2 - 2$$

Era horretan definitutako $y_1(x)$ (9.41) ekuazio diferentzial arruntari elkartutako ekuazio diferentzial homogeenaren soluzio orokorra da eta $y_2(x)$ ekuazio osoaren soluzio partikular bat da.

9.17. Egiaztatu aurreko baieztapenak betetzen direla.

Propietate hori, egia izango al da kasu guztietan? Hau da, (9.44) erako ekuazio lineala baldin badugu eta (9.45) berari elkartutako ekuazio homogeenoa

$$ay'' + by' + cy = F(x) \tag{9.44}$$

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{9.45}$$

egia al da (9.44) ekuazioaren soluzio orokorra (9.45) ekuazio homogeenaren soluzio orokorra eta osoaren partikular bat batuz lor daitekeela? Egia baldin bada soluzio orokorra bilatzeko bi problema ebatzi behar ditugu.

Egiaztapen hori egia da eta teorema honetan enuntziatuko dugu.

9.2. Teorema $y_1(x, k_1, k_2)$ bi parametroen menpe definitutako funtzio sorta (9.45) ekuazio diferentzial homogeenaren soluzioa baldin bada eta $y_2(x)$ (9.44)n ekuazio osoaren soluzio partikularra baldin bada, orduan

$$y(x) = y_1(x, k_1, k_2) + y_2(x)$$

(9.44) ekuazio diferentzial osoaren soluzio orokorra da.

Frogapena

Ikus dezagun $y(x)$ funtzioak soluzio orokorrekin bete behar dituzten baldintzak betetzen dituela.

1. $y(x) = y_1(x, k_1, k_2) + y_2(x)$ -k (9.44) EDA betetzen du.

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = F(x)$$

betetzen da ekuazio osoaren soluzio partikularra delako, eta

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0$$

betetzen da ekuazio homogeneoaren soluzioa delako, beraz

$$a(y_1 + y_2)'' + b(y_1 + y_2)' + c(y_1 + y_2) = (ay_1'' + by_1' + cy_1) + (ay_2'' + by_2' + cy_2) = F(x)$$

2. Soluzio orokorra osatzen duten funtzioen artean $y(x_0) = y_0$ eta $y'(x_0) = m_0$ hastapen baldintzak betetzen dituen funtzio bakarra dago.

Hastapen problema hau eratzen dugu

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y(x_0) = y_0 - y_2(x_0), \quad y'(x_0) = m_0 - y_2'(x_0)$$

$y_1(x, k_1, k_2)$ ekuazio homogeneoaren soluzio orokorra denez, funtzio horietatik bakar bat, $u(x)$ izango hastapen problema horren soluzioa. $y(x) = u(x) + y_2(x)$ bilatzen ari ginen soluzioa da.

$$y(x_0) = u(x_0) + y_2(x_0) = y_0 - y_2(x_0) + y_2(x_0) = y_0$$

eta

$$y'(x_0) = u'(x_0) + y_2'(x_0) = m_0 - y_2'(x_0) + y_2'(x_0) = m_0$$

9.4.2 EDA homogeneoen soluzio orokorra

(9.2) adibidean kusi dugu, $y = k_1 e^x + k_2 e^{-x}$ bi parametroen menpe dagoen funtzio sorta $y'' - y = 0$ ekuazio diferentzial homogeneoaren soluzio orokorra dela.

Soluzio horretan esponentzialen konbinazio lineala dugu. Azter dezagun ea ekuazio homogeneoen soluzio orokorra esponentzialen konbinazio lineal bezala lor dezakegun ala ez.

Bila dezagun bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneoen soluzio orokorrak.

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{9.46}$$

$y = e^{mx}$ erako funtzioak soluzio bezala proposatzen ditugu eta azter dezagun zeintzuk izen behar diren m ren balioak. Funtzio hori deribatuz eta ekuazioan ordezkatzuz hau lortzen dugu,

$$y = e^{mx}$$

$$y' = me^{mx}$$

$$y'' = m^2 e^{mx}$$

$$ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \Leftrightarrow am^2 + bm + c = 0$$

m_1 eta m_2 $am^2 + bm + c = 0$ ekuazioaren soluzioak bilatzen badugu

$$y = k_1 e^{m_1 x} + k_2 e^{m_2 x} \quad (9.47)$$

funtzio sorta EDA soluzioa dirudi. $am^2 + bm + c = 0$ ekuazioa EDA-ri elkartutako ekuazio karakteristikoa da.

9.18. Frogatu m_1 eta m_1 soluzioak errealak eta ezberdinak direnean

$$y = k_1 e^{m_1 x} + k_2 e^{m_2 x}$$

$ay'' + by' + cy = 0$ ekuazioaren soluzio orokorra dela.

9.19. Ekuazio diferentzial honen soluzio orokorra bilatu.

$$y'' - y = 0$$

Azterketa bukatu gabe dugu. Zer gertatzen da $m_1 = m_2$ berdinak direnean? Eta konplexuak direnean?

$m_1 = m_2$ betetzen denean (9.49) funtzio sorta parametro bakarren menpe gelditzen da eta ezin da soluzio orokorra izan. Kasu honetan soluzioa orokorra hurrengo ariketan aipatzen dena da.

9.20. Frogatu, ekuazio karakteristikoen soluzioak berdinak direnean, $m_1 = m_2 = m$, (9.46) EDA-ren soluzio orokorra era honetakoa dela.

$$y = k_1 e^{mx} + k_2 x e^{mx}$$

Ekuazio karakteristikoak ebatzerakoan erro konplexu konjokatuak $m = p \pm qi$ lor ditzakegu, (9.49) funtzio sortan ordezkatzuz, hau lortuko dugu

$$y = k_1 e^{(p+qi)x} + k_2 e^{(p-qi)x} = y = e^{px} ((k_1 + k_2) \cos qx + i(k_1 - k_2) \sin qx)$$

Funtzio sortaren parametroak errealak izan daitezen

$$A = k_1 + k_2, \quad B = i(k_1 - k_2)$$

egiten dugu eta soluzioa era honetan gelditzen da

$$y = y = e^{px} (A \cos qx + B \sin qx) \quad (9.48)$$

9.21. Frogatu $m_1 = p + qi$ eta $m_2 = p - qi$ soluzioak konplexu konjokatuak direnean (9.48) funtzio sorta $ay'' + by' + cy = 0$ ekuazioaren soluzio orokorra dela.

9.4.3 2. ordenako EDA osoaren soluzio partikularra

Koefiziente indeterminatuen metodoa

Ekuazio osoaren soluzio partikularra bilatzeko bideak aztertuko ditugu orain.

Azter dezagun berriro (9.2) ariketaren soluzio orokorra.

Egiaztatu dugu $y_2 = -x^2 - 2$ soluzio partikular bat dela. Funtzio hau eskubiko gaian, $F(x) = x^2$, dugun funtzioaren antzerako itxura du. $y_2 = Ax^2 + Bx + C$ erakoa da $A = -1, B = 0$ eta $C = -2$ direnean. Koefiziente indeterminatuen metodoa antzekotasun horretan oinarritzen da. Soluzio partikular bezala proposatzen den funtzioa $F(x)$ funtzioaren antzekoa da, baina kasuz kasu, finkatu behar diren koefiziente batzuekin.

Adibidez,

$F(x) = 3e^{4x}$ denean, $y_2 = Ae^{4x}$ proposatuko dugu.

$F(x) = 4x^3 - x + 4$ denean, $y_2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ proposatuko dugu.

$F(x) = -4 \sin(3x)$ denean, $y_2 = A \sin(3x) + B \cos(3x)$ proposatuko dugu.

$F(x) = 2e^{5x} \sin(2x)$ denean, $y_2 = e^{5x} (A \sin(2x) + B \cos(2x))$ proposatuko dugu.

9.22. (9.2) adibidean azaltzen den ekuazio diferentzialarentzat $y = ax^2 + Bx + C$ erako soluzio partikular proposatu eta $y_2 = -x^2 - 2$ soluzioa lortzen dela egiaztatu.

9.23. Honako ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra aurkitu.

$$y'' - y = e^x$$

Aplika dezagun metodo hau ekuazio honen soluzioa bilatzeko.

$$ay'' + by' + cy = e^{px} \quad (9.49)$$

p konstante erreala izanik.

$y = Ae^{px}$ erako soluzioarekin saiatzen gara. Ekuazioan ordezkatzuz

$$y' = Ape^{px}$$

$$y'' = Ap^2e^{px}$$

$$aAp^2e^{px} + bpe^{px} + ce^{px} = e^{px}$$

$$A(ap^2 + bp + c) = 1$$

$ap^2 + bp + c$ zero egiten dituzten p balioentzat ez dugu A -rik lortzen. Hau da p ekuazio karakteristikoaren soluzioa denean proposatu dugun funtzioarekin ez dugu lortzen soluzio partikularrik. Egoera hau gainditzeko $y = Axe^{px}$ funtzioa proposatuko dugu. Ekuazioan ordezkatzeko dugu:

$$y' = Ae^{px} + Ape^{px} = A(1 + xp)e^{px}$$

$$y'' = Ape^{px} + Ape^{px} + Axp^2e^{px} = A(2p + xp^2)e^{px}$$

$$aA(2p + xp^2)e^{px} + bA(1 + xp)e^{px} + cxe^{px} = e^{px}$$

$$A(2ap + b) + A(ap^2 + bp + c)x = 1$$

$$A(2ap + b) = 1$$

Berriro $2ap + b = 0$ denean ezin dugu A lortu. $2ap + b = 0$ dugu p ekuazio karakteristikoaren erro bikoitza denean. Kasu hau gainditzeko $y = Ax^2e^{px}$ funtzioa proposatzen dugu. Ariketa bezala, egiaztatu $A = 1/2a$ lortzen dela kasu honetan. ($a \neq 0$ gogoratzuz hemen ez dugu arazorik A lortzeko.)

Edozein $F(x)$ funtzioarekin gauza berbera egingo dugu. (9.1) taulan, lehenengo zutabea $F(x)$ -ren aukerak ditugu, hirugarrenean dagokien proposatutako soluzio partikularra. ($P_n(x)$ eta $Q_n(x)$ n . mailako polinomioak dira.

Taula era honetan erabiliko dugu:

1. $F(x)$ lehenengo zutabea bilatzen dugu.
2. ekuazio karakteristikoaren erroak, m_1, m_2 lortuko ditugu.

$F(x)$	$P(r)$ -ren erroa	y
1	0 ez bai k aldiz	A Ax^k
x^n	0 ez bai k aldiz	$P_n(x)$ $x^k P_n(x)$
$e^{\alpha x}$	α ez bai k aldiz	$Ae^{\alpha x}$ $Ax^k e^{\alpha x}$
$e^{\alpha x}(a \cos(\beta x) + b \sin(\beta x))$	$\alpha + \beta i$ ez bai k aldiz	$e^{\alpha x}(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x))$ $x^k e^{\alpha x}(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x))$
$x^n e^{\alpha x}(a \cos(\beta x) + b \sin(\beta x))$	$\alpha + \beta i$ ez bai k aldiz	$e^{\alpha x}(P_n(x) \cos(\beta x) + Q_n(x) \sin(\beta x))$ $e^{\alpha x}(P_n(x)x^k \cos(\beta x) + Q_n(x)x^k \sin(\beta x))$

9.1 Taula: Koefiziente indeterminatuak

3. erroa eta bigarren zutabeaz azaltzen den balioarekin bat datorren ala ez begiratzen dugu, k anizkoiztasun ordena kontutan hartuz,

4. hirugarren zutabeko funtzioa hartzen dugu.

9.24. Honako EDA-en soluzio orokorrak bilatu.

1. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$
2. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{5x}$
3. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$
4. $y'' - 2y' + 10y = 2e^{3x} + e^x \cos(2x)$
5. $y'' + y' = x^4$

Eragileen metodoa

Koefiziente indeterminatuen metodoa erabiltzeko erraza da baina $F(x)$ funtzioa (9.1) taulan dauden funtzio erakoentzat erabil daiteke soilik. Adibidez, ezin dugu erabili $F(x) = \ln(x)$ edo $F(x) = 1/x$ edo $F(x) = \sqrt{x}$ kasuetan. Atal honetan beste metodo bat aztertuko dugu (9.50) ekuazioaren soluzio partikularra lortzeko. Metodo hau $F(x)$ kasu gehiago onartzen ditu, baina baditu ere bere mugak. Eragileen metodoa erabiltzeko ekuazio karakteristikoaren erroak m_1 eta m_2 errealak izan behar dira.

$$y'' + by' + cy = F(x) \quad (9.50)$$

Ekuazio karakteristikoaren erroen bidez polinomio karakteristikoa era honetan jarri daiteke

$$m^2 + bm + c = 0 \iff (m - m_1)(m - m_2) = 0 \iff m^2 - (m_1 + m_2)m + m_1m_2 = 0$$

Beraz ekuazio diferentziala era honetan adieraz dezakegu

$$y'' - (m_1 + m_2)y' + m_1m_2y = F(x) \quad (9.51)$$

Orain, berriatzi egingo dugu ezkerreko gaia era (9.52) EDA lortuz.

$$(y' - m_1y)' - m_2(y' - m_1y) = F(x) \quad (9.52)$$

Erez egiaztatzen da, (9.51) eta (9.52) adierazpen ezberdina baina ekuazio berdinak direla.

$$(y' - m_1y)' - m_2(y' - m_1y) = y'' - m_1y' - m_2y' + m_1m_2y = y'' - (m_1 + m_2)y' + m_1m_2y$$

(9.52) ekuazioaren ezkerreko gaia aztertzen dugu, lehendabizi y -ren deribatua eta m_1y kenduz funtzio berri bat lortzen dugu eta funtzio hori bigarren batugaian duguna da, baina lehenengoan deribaturik bazen bigarreanean m_2 -ren bidez bidertua. $u' - pu = (D - p)u$ eran laburtzen badugu $(D - p)$ eragilea definitzen dugu.

Hurrengo adibidetan eragilea nola aplikatzen den azaltzen dugu

$$(D - 3)(e^x - x^5) = (e^x - x^5)' - 3(e^x - x^5) = -2e^x - 3x^5 + 4x^4$$

$$(D + 1)(\sin x) = (\sin x)' + \sin x = \cos x + \sin x$$

Beste adibide honetan bi eragile aplikatzen ditugu

$$\begin{aligned} (D - 2)[(D - 4)(e^x - x^3)] &= (D - 2)[(e^x - x^3)' - 4(e^x - x^3)] = \\ &= (D - 2)[-e^x + 4x^3 - 3x^2] = \\ &= (-e^x + 4x^3 - 3x^2)' - 2(-e^x + 4x^3 - 3x^2) \\ &= 3e^x - 8x^3 + 18x^2 - 6x \end{aligned}$$

Erreza da eragilearen biderketak trukatzeko propietatea betetzen duela egiaztatzea. Egin ezazu ariketa bezala.

$$(D - p)[(D - q)u(x)] = (D - q)[(D - p)u(x)]$$

Beraz $(D - p)(D - q)u(x)$ adierazpidea ikusten dugunean badakigu eragilea bi aldiz aplikatzen dugula eta ordenak ez duela emaitza aldatzen.

(9.50) ekuazioa eragileen bidez adieraziko dugu

$$(D - m_1)(D - m_2)y = F(x) \quad (9.53)$$

(9.53) ekuazioa betetzen duen y funtzioa bilatu behar dugu. Horretarako ekuaziotik y askatu behar dugu. Defini dezagun alderantzizko eragilea,

$$(D - p)u(x) = v(x) \quad (9.54)$$

ekuazioa garatuz,

$$(D - p)u(x) = u'(x) - pu(x) = v(x)$$

lortutako ekuazioa, 1. ordenako ekuazio lineala da eta soluzioa

$$u(x) = e^{px} \left[\int e^{-px} v(x) dx + k \right]$$

dela ikusi genuen.

Soluzio partikular bat bilatzen ari garenez $k = 0$ aukeratzen dugu eta

$$u(x) = e^{px} \left[\int e^{-px} v(x) dx \right]$$

lortzen dugu.

Honen bidez $(D - p)$ -ren alderantzizko eragilea definitzen dugu

$$y = (D - p)^{-1} F(x) = e^{px} \left[\int e^{-px} F(x) dx \right] \quad (9.55)$$

9.25. $u(x)$ funtzioari $(D - p)$ eragilea aplikatuz lortzen dugun funtzioari $(D - p)^{-1}$ eragilea aplikatzen zaionean $u(x)$ hasierako funtzioa lortuko dugula egiaztatu (9.55) erabiliz.

9.26. Eragileen metodoa erabili EDA hauen soluzio orokorra bilatzeko.

$$1. \quad y'' + y' = x^4$$

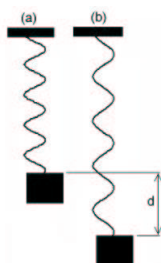
$$2. \quad y'' - 3y' + 2y = -e^{2x}$$

Higidura harmonikoa

(9.56) ekuazio diferentzialak fenomeno fisiko ezberdinen eredu matematikoa adierazteko baliogarria da. Horietako asko bibrazio higidura mekaniko edo elektrikoekin erlazionaturik daude.

$$ay'' + by' + cy = F(t) \quad (9.56)$$

2. ordenako ekuazio diferentzial linealak ebazteko aztertu duguna, honako problema hau ebazteko erabiliko dugu. Malguki batetik zintzilikatua eta $F(t)$ indarra jasaten duen m masa duen gorputz baten higiduraren adierazpen matematikoa 2. ordenako ekuazio diferentziala da.



9.24 Irudia: Malguki batetik zintzilikatzen dagoen gorputza

(9.24(a)) irudian gorputza orekan dago. Gorputzatik tira egiten dugu malgukiaren luzera d izan arte, (9.24(b)) irudian ikusten den bezala, eta $F(t)$ indarra aplikatzen dugu. Indarra $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ erakoa denean aztertuko dugu, (9.25) irudian adierazita dago eta $T = 2\pi/\omega$ periodoa, $1/T = \omega/(2\pi)$ maiztasuna eta F_0 anplitudea dietuen funtzio periodikoa da.

Gorputzaren higidura aztertze (9.45) ekuazioaren bidez eredutzen dugu, eta ebatziko dugu.

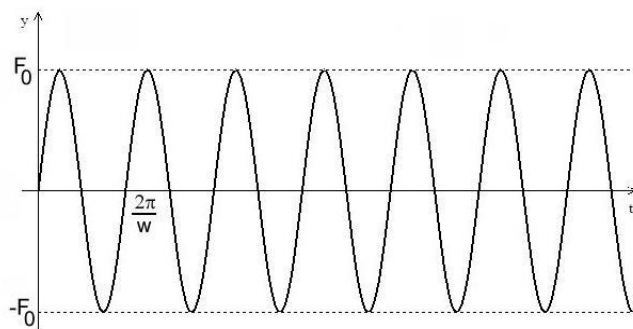
$$my'' + \beta y' + ky = F_0 \sin \omega t \quad (9.57)$$

$y(t)$ = gorputzaren kokalekua t unean.

m = gorputzaren masa.

β = moteltze konstantea. Gorputza airean, urean, edo olioan murgilduta badago konstante hori aldatuko da.

k = malgukiaren ezaugarriek finkatzen duten konstantea.

9.25 Irudia: $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$

m , β , eta k -ren menpe lortzen dugun higidura aztertuko dugu. Hau da (9.57) ekuazioaren soluzioa bilatuko dugu eta horretarako, elkartutako ekuazio homogeneoaren soluzio orokorra, $y_1(t, k_1, k_2)$, eta osoaren soluzio partikularra $y_2(t)$ aurkitu behar ditugu.

Elkartutako ekuazio homogeneoa, (9.58) ekuazioa da

$$my'' + \beta y' + ky = F_0 \quad (9.58)$$

Ekuazio hau malgukiaren higiduraren eredua da indarrik egiten ez dugunean. Indarrik ez dugunez oszilazioaren anplitudea y_1 moteltzen doa eta t infiniturantz jotzen duenean anplitudea 0-rantz jotzen du.

Ekuazio karakteristikoaren erroak r_1 eta r_2 lortuko ditugu,

$$r = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4mk}}{2m} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \frac{k}{m}}$$

$$\lambda = \frac{\beta}{2m}$$

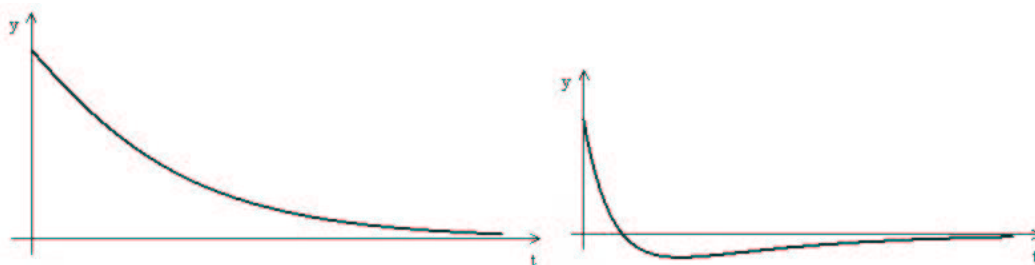
Soluzio orokorra lortuko dugu, $\lambda^2 - k/m$ -ren zeinuaren arabera.

I kasua: $\lambda^2 - k/m > 0$

Soluzio orokorra hau izango da:

$$y_1 = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}$$

$r_1 < 0$ eta $r_2 < 0$ direnez (zergatik?), $t \rightarrow \infty$ doanean $y \rightarrow 0$ betetzen da. $\lambda^2 - k/m > 0$ baldintzak $\beta^2 > 4mk$ dela adierazten du, hau da, moteltze-koefizientea handia dela malgukiaren k konstantearekin konparatuta. Horregatik, mugimendu mota honi *gainmoteldua* deitzen zaio. Mugimendu hau ez da oszilatzailea eta denbararen epe luze bat pasa ondoren, masaren desplazamendua hutsala da. (9.26) irudian y_1 funtzioaren bi grafiko posible azaltzen dira.



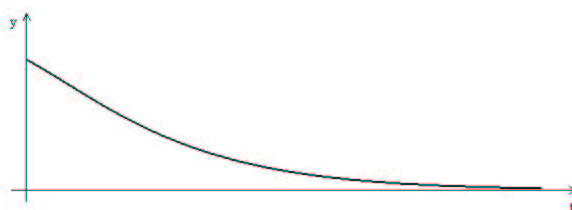
9.26 Irudia: Mugimendu gainmoteldua

II kasua: $\lambda^2 - k/m = 0$

Soluzio orokorra hau izango da:

$$y_1 = K_1 e^{-\lambda t} + K_2 t e^{-\lambda t}$$

$\lambda > 0$ denez (zergatik?), kasu honetan ere betetzen da $y_1 \rightarrow 0$ dela $t \rightarrow \infty$ doanean. (9.27) irudian y_1 funtzioaren grafiko tipiko bat azaltzen da. Egoera honi *moteltze kritikoa* deitzen zaio, moteltze-koefizientearen jaiste txiki batek mugimendua oszilatzaile bihurtzen duelako (ikusi III kasua).



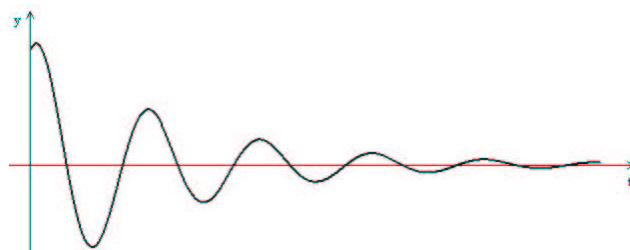
9.27 Irudia: Moteltze kritikoa

III kasua: $\lambda^2 - k/m < 0$

Soluzio orokorra hau izango da:

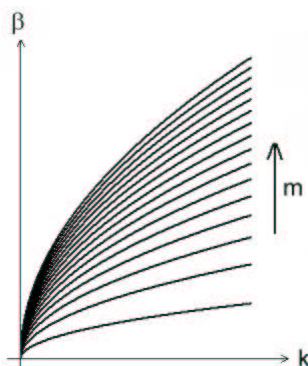
$$y_1 = e^{-\lambda t} \left(K_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m} - \lambda^2} t + K_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m} - \lambda^2} t \right)$$

$\lambda^2 - k/m < 0$ baldintzak $\beta^2 < 4mk$ dela adierazten du, hau da, moteltze-koefizientea txikia dela malgukiaren k konstantearekin konparatuta, horregatik, mugimendu mota honi *behemoteldua* deitzen zaio. Mugimendu hau oszilatzailea da, baina oszilazio-anplitudeak 0-rantz doaz $t \rightarrow \infty$ doanean. (9.28) irudian y_1 funtzioaren grafiko tipiko bat azaltzen da.



9.28 Irudia: Mugimendu behemoteldua

9.27. Ariketa Ikusi dugunez, mugimenduaren mota $\beta^2 - 4mk$ zeinuarekiko dependentea da. (9.29) irudian $\beta^2 = 4mk$ grafikoa adierazi dugu m -ren balio desberdinentzat.



9.29 Irudia: m -ren eragina

- a) Suposa dezagun mugimendua gainmoteldua dela. β , m edo k -ren balioa aldatzen badugu, mugimenduaren mota aldatuko da? Nola?

b) Eta mugimendua kritikoki moteldua bada?

c) Eta mugimendua behemoteldua bada?

9.28. Ariketa Aurreko hiru mugimenduetan, K_1 eta K_2 konstanteen esanahia interpretatu.

(9.58) ekuazioaren soluzio orokorra lortu ondoren, koefiziente indeterminatuen metodoa erabiliko dugu (9.57) EDA osoaren soluzio partikular bat aurkitzeko. Kasu honetan gai askea $F(t) = F_0 \sin(wt)$ da, eta (9.1) taulan agertzen da. Erroa $0 + iw$ izango da, eta honek ezin ekuazio karakteristikoaren soluzioa izan (zergatik?). Orduan, proposatuko dugun (9.57) ekuazioaren soluzio partikularra hau da:

$$y = A \cos(wt) + B \sin(wt) \quad (9.59)$$

(9.59) ekuazioa deribatzen:

$$\begin{aligned} y' &= -Aw \sin(wt) + Bw \cos(wt) \\ y'' &= -Aw^2 \cos(wt) - Bw^2 \sin(wt) \end{aligned}$$

(9.57) ekuazioan ordezkatzeko eta ordenatzeko:

$$\begin{aligned} \sin wt(-Bmw^2 - A\beta w + kB) + \cos wt(-Amw^2 + B\beta w + kA) &= F_0 \sin wt \\ \left. \begin{aligned} A(k - mw^2) + B\beta w &= 0 \\ -A\beta w + B(k - mw^2) &= F_0 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Sistema ebatzen badugu:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & \beta w \\ F_0 & k - mw^2 \end{vmatrix}}{(k - mw^2)^2 + \beta^2 w^2} = \frac{-F_0 \beta w}{(k - mw^2)^2 + \beta^2 w^2} \\ B &= \frac{\begin{vmatrix} k - mw^2 & 0 \\ -\beta w & F_0 \end{vmatrix}}{(k - mw^2)^2 + \beta^2 w^2} = \frac{-F_0(k - mw^2)}{(k - mw^2)^2 + \beta^2 w^2} \end{aligned} \quad (9.60)$$

Orduan, (9.57) ekuazioaren soluzio orokorra hau izango da:

$$y = y_1 + A \cos(wt) + B \sin(wt) \quad (9.61)$$

non y_1 EDA homogeenaren soluzio orokorra den (lehen kalkulatu duguna) eta A eta B balioak (9.60) erlazioen bidez lortzen diren. Baina gogoratu $y_1 \rightarrow 0$ doala $t \rightarrow \infty$ doanean,

horregatik y_1 eri *gai iragankorra* deitzen zaio: denborako epe bat pasa ondoren gai honek ez du $y(t)$ funtzioan eragiten. $A \cos(wt) + B \sin(wt)$ gaia, ordea, *gai iraunkorra* deitzen da, masak denborako epe luze bat pasatu ondoren jarraituko duen mugimendu oszilatzailearen hurbilketa on bat adierazten duelako. Laburtzen, denborako epe luze bat pasa ondoren, kontsidera dezakegu masaren oszilazioa hau dela:

$$y = A \cos(wt) + B \sin(wt) \quad (9.62)$$

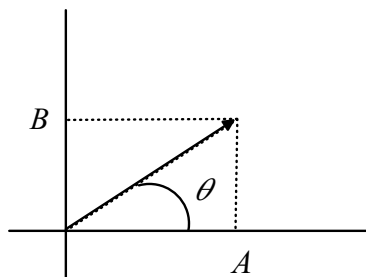
Beraz, masaren oszilazioa periodikoa da eta bere periodoa aplikatutako indarrarena da ($2\pi/w$). Baina, zein da oszilazio hauen anplitudea? Ikus dezagun nola kalkulatu (9.62) funtzioaren anplitudea.

(9.62) ekuazioa kosinuaren funtzioan idazten saiatuko dugu, hau da:

$$y = M \cos(wt + \theta) \quad (9.63)$$

eta, orduan, (9.62) funtzioaren anplitudea lortutako M balioa izango da.

A eta B koefizienteak $A + iB$ zenbaki konplexu baten zati erreal eta irudikaritzat kontsidera ditzakegu (ikusi (9.30) irudia):



9.30 Irudia: Zenbaki konplexuaren adierazpena

nondik:

$$\sin \theta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos \theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \theta = \arctan \frac{B}{A}$$

Orduan, (9.62) ekuaziotik honako hau lortzen dugu:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(wt) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(wt) \right) = \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \theta \cos(wt) + \sin \theta \sin(wt)) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(wt - \theta) \end{aligned}$$

Azkeneko berdintza $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ dela aplikatuz lortzen da. Beraz, (9.62) funtzioaren M anplitudea $A + iB$ zenbaki konplexuaren modulua da:

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{\sqrt{F_0^2 \beta^2 w^2 + F_0^2 (k - mw^2)^2}}{(k - mw^2)^2 + \beta^2 w^2} = \\ &= F_0 \frac{\sqrt{\beta^2 w^2 + (k - mw^2)^2}}{(k - mw^2)^2 + \beta^2 w^2} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + \beta^2 w^2}} \end{aligned} \quad (9.64)$$

(9.64) emaitza interesgarria da. Adierazten digunez, ondoriozkoko oszilazioaren anplitudea aplikatu dugun F_0 indarraren anplitudea bider amplifikazio-faktorea (9.65) da.

$$\frac{1}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + \beta^2 w^2}} \quad (9.65)$$

(9.65) koefizientea malgukiaren ezaugarri fisikoak (k eta β), masa (m) eta aplikatutako masaren maiztasunarekiko ($w/(2\pi)$) dependentea da. Zenbat eta amplifikazio-faktorea (9.65) handiago izan, are handiago da ondoriozko oszilazioaren anplitudea.

9.4.4 Erresonantzia

(9.65) koefizientea gehiago aztertuko dugu. Ondoriozko amplifikazioa sistemaren ezaugarri fisikoekiko dependentea da: ingurunearen moteltzea (β), malgukiaren elastikotasuna (k) eta masa (m). Baina w -rekiko dependentea da ere. Ondorioz, aplikatzen dugun $F(t) = F_0 \sin(wt)$ indarraren maiztasunaren arabera, lortuko den oszilazioaren anplitudea desberdina izango da. Eta honek esan nahi du w -ren balio batzuekin lortzen diren oszilazioak ikaragarriak izan daitezkeela, baita hondagarriak ere. Pentsa ezazu beste sistemetan non mugitzen diren elementu mekanikoek (gurpilak, motoreak,...) bibrazioak eragiten dituzten. Agian, nahiz eta motore batek aplikatutako $F(t) = F_0 \sin(wt)$ indar periodiko baten magnitudea txikia izan (hau da, F_0 txikia), eragiten duen bibrazioa oso handia da (9.65) faktorea ere oso handia delako.

Hortaz, (9.65) koefiziente haundi bat ematen diguten w -ren balioak ezagutu nahi ditugu. (9.65) koefizientearen balioa maximoa da $h(w) = (k - mw^2)^2 + \beta^2 w^2$ minimo denean. Baina $h(w)$ -ren minimoa badakigu kalkulatzeko:

$$\begin{aligned} h(w) &= (k - mw^2)^2 + \beta^2 w^2 \\ h'(w) &= -4mw(k - mw^2) + 2\beta^2 w \end{aligned}$$

Orain $h'(w) = 0$ egiten dugu eta $w \neq 0$ denez (zergatik?) hau lortzen da:

$$h'(w) = 0 \Rightarrow 2m(k - mw^2) = \beta^2$$

$$k - mw^2 = \frac{\beta^2}{2m} \Rightarrow w = \pm \sqrt{\frac{1}{m} \left(k - \frac{\beta^2}{2m} \right)}$$

Erroaren balioa positiboa aztertuko dugu, negatiboa $F(t)$ -ren ikurraren aldaketa bat baino ez delako. Izan bedi w_0 minimo erlatibo posiblea.

$$w_0 = \sqrt{\frac{1}{m} \left(k - \frac{\beta^2}{2m} \right)} \quad (9.66)$$

Ikus dezakegunez, w_0 belio erreal bat izango da hau betetzen bada:

$$k - \frac{\beta^2}{2m} > 0 \Leftrightarrow 2mk > \beta^2 \quad (9.67)$$

Ikus dezagun w_0 puntuan minimo bat dagoen:

$$h''(w) = 2(\beta^2 - 2mk + 2m^2w^2 + 4m^2w^2)$$

$$h''(w) = 2(\beta^2 - 2mk + 6m^2w^2)$$

$$h''(w_0) = 2 \left[\beta^2 - 2mk + 6m^2 \left(\frac{1}{m} \left(k - \frac{\beta^2}{2m} \right) \right) \right] =$$

$$= 2(\beta^2 - 2mk + 6mk - 3\beta^2) = 2(4mk - 2\beta^2) = 4(2mk - \beta^2)$$

w_0 puntuan minimoa bat egoteko $2mk - \beta^2 > 0$ bete behar da, eta hau (9.67) baldintza da.

(9.66) adierazpenan agertzen den w_0 balioa sistemaren ezaugarriekiko (β , k eta m) dependentea da. Eta balio garrantzitsu bat da. Sistema oszilatzailean $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ funtzio periodikoa aplikatzen badugu, non w w_0 -ren hurbilketa bat den, sistemaren oszilazio-anplitudea oso handia izan daiteke. Maiztasun karakteristiko hau $w_0/2\pi$ da, eta *erresonantzi maiztasuna* deitzen da. Makinak, berebilak, untziak eta hegazkinak oszilatzen diren sistema mekanikoak dira, eta bere erresonantzi maiztasun karakteristikoa dute. Gertatzen diren bibrazioen maiztasuna erresonantzi maiztasunetik gertu badaude, sistema suntsitu daiteke. Zubiak bibratzen diren sistema mekanikoen adibide onak dira, bibrazioak pertsonak edo ibilgailuak pasatzerakoan, haizearekin edo ibaiaren ura zimenduen kontra jotzerakoan sortzen dira. Oso famatua da Tacoma (Washington) hiriko zubiaren adibidea. Zubi hau 1940

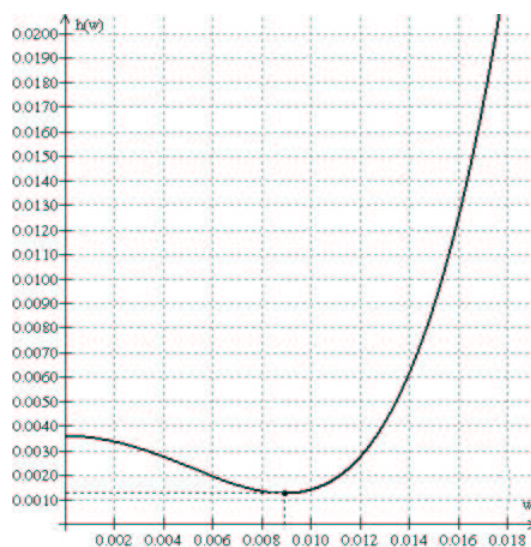
urtean suntsituta gelditu zen, ibiltzen zen haizeak egindako indar periodikoaren oszilazio maiztasuna sistemaren erresonantziatik oso gertu zegoelako.

(9.2) taulan sistema oszilatzaile batzuen erresonantzi maiztasunaren adibideak azaltzen dira, β , k , m -ren balioetatik.

β	k	m	w_0	Erresonantzi maiztasuna ($w_0/2\pi$)	Erresonantzian lortutako amplifikazio-faktorea (9.65)
3.752	0.06	600	0.00897	0.01409	28
3.752	0.033	600	0.00595	0.00935	40
0.35	0.033	1500	0.00469	0.00736	609
0.01	0.033	3000	0.00332	0.00521	30151

9.2 Taula: Erresonantzi maiztasunak

(9.31) irudian aurreko taulan agertzen den lehenengo adibideari dagokion $h(w) = (k - mw^2)^2 + \beta^2 w^2$ funtzioaren grafikoa azaltzen da. Sistema honetan $F(t) = F_0 \sin(0.00897t)$ indarra aplikatzen bada, zeinen maiztasuna sistemaren erresonantzi maiztasuna den, masaren oszilazio-anplitudea 28 bider F_0 izango da.



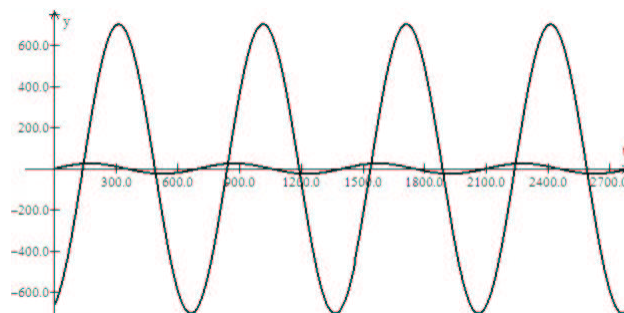
9.31 Irudia: $h(w) = (k - mw^2)^2 + \beta^2 w^2$

(9.32) irudian adibideko sisteman aplikatu den indarra, $F(t) = 25 \sin(0.00897t)$, adierazi

dugu. Funtzio honen periodoa $T = 2\pi/w_0 = 2\pi/0.00897 = 700.52477$ da eta maiztasuna $1/T = 175,1312$. Ondoriozko oszilazioa hau da:

$$y = A \sin(wt) + B \sin(wt) = -662.38837 \cos(0.00897t) + 230.906894 \sin(0.00897t)$$

A eta B koefizienteak (9.60) erlazioetatik lortu dira. Sarrerako indarraren anplitudea 25 da eta ondoriozko oszilazioaren maiztasuna 28 bider sarrerakoa da, hau da, 700.



9.32 Irudia: Sisteman aplikatutako indarra eta lortzen den oszilazioa

Ikus ezazu zer gertatzen den masa handitzen denean, (9.2) taulako azkeneko bi adibideetan bezala. Azkeneko adibidean β moteltze-koefizientea oso handia da (0.01), sistema gutxi moteldua dago eta masa oso handia da (3000). Ondorioz, lortzen den oszilazioaren anplitudea sarrerako anplitudea baino 30000 aldiz gehiago da!. Imajina dezakezu gaizki moteldua dagoen sistema mekaniko bati gertatuko zaiona, aplikatzen diogun indarraren maiztasuna erresonantzi maiztasunetik oso gertu badago? Ba, Tacomako zubiari gertatu zitzaiona. Konponbide tekniko bat sistema hobeto moteltzea da (β handi bat lortu) eta egitura kalkulatu bere erresonantzi maiztasuna normalean jasango dituen indarren bidez lortezina izan dadin. Erresonantziari buruz geroago hitzegingo dugu berriro.

9.29. Ariketa Suposa dezagun malgukia moteltzeko sistema desberdinak aztertzen ari garela eta, esperimentalki, oszilazio maiztasun maximoa neurtu dugula m , k , F_0 eta w -ren balio desberdinentzat. Zein izango da β moteltze-faktorea? Emaizta ondorengo parametroekin aplikatu: $m = 35\text{Kg}$, $k = 2500\text{Kg/m}$, $F_0 = 600$, $w = 6$ eta osilazioko anplitude maximoa=0.472. Kalkulatu kasu honetan osilazioko anplitude maximoa erresonantzian.

9.4.5 Oszilazioa zirkuitu elektrikoetan

Ikusi dugunez, bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal batek erabat desberdinak diren bi fenomeno fisiko modeliza ditzake: malguki baten oszilazioak eta RLC zirkuitu batetik

zirkulatzeko intentsitatea.

$F(t) = F_0 \sin wt$ indar bat jasaten duen malguki baten $y(t)$ oszilazioa deskribatzen duen EDA hau da:

$$my'' + \beta y' + ky = F(t) = F_0 \sin wt$$

Eta RLC zirkuitu batean, non $E(t) = E_0 \sin(wt)$ Volteko tentsio bat aplikatzen den, kondentsadore baten karga $q(t)$ honako EDA honen bidez deskribatzen da:

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E_0 \sin wt \quad (9.68)$$

L =Induktantziaren balioa (Henry)

R =Erresistentziaren balioa (Ohm)

C =Kapazitatearen balioa (Faraday)

(9.3) taulan bi modeloetan agertzen diren parametro mekaniko eta elektrikoaren arteko baliokidetasuna azaltzen da.

Modelo mekanikoa	Modelo elektrikoa
Masa m	Induktantzia L
Moteltze-konstantea β	Erresistentzia R
Malgukiaren konstantea k	Kapazitatearen alderantzizkoa $1/C$
Indar bulkatzailea $F(t) = F_0 \sin wt$	Sarrerako tentsioa $E(t) = E_0 \sin wt$
Malgukiaren desplazamendua $y(t)$	Kondentsadorearen karga $q(t)$

9.3 Taula: Modelo mekaniko eta elektrikoaren baliokidetasuna

Bi sistema baliolideak direnez, sistema mekaniko bat emanda, modelo elektriko bat eraiki daiteke non $I(t)$ korranteak sistema mekanikoaren $y(t)$ desplazamenduaren balioak emango ditu. Honek, praktikan, oso garrantzi handia du zeren eta sistema mekanikoak garestiak dira eta ez da erraza desplazamenduak neurtzea, baina zirkuitu elektrikoaren muntaketa sinplea da eta korranteak polimetro baten bidez neurtzen dira. Gainera, sistema mekaniko batean, zaila izaten da nahi dugu anplitude eta maiztasuneko $F(t) = F_0 \sin wt$ indar periodiko bat aplikatzea. Zirkuitu elektrikoetan, berriz, badaude edozein maiztasuneko tentsioak aplikatzeko seinale-sorgailuak.

9.3. Adibidea Malguki batek eta bertatik zintzilikatzen den masak osatutako sistema oszilatzaile bat diseinatu nahi dugu, non $F(t) = 350 \sin w_0 t$ indarra aplikatzen den. Erresonantzia dagoenean malgukiaren oszilazioa aztertu nahi dugu. Sistemaren parametroak

hauek dira: $m = 15\text{Kg}$, $k = 5000\text{Kg/m}$, $\beta = 50$. Masaren posizioa, $y(t)$, deskribatzen duen EDA ondorengoa da:

$$15y'' + 50y' + 5000y = F(t) = 350 \sin wt$$

Aurreko emaitzak aplikatzen baditugu, hau lortzen da:

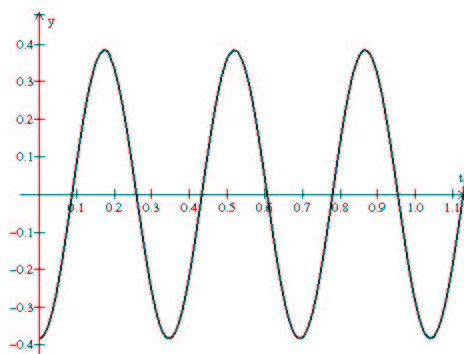
$$w_0 = 18.105$$

$$y(t) = -0.383 \cos(18.105t) + 0.035 \sin(18.105t)$$

$$\text{Erresonantzi maiztasuna} = w_0/(2\pi) = 2.881\text{Hz}$$

$$\text{Erresonantzi oszilazioaren anplitude maximoa} = 0.385\text{m}$$

(9.33) irudian $y(t)$ -ren grafikoa adierazten da.



9.33 Irudia: Masaren posizioaren grafikoa

Orain, saiakuntzak egiteko sistema mekanikoaren prototipo bat eraiki nahi dugu. Hala ere, ez da erraza sistema mekaniko hau eraikitzea ezta erabiltzea ere. Beraz, baliokidea den sistema elektriko bat erabil dezakegu. Kasu honetan, unitateak hauek izango dira: $L = 15$ Henry, $R = 50$ Ohm, $C = 1/5000 = 0.0002$ Faraday, $E(t) = 350 \sin(18.105t)$ Volt. Eta modeloaren EDA:

$$15y'' + 50y' + 5000y = F(t) = 350 \sin wt$$

Baina, ez al da errazagoa induktantzi eta tentsio txikiagoekin lantzea?, ba aurreko EDAn $1/25$ eskala faktorea aplikatuko dugu, eta lortzen da:

$$0.6y'' + 2y' + 200y = F(t) = 14 \sin wt$$

Orduan, gure zirkuituaren propotipoa muntatuko dugu, $L = 0.6H$, $R = 2\Omega$, $C = 0.005F=5mF$ parametroekin, eta $E(t) = 14\sin(18.105t)$ tentsioa aplikatuko dugu. Zirkuituan neurtutako $q(t)$ -ren balioak eta sistema mekanikoaren $y(t)$ desplazamenduaren balioak baliokideak dira.

(9.68) ekuazioa kondentsadorearen kargaren ekuazioa da. Baina zirkuituen problema praktikoa gehienetan interesatzen zaigun magnitude fisikoa ez da karga, zirkuitutik zirkulatzen den $I(t)$ intentsitatea baizik. Kontutan hartzen badugu $q'(t) = I(t)$ betetzen dela, (9.68) ekuazioa deribatuz, lortzen den ekuazio diferentzia RLC zirkuitu batena da non $E(t) = E_0 \sin wt$ Volteko tentsioa aplikatzen den:

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E_0 w \cos wt \quad (9.69)$$

(9.69) EDaren soluzioa aurkitzeko kasu mekanikoan jarraitu genuen prozesu bera erabiliko dugu, eta lortutako zirkuitutik zirkulatzen den $I(t)$ intentsitatea hau da:

$$I(t) = A \cos(wt) + B \sin(wt) \quad (9.70)$$

Orain, A eta B koefizienteak lortzeko (9.70) balioa (9.69) ekuazioan ordezkatzan dugu eta ondorengo ekuazioen sistema lortzen da:

$$\left. \begin{aligned} A \left(\frac{1}{C} - Lw^2 \right) + BRw &= E_0 w \\ -ARw + B \left(\frac{1}{C} - Lw^2 \right) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Sistema ebatzen badugu:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} E_0 w & Rw \\ 0 & \frac{1}{C} - Lw^2 \end{vmatrix}}{\left(\frac{1}{C} - Lw^2 \right)^2 + R^2 w^2} = \frac{E_0 w \left(\frac{1}{C} - Lw^2 \right)}{\left(\frac{1}{C} - Lw^2 \right)^2 + R^2 w^2} \quad (9.71)$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{C} - Lw^2 & E_0 w \\ -Rw & 0 \end{vmatrix}}{\left(\frac{1}{C} - Lw^2 \right)^2 + R^2 w^2} = \frac{Rw^2 E_0}{\left(\frac{1}{C} - Lw^2 \right)^2 + R^2 w^2}$$

Orain, (9.70) funtzioaren anplitudea kalkulatzeko:

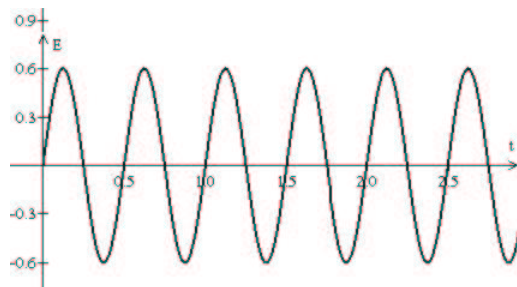
$$\begin{aligned}\sqrt{A^2 + B^2} &= \frac{\sqrt{E_0^2 w^2 \left(\frac{1}{C} - Lw^2\right) + R^2 E_0^2 w^4}}{\left(\frac{1}{C} - Lw^2\right)^2 + R^2 w^2} = \frac{E_0 w \sqrt{\left(\frac{1}{C} - Lw^2\right) + R^2 w^2}}{\left(\frac{1}{C} - Lw^2\right)^2 + R^2 w^2} = \\ &= \frac{E_0 w}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - Lw^2\right)^2 + R^2 w^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{wC} - Lw\right)^2 + R^2}}\end{aligned}\quad (9.72)$$

Zirkuitutik pasatzen den $I(t)$ intentsitatearen anplitudea maximoa izateko w_0 balioa kalkulatu dugu, hau da, zirkuituaren erresonantzia lortzeko behar den w -ren balioa, zein ez den R -rekiko dependentea:

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (9.73)$$

9.30. Ariketa Frogatu (9.72) funtzioaren maximoa lortzen dela w_0 (9.73) adierazpenakoa denenean. Frogatu kasu honetan (9.71) erlazioko A koefizientea 0 dela. Hemen lortzen den $I(t)$ intentsitatearen adierazpena kalkulatu.

9.4. Adibidea Kontsidera dezagun RLC zirkuitua non $R = 10\Omega$, $L = 0.1\text{H}$, $C = 1\text{mF} = 0.001\text{F}$ eta $E(t) = 0.6 \sin 4\pi t$ diren. Kasu honetan, sarrerako tentsioaren anplitudea 0.6V da, bere maiztasuna $4\pi/(2\pi) = 2\text{Hz}$ eta periodoa $T = 0.5$ segundos. (9.34) irudian $E(t)$ -ren grafikoa ikus dezakegu.



9.34 Irudia: $E(t) = 0.6 \sin 4\pi t$

Zirkulatzen den $I(t)$ intentsitatea deskribatzen duen modelo matematikoa hau da:

$$0.1I'' + 10I' + 10^3I = 7.636 \cos 4\pi t$$

(9.71) erlazioak erabiliz, korronea egoera iraunkorran honako hau izango da:

$$I(t) = 0.0075 \cos(4\pi t) + 0.001 \sin(4\pi t)$$

eta bere anplitudea:

$$\sqrt{0.0075^2 + 0.001^2} = 0.0076 \quad \text{Ampere}$$

(9.35) irudian $I(t)$ -ren grafikoa adierazten da.



9.35 Irudia: $I(t) = 0.0075 \cos(4\pi t) + 0.001 \sin(4\pi t)$

(9.73) aplikatuz, erresonantzia $w_0 = 100$ denean lortzen da. Zirkuituan anplitude berdineko tentsio bat (0.6V) sartuko dugu, baina erresonantzi maiztasun honekin: $E(t) = 0.6 \sin(100t)$. Kalkuluak errepikatzen, lortutako intentsitatea hau izango da:

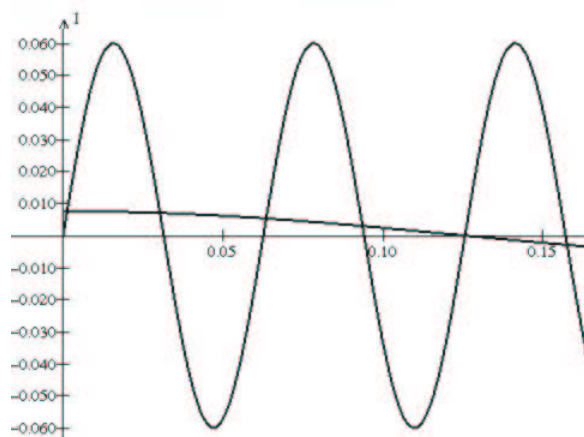
$$I(t) = 0.06 \sin(100t)$$

eta anplitudea 0.06, ia zortzi aldiz handiagoa. (9.36) irudian bi $I(t)$ funtzioen grafikoa adierazten dira. Nabaritu nola handitzen den intentsitatea erresonantzian.

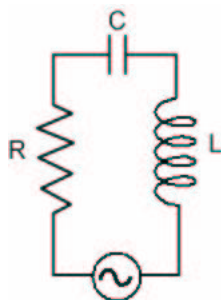
9.31. Ariketa RLC zirkuitu baten erresonantzi maiztasunak aplikazio garrantzitsu bat du irati-igorgailuen sintonizazioan. Ikusi (9.37) irudia.

Hargailuaren antenak jasotzen duen seinalea RLC zirkuitura sartzen da $w/2\pi$ maiztasuna duen tentsio bat bezala, $E(t) = E_0 \sin(wt)$. Aparatuko agintea biratzen denean, C -ren (edo L -ren) balioa aldatzen da, eta, horrela, zirkuitua sarrerako maiztasun horretan erresonantzian sartzen da. Honekin lortzen dena sarrerako maiztasuna duen seinale bat lortzen da, baina anplifikatuta.

- Suposa dezagun apartuko agintea C -ren balioa aldatzen duela. Zein izango da C -ren balioa zirkuituko erresonantzia lortzeko?
- Suposa dezagun apartuko agintea L -ren balioa aldatzen duela. Zein izango da L -ren balioa zirkuituko erresonantzia lortzeko?



9.36 Irudia: (9.4) adibidean lortutako intentsitateak



9.37 Irudia: RLC zirkuitua

9.5 Ikuspegi konputazionalak

9.5.1 Taylor-en 1., 2. eta 3. ordenako hurbilketak

Dakigunez,

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (9.74)$$

problemaren soluzioa ez da beti existitzen (Existentziako teorema gogoratu). Baina, nahiz eta soluzioa egon, batzuetan ez da posible soluzio esplizitua, edo inplizitua, lortu. Askotan,

soluzio hurbildu batekin konformatu beharko dugu. Ondoren, soluzio hurbildua lortzeko prozedura batzuk ikusiko ditugu.

Aurreko atal batean ikusi dugunez, (9.74) problemaren soluzio hurbildu bat lor daiteke Taylor-en polinomio erabiliz. (9.74) problemaren soluzioa, $y(x)$, x_0 puntuan n .ordenaraino deribagarria dela suposatzen badugu, orduan eraiki dezakegu $P_n(x)$ polinomio bat x_0 puntuan $y(x)$ funtzioaren hurbilketa dena:

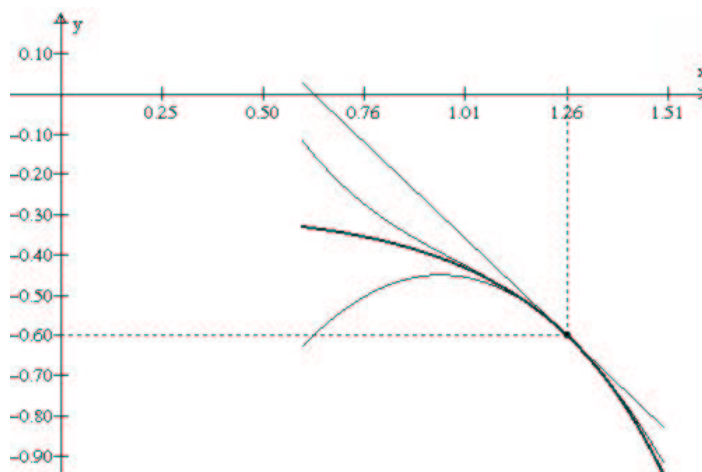
$$P_n(a+h) = y(a) + y'(a)h + \frac{y''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

$$P_n(a+h) \approx y(a+h)$$
(9.75)

Adibidez, (9.38) irudian ondorengo problemaren soluzioa azaltzen da:

$$\begin{cases} y' = x^2 y \\ y(1.26) = -0.6 \end{cases}$$

Irudian adierazi ditugu ere $P_1(x)$, $P_2(x)$ eta $P_3(x)$ polinomioen grafikoak.



9.38 Irudia: Funtzioaren hurbilketa Taylor-en polinomioen bidez

Prozedura hau aplikatzeko, $y' = F(x, y)$ erabiliz, $y(x)$ funtzioaren deribatuak x_0 puntuan kalkulatu ditugu. Hala ere, gehienetan, lortzen dugun hurbilketa x_0 puntutik urrutik dauden puntuetan ez da ona. Gainera, $y(x)$ funtzioak behar dugun ordeneraino deribagarria izan behar du eta kalkulatu behar ditugu deribatuak x_0 puntuan.

Nabaritu prozedura honek erabiltzen duena $y(x)$ funtzioaren hurbilketa kalkulatzeko bakarrik dela x_0 puntuan informazioa: $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, e.a. Informazio horrekin, $y(x)$ hurbiltzeko beste $P_n(x)$ funtzio bat eraikitzen da. Ba, praktikan egiten dena desberdina izaten da. Bilatzen dena ez da funtzio bat $y(x)$ tarte batean hurbiltzeko, h distantziara dauden puntu batzuen segida bat baizik:

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h, \dots, x_{n+1} = x_n + h = x_0 + (n+1)h$$

eta puntu hauetan $y(x)$ funtzioaren balio hurbilduak lortu:

$$y(x_0), y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_{n+1})$$

Ikus dezagun nola egin daitekeen hau, daukagun informazio bakarra $y'(x) = F(x, y)$ bada. (9.75) Taylorren hurbilketa, $n = 1$ denean, hartzen badugu:

$$y(a+h) \approx y(a) + hy'(a) \quad (9.76)$$

y_0 puntutik, $y'(x_0)$ ezaguna denez, (9.76) ekuazioa erabiliko dugu $y(x_1)$ -ren balio hurbildua kalkulatzeko. $y(x_1)$ eta $y'(x_1)$ balioak ditugunean, berriro (9.76) ekuazioa erabiliz $y(x_2)$ kalkulatu dugu, eta abar. Metodo honi *Euler-en metodoa* deitzen zaio eta honela idaz daiteke:

$$\begin{aligned} y_1 &= y(x_0) + hy'(x_0) = y(x_0) + hF(x_0, y_0) \\ y_2 &= y(x_1) + hy'(x_1) = y(x_1) + hF(x_1, y_1) \\ &\vdots \\ y_{n+1} &= y(x_n) + hy'(x_n) = y(x_n) + hF(x_n, y_n) \end{aligned}$$

Idea hau heda daiteke 2., 3.,... ordenako Taylorren hurbilketak erabiliz. Adibidez, $n = 2$ bada:

$$\begin{aligned} y(a+h) &= y(a) + y'(a)h + \frac{y''(a)}{2}h^2 \\ y''(x) &= F_x(x, y) + y'(x)F_y(x, y) = F_x(x, y) + F(x, y)F_y(x, y) \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} (F_x(x_n, y_n) + F(x_n, y_n)F_y(x_n, y_n)) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

9.5. Adibidea (9.5) taulan azaltzen dira Eulerren eta 2.ordenako Taylorren metodoen bidez lortutako balioak, $h = 0.05$ izanik, ondorengo probleman aplikatzen direnean:

$$y' = x^2 y, \quad y(0.85) = 0.8$$

Kasu honetan soluzio zehatza, $y(x) = 0.65191 \exp(x^3/3)$, aldagai banaketaren bidez lor daiteke. (9.5) taulan azaltzen da ere puntu bakoitzean daukagun balio zehatza, $y(x)$, eta metodo bakoitzarekin agertzen den errorea (absolutua eta balio zehatzarekiko portzentaia). Ikus daitekenez, errorea txikiagoa da Taylorren metodoa aplikatzen denean, baino bi metodoekin errorea handitu egiten da x_0 hasteko puntutik urruntzen garenean.

x_k	Balio zehatza $y(x_k)$	Euler-en hurbilketa y_k	Euler-en errorea	% Euler-en errorea	Taylor-en hurbilketa y_k	Taylor-en errorea	% Taylor-en errorea
0.8500	0.8000	0.8000	0.0000	0.0000	0.8000	0.0000	0.0000
0.9000	0.8312	0.8289	0.0023	0.2803	0.8311	0.0001	0.0132
0.9500	0.8676	0.8625	0.0051	0.5878	0.8648	0.0028	0.3216
1.0000	0.9098	0.9014	0.0084	0.9255	0.9038	0.0060	0.6595
1.0500	0.9589	0.9465	0.0124	1.2963	0.9490	0.0099	1.0314
1.1000	1.0159	0.9986	0.0173	1.7038	1.0013	0.0146	1.4400
1.1500	1.0823	1.0591	0.0233	2.1500	1.0619	0.0204	1.8876
1.2000	1.1597	1.1291	0.0306	2.6395	1.1321	0.0276	2.3782
1.2500	1.2501	1.2104	0.0397	3.1750	1.2136	0.0364	2.9151
1.3000	1.3559	1.3049	0.0510	3.7613	1.3084	0.0475	3.5031
1.3500	1.4804	1.4152	0.0652	4.4010	1.4190	0.0614	4.1450
1.4000	1.6271	1.5442	0.0830	5.0992	1.5483	0.0788	4.8447
1.4500	1.8010	1.6955	0.1055	5.8600	1.7000	0.1010	5.6079

9.4 Taula: Euler eta 2.ordenako Taylorren metodoak

9.32. Ariketa x_0 punturen ezkerrean dagoen puntuetan hurbiltzeko, nahikoa da $h > 0$ pauso bat erabiltzea. Prozedura hau aplikatu aurreko adibidean, $h = -0.05$ pausoa hartuz. (9.5) taula bezalako taula bat lortu.

9.33. Ariketa 3.ordenako Taylorren hurbiltzeko algoritmoa ondorioztatu. Euler-en formula hobetua deitzen da. Algoritmo hau aurreko adibidean aplikatu, dagokion taula osatuz. A

9.5.2 4. ordenako Runge-Kutta-ren metodoa

(9.74) problema ebazteko zenbakizko metodo erabilienetako bat da, eta 4. ordenako Taylorren hurbilketan oinarritzen da. Hemen, kalkuluko algoritmoa soilik azalduko:

$n = 0, 1, 2, \dots$ balioentzat:

$$y_{n+1} = y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

non k_i konstanteak modu honetan lortzen dira:

$$k_1 = hF(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hF(x_n + 0.5h, y_n + 0.5k_1)$$

$$k_3 = hF(x_n + 0.5h, y_n + 0.5k_2)$$

$$k_4 = hF(x_n + h, y_n + k_3)$$

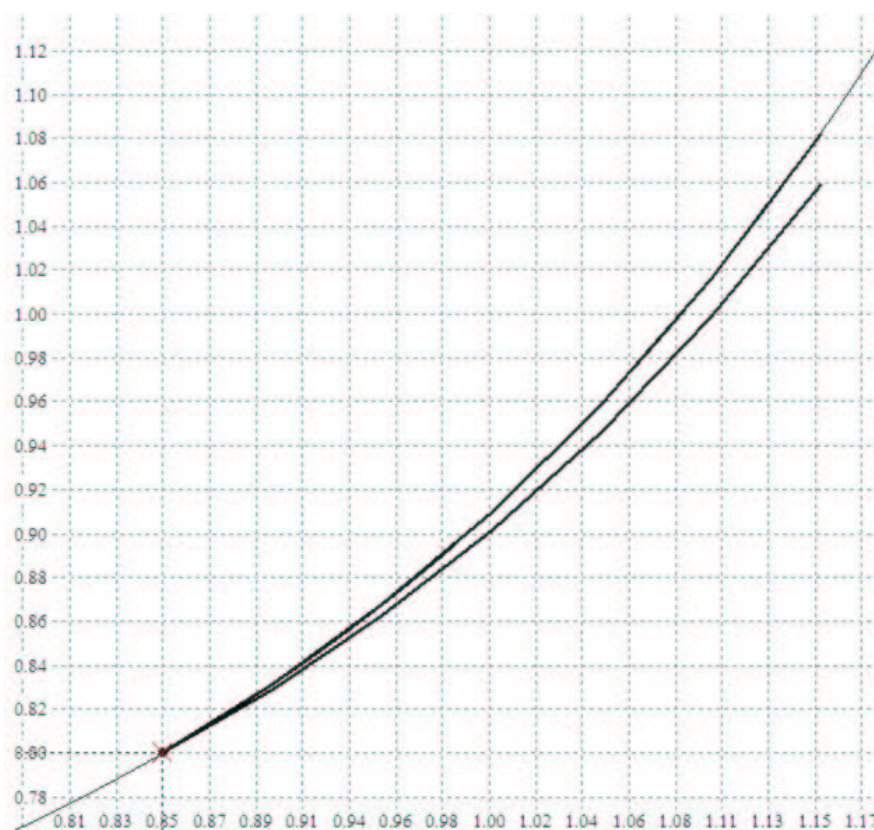
(9.5.2) taulan Runge-Kutta metodoaren aplikazioa aurreko adibidean azaltzen da. Ikus dezakezunez, lortutako balioak aurreko metodoen bidez lortutakoak baino zehatzagoak dira.

x_k	$y(x_k)$ Balio zehatza	y_k R-K hurbilketa	R-K errorea	% R-K errorea
0.8500	0.8000	0.8000000	0.0000000	0.0000000
0.9000	0.8312	0.8312300	0.0000000	0.0000000
0.9500	0.8676	0.8675700	0.0000000	0.0000000
1.0000	0.9098	0.9098100	0.0000000	0.0000000
1.0500	0.9589	0.9588900	0.0000000	0.0000000
1.1000	1.0159	1.0159400	0.0000000	0.0000000
1.1500	1.0823	1.0823200	0.0000000	0.0000000
1.2000	1.1597	1.1596800	0.0000100	0.0008623
1.2500	1.2501	1.2500600	0.0000000	0.0000000
1.3000	1.3559	1.3559200	0.0000100	0.0007375
1.3500	1.4804	1.4803400	0.0000100	0.0006755
1.4000	1.6271	1.6271200	0.0000100	0.0006146
1.4500	1.8010	1.8010300	0.0000000	0.0000000

9.5 Taula: Runge-Kutta metodoa

Bukatzeko, (9.39) irudian soluzio zehatza (lerro mehea) eta Euler eta Runge-Kutta metodoen bidez, $h = 0.05$ izanik, lortutako hurbilketak (lerro lodia) azaltzen dira. Hurbilketak

erabiliz lortutako puntuak poligonal baten bidez lotu ditugu, lerro jarraituak lortzeko. Eulerren metodoarekin lortutako errorea ikusten da, baina Runge-Kuttaren hurbilketa eta $y(x)$ ia berdina dira.



9.39 Irudia: Euler eta Runge-Kuttaren hurbilketak

