



## 9. Kapitulu

# Ekuaizio diferentzial arruntak



**Oharra:**  ikurrarekin markatutako ariketak ebazteko funtzioen adierazpen grafikorako programa informatiko bat behar da, **Winplot** adibidez.

**9.1.**  Ondorengo ekuazio diferentzialak ebatzi eta soluzio partikular batzuk marraztu.

$$\text{a) } \frac{dy}{dx} = x + 2 \quad \text{b) } \frac{dy}{dx} = \frac{5t}{x} \quad \text{c) } (1 + x^2)y' - 2xy = 0$$

$$\text{d) } x' = t(1 + x) \quad \text{e) } \frac{dy}{dx} = y + 2 \quad \text{f) } \frac{dz}{dx} = \sqrt{xz}$$

$$\text{g) } \frac{dz}{dy} = \frac{\sqrt{y}}{3z} \quad \text{h) } xy + y' = 100x$$


**9.2.** Ondorengo enuntziatuetan deskribatzen diren ekuazio diferentzialak idatzi eta ebatzi:

1.  $Q$ -ren  $t$ -rekiko aldatzeko erritmoa  $t$ -ren karratuarekiko proportzionala da.
2.  $P$ -ren  $t$ -rekiko aldatzeko erritmoa  $10 - t$ -rekiko alderantziz proportzionala da.
3.  $R$ -ren  $t$ -rekiko aldatzeko erritmoa  $L - R$ -rekiko proportzionala da.

**9.3.** Suposa dezagun  $y$ -ren aldatzeko erritmoa  $y$ -rekiko proportzionala dela. Badakigu  $x = 0$  denean  $y = 4$  dela, eta  $x = 3$  bada  $y = 10$ . Kalkulatu  $y(x)$ .

**9.4.** Aztertu ondorengo ekuazio diferentzialen  $y(x)$  soluzioa zein kodranteetan den gorakorra edo beherakorra.

$$\text{a) } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}xy \quad \text{b) } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2y$$


**9.5.**  Ondorengo problemen soluzioa hurbiltzeko McLaurin-en 3.ordenako polinomioa aurkitu:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = xy^2 \\ y(0) = 0.5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \frac{dN}{dy} = N + y \\ N(0) = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{d^2R}{dz^2} = Rz + z^2 + 1 \\ R(0) = 1 \\ R'(0) = 2 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} \frac{d^2H}{du^2} = (u + 1)e^H \\ H(0) = -1 \\ H'(0) = 3 \end{cases}$$

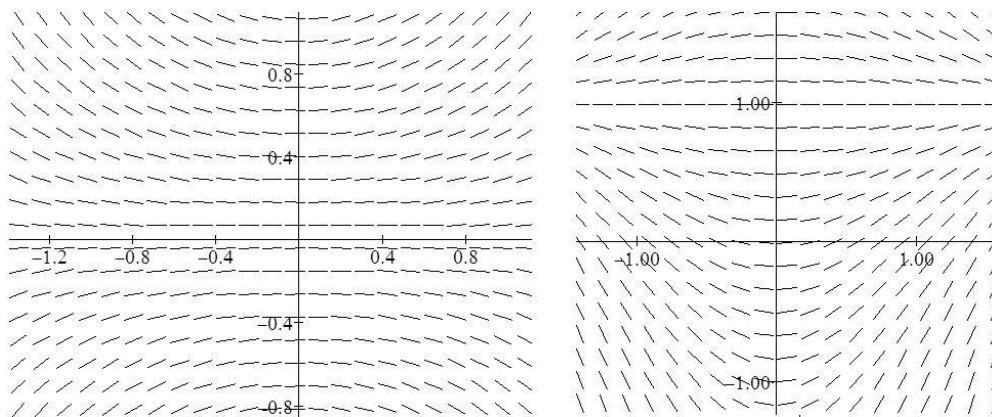
9.6. Ondorengo EDA zehatza dela egiaztatu eta bere soluzio orkorra aurkitu:

$$(2xy^2 - y \sin x + 2x - 1) dx + (2x^2y + \cos x + 1/y) dy = 0$$

9.7.   $y(x)$  funtzioak aurkitu, kasu guztietan  $(x, y)$  puntuan ukitzailea den zuzenak  $OX$  ardatza  $(x + 2, 0)$  puntuan ebaki dezaten.

9.8.   $y(x)$  funtzioak aurkitu, kasu guztietan  $(x, y)$  puntuan ukitzailea den zuzena jatorritik pasa dadin.

9.9.  Ondoren azaltzen den irudi bakoitzak ekuazio diferentzial bati dagokion malda-eremua adierazten du:




Kontsideratu ondorengo bi problemak:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = x(1 - y) \\ y(0) = 0.4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = xy \\ y(0) = -0.5 \end{cases}$$


Eskatzen da:

- Ekuazio bakoitzaren malda-eremua identifikatu.
- Problemaren soluzioa aurreko irudietan marraztu.
- Soluzioa  $x = 0$  punturen ingurune batean hurbiltzeko McLaurin-en hirugarren ordenako polinomioa kalkulatu.

- d) Problema analitikoki ebatzi eta soluzio zehatza aurreko ataletan lortutako soluzio hurbilduekin konparatu.

**9.10.**  Modelo matematiko bat aurkitu Newton-en hoztearen legea deskribatzeko: "Objetu baten temperatura aldatzeko erritmoa bere temperatura eta giro-temperaturaren arteko diferentziarekiko proportzionala da".

Suposa dezagun etxebizitza baten jangelako temperatura  $18^\circ \text{C}$  dela eta plater batean dagoen zopa  $55^\circ \text{C}$ -etatik  $30^\circ \text{C}$ -etara hiru minutuetan aldatzen dela. Zopa temperaturaren grafikoa marraztu. Zein unean izango da zoparen temperatura  $18^\circ \text{C}$ ?


**9.11.**  Ondorengo ariketetan, azaltzen den funtzioen familiak dagokion EDA betetzen duela egiaztatu. Kasu bakoitzean funtzioen familia grafikoki adierazi eta hasierako baldintza betetzen duen soluzio partikularra kalkulatu:

$$a) \quad \begin{cases} y = Ke^{-2x} \\ y' + 2y = 0 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = K \\ 3x + 2yy' = 0 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

$$c) \quad \begin{cases} y = K_1 \sin(3x) + K_2 \cos(3x) \\ y'' + 9y = 0 \\ y(\pi/6) = 2 \\ y'(\pi/6) = 1 \end{cases}$$

$$c) \quad \begin{cases} y = K_1 x + K_2 x^3 \\ x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0 \\ y(2) = 0 \\ y'(2) = 4 \end{cases}$$

**9.12.**  Ondorengo EDA ebatzi eta soluzio orokorra grafikoki adierazi.

$$a) \quad 3x^2(1 + y^2)dx + dy = 0$$

$$c) \quad y\sqrt{y^2 - 1} dx = \sqrt{1 - x^2} dy$$

$$b) \quad e^{x^2 - y^2} + \frac{y}{x^2} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$d) \quad (1 + y) dx + \frac{dy}{x^2 - 2x} = 0$$

**9.13.** Ondorengo EDA ebatzi,  $F(x, y) = x^n y^m$  motako integrazio-faktore bat aurkituz:

$$a) \quad 2y dx + (3y - 2x) dy = 0$$

$$b) \quad \frac{1}{x}(2x - ey^2) dx - 3y^2 dy = 0$$

$$c) y dx + (x^2 y^2 - x) dy = 0$$

**9.14.** Ondorengo EDA ebatzi:

$$a) (2x + y) dy = (x - 2) dx$$

$$b) y' = \frac{4y^2 + xy - 2y^2}{x^2}$$

$$c) x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$$

**9.15.** Ondorengo EDA ebatzi,  $u = 2y^3$  aldagai-aldaketa aplikatuz:

$$(x + 2y^3) dx + 6xy^2 dy = 0$$

**9.16.** Ondorengo EDA ebatzi:

$$x^2 y'' + 2xy' = 2$$

**9.17.**  $z(x)$  funtzioa  $y' + P(x)y = 0$  EDA linealaren soluzioa bada, orduan  $u(x) = Kz(x)$  funtzioa ere soluzioa dela frogatu.

**9.18.** Ondorengo EDA linealak ebatzi:

$$a) \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 3x + 4 \quad b) \frac{dy}{dx} - 3x^2 y = e^{x^3} \quad c) \frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$d) y' - y = \cos x \quad e) y' + 2xy = 2x \quad f) (x + y) dx - x dy = 0$$

**9.19.** Ondorengo problemak ebatzi:

$$a) \begin{cases} y' \cos x + y - 1 = 0 \\ y(0) = 5 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x^2 y' + 2y = e^{\frac{1}{x^2}} \\ y(1) = e \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x dy = (x + y + 2) dx \\ y(1) = 10 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 2xy' - y = x^3 - x \\ y(4) = 2 \end{cases}$$

**9.20.** RL zirkuitu batetik zirkulatzen den  $I(t)$  intentsitateak  $LI' + RI = E$  ekuazio diferentziala betetzen du, non  $L$  induktantziaren balioa,  $R$  erresistentzia eta  $E$  aplikatutako tentsioa diren. Eskatzen da:

- a)  $I(t)$  kalkulatu,  $E_0$  tentsio konstante baterako.
- b) Aurreko kasuan  $I(t)$ -ren portaera aztertu denborako epe luzea pasatu ondoren.
- c)  $I(t)$  kalkulatu,  $I(0) = 0$  A,  $E_0 = 110$  V,  $R = 550 \Omega$  eta  $L = 4$  H direnean.
- d)  $I(t)$  kalkulatu  $E(t) = E_0 \sin(t)$  tentsioa aplikatzen bada.
- e) Aurreko d) kasuan  $I(t)$ -ren portaera aztertu denborako epe luzea pasatu ondoren.

**9.21.** Ondorengo EDA linealen soluzio orokorra aurkitu:

a)  $y'' - 4y' + 13y = 0$     b)  $y''' + 6y'' + 10y' = 0$     c)  $y'' + 6y' + 25y = 0$

d)  $y''' + 2y'' = 0$     e)  $y^{IV} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0$

**9.22.** Koefiziente indeterminatuen metodoa erabiliz, ondorengo EDA ebatzi:

a)  $y'' + 2y' = 36 \cos x$

b)  $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3x$

d)  $y'' - 2y' + y = -e^x$

e)  $y''' - y'' - 9y' + 9y = 2x + 3$

**9.23.** Eragileen metodoa erabiliz, ondorengo EDA ebatzi:

a)  $y'' - 2y' = \cos x$

b)  $y''' + 2y'' - 2y' = x + 2$

d)  $y''' - 2y'' - y' + 2y = -xe^x$

e)  $y''' - 4y'' + 4y' = e^x - \sin 2x$

