

8. Kapituluwa

Lerro integrala

8.1 Arazoaren aurkezpena

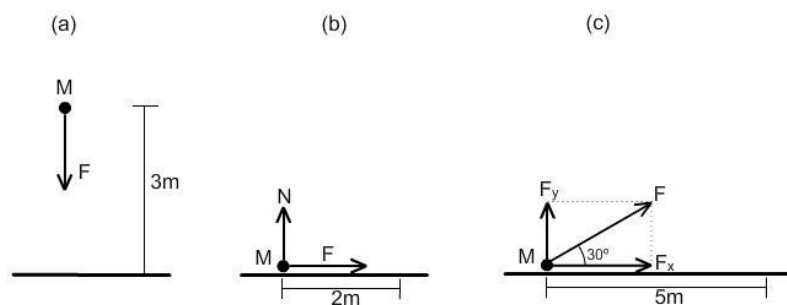
F indar batek d distantzia batean egindako W lana, indarraren eta distantziaren arteko biderkaduraz definitzen da:

$$W = Fd \quad (1)$$

(1) definizioa egoera errazetan aplikatu daitezke. Indarra magnitude bektoriala denez, koordenatu ardatzen norabide gorakorra aukeratzeko dugu zeinu positibotzat.

8.1. Adibidea Demagun $M = 5$ Kg.-ko solido bat askatzen dugula $h = 3$ m.-ko altueratik (ikus 8.1(a) irudia). Kasu honetan, $F = F_g$ grabitate indarrak egiten duen lana solidoa $h = 3$ m.-tik lurrera ($h = 0$ m.) desplazatzeko hurrengoa da:

$W_g = F_g d = -5 \times 9.8 \times 3 = -49 \times 3 = -147$ J (erabilitako unitatea Newton kopurua metroko da, Julio-a alegia)



8.1 Irudia: Solidoari eragindako indarrak

8.2. Adibidea Demagun orain, solidoa lurrean dagoela eta F indar horizontal baten eraginez 2 m. desplazatzen dela eskuinerantz (ikus 8.1(b)). Badakigu, kasu honetan, F indarra gutxienez marruskadura indarraren berdina izan behar dela. M masa baterako, F_r marruskadura indarra, lurraren μ marruskadura indarraren koefizientearekin eta N indar normalarekin erlazionatuta dago:

$$F_r = -\mu N = -\mu GM \quad (2)$$

Horrela, $\mu = 0.25$ dela suposatzen badugu, gure kasuan $F_r = -0.25 \times 9.8 \times 5 = -12.25$ N. beteko da. Beraz, $F = 12.25$ N. indarrak masa desplazatuko du eta F -k egingo duen lana $W_F = 12.25 \times 2 = 24.5$ J.-koa izango da. Masaren desplazamendua horizontala denez soilik, F_g grabitate indarrak ez du norabide horretan osagairik, eta beraz, ez du lanik egiten.

8.3. Adibidea Demagun, masari $F = 60$ N.-eko indarra eragiten zaiola 30-ko angeluaz; masa 5 m. desplazatuko da, 8.1(c) irudian agertzen den bezala. Indar batek objektu bati eragiten dionean, lana, mugimenduaren norabideko indarraren osagaiak egiten du soilik. Gure kasuan, F bektorea, bere osagai horizontalean $F_x = 60 \cos(30) = 51.96$ N. eta bertikalean $F_y = 60 \sin(30) = 30$ N. deskonposatzen da. Osagai bertikalak ez du solidoa jasotzeko adinako baliorik (gutxieneko balioa $Mg = 5 \times 9.8 = 49$ N. baita), eta beraz, F_y -k ez du lanik egiten. F_x -ek egiten duen lana berriz, $W_x = 30 \times 5 = 150$ J.-koa da.

8.4. Adibidea Eta azkenik, demagun solidoa $h = 3$ m.-ko altueratik askatzen dugula, lehenengo adibidean bezala, baina $F = 60$ N.-eko indarra ere eragiten diogu, hirugarren adibidean bezala (ikus 8.2 irudia). Kalkula dezagun indar bakoitzak egiten duen lana.

Norabide bertikalean bi indarrek eragiten dute: grabitate indarra ($F_g = -5 \times 9.8 = -49$ N.) eta F -ren osagai bertikala ($F_y = 30$ N.). Norabide horizontalean, berriz, indar bakar batek eragiten du: F -ren osagai horizontalak ($F_x = 51.96$ N.). Orain, mugimenduaren norabidea zein den kalkulatu behar dugu.

Badakigu, a azelerazio konstanteaz dabilen solido batek egiten duen $E(t)$ ibilbidea $E(t) = E_0 + 0.5at^2$ dela (hasierako unean geldirik dagoela eta E_0 ibilbidean dagoela suposatuz). Bestalde, Newton-en bigarren legeak, solidoaren M masa, a azelerazioa eta eragindako F indarra erlazionatzen ditu: $F = Ma$. Horrela, OY ardatzean desplazamenduaren ekuazioa ondorengoa izango da:

$$E_y(t) = 3 + 0.5t^2(-49 + 30)/5 = 3 - 1.9t^2$$

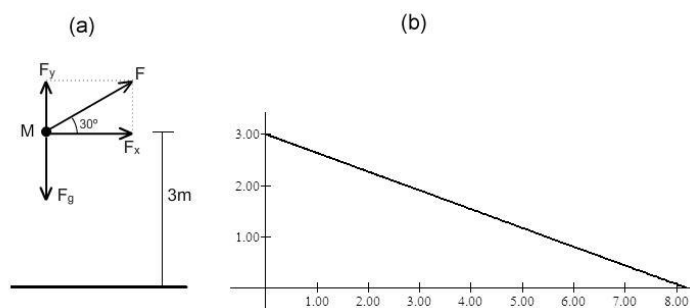
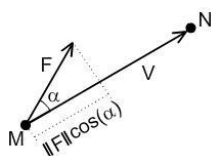
OX ardatzean, desplazamenduaren ekuazioa $E_x(t) = 3 + 0.5t^2(51.96)/5 = 5.196t^2$ da. Hala ere, errazagoa da $h = 3$ m.ko distantzia bertikala $t = 1.256$ s.tan egin duela egiaztatzea; ondorioz, egindako distantzia horizontala $E_x(1.256) = 5.195(0.796)^2 = 8.2$ m.koa da. 8.2(b) irudian, koordenatu parametrikoetan adierazitako ondoko ibilbidearen grafikoa dago:

$$(x(t), y(t)) = (5.195t^2, 3 - 1.9t^2), t \in [0, 1.256]$$

8.1. Harritzen al zaitu ibilbidea zuzen bat izateak? Frogatu koordenatu parametrikoetan emandako $(x(t), y(t)) = (5.195t^2, 3 - 1.9t^2)$ ibilbidea benetan zuzen bat dela.

Nola kalkula dezakegu indar bakoitzak egindako lana? Ikusi 8.3 irudia. Orokorrean, F indarraren bektorea bada eta V desplazamenduaren norabidea adierazten duen bektorea bada, V -ren norabidean dagoen F -ren osagaiak bakarrik egiten du lan. Osagai horri F_V deituz gero, ondokoa lortzen da:

$$F_V = \|F\| \cos \alpha$$

8.2 Irudia: F indarra eta ibilbidearen grafikoa8.3 Irudia: F eta F_V bektoreak

Beraz, F indarrak V norabidean egindako W lana (masa M -tik N -ra desplazatzean) ondorengoa da:

$$W = \|F\| \cos \alpha \|V\| = \|F\| \|V\| \cos \alpha = F \cdot V$$

Beraz, W , F -ren eta V -ren biderketa eskalarra da. Aplika diezaiogun emaitza hau gure adibideari:

$$M = (0, 3), N = (8.2, 0), V = MN = (8.2, -3)$$

$$F_g = (0, -49), W_g = F_g V = (0, -49)(8.2, -3) = 147J.$$

$$F_y = (0, 30), W_y = F_y V = (0, 30)(8.2, -3) = -90J.$$

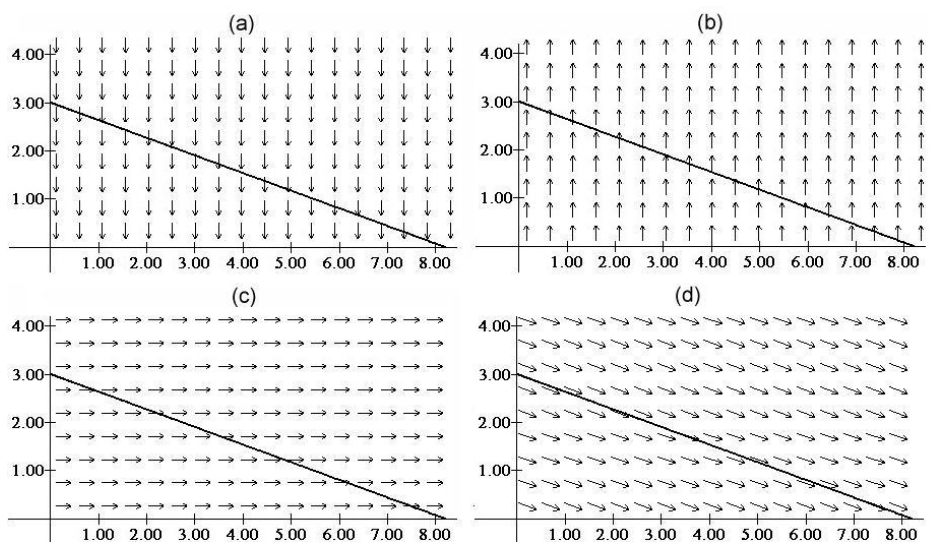
$$F_x = (51.96, 0), W_x = (51.96, 0)(8.2, -3) = 426.072J.$$

Eta zein da $F_r = F_g + F_y + F_x$ indar erresultanteak egingo duen W_r lana? Noski, alde batetik, lan partzialen batura egin dezakegu, $W_r = W_g + W_y + W_x = 483.072 J.$, baina kalkulu zuzena ere egin dezakegu:

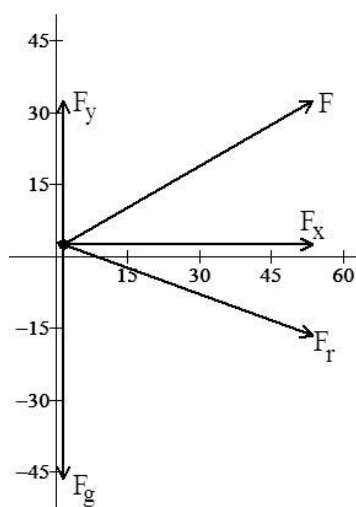
$$F_r = F_g + F_y + F_x = (0, -49) + (0, 30) + (51.96, -19)$$

$$W_r = F_r V = (51.96, -19)(8.2, -3) = 483.072J.$$

Egoera hau ondorengo moduan irudikatu dezakegu: indar-bektoreen eremu bakoitzean "murgilduta" dagoen partikulak egiten duen ibilbidea marraztuz. 8.4 irudian F_g, F_y, F_x eta F_r bektoreen eremuak daude, hurrenez-hurren. Ohartu, eremu bakoitzeko bektoreak modulu berberekin adierazita daudela; eta horregatik, 8.4 moduko grafikoek, eremuko bektoreen norabidea eta noranzkoa adierazten dute, baina ez dute moduluari buruzko informaziorik ematen. 8.5 irudian, F, F_g, F_y, F_x eta F_r bektoreen norabideak, noranzkoak eta moduluak agertzen dira, ibilbideko puntu batean aplikatuta.



8.4 Irudia: F_g, F_y, F_x eta F_r bektoreen eremuak



8.5 Irudia: F , F_g , F_y , F_x eta F_r bektoreen norabideak, noranzkoak, moduluak

8.2. *Solidoaren masa aldatuz gero, nola uste duzu eragingo diola 8.4 eta 8.5 irudietako grafikoei?*

Hala ere, benetako egoerak ez dira adibide hauek bezain errazak izaten. Normalean, indar erresultantea, beste indar askoren batura izaten da eta gainera, indar horiek, ez dira beti konstanteak izaten.

Ohiko bi adibide, eremu grabitatorioak eta magnetikoak dira. P puntu bakoitzeko indarraren balioa ez da konstantea, P -ren (x, y) posizioaren menpekoa baizik. (x, y) puntu bakoitzean aplikatutako indar-bektorea $V(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$ moduan adieraziko dugu. Kasu honetan, nola kalkulatu ahal izango dugu lana?

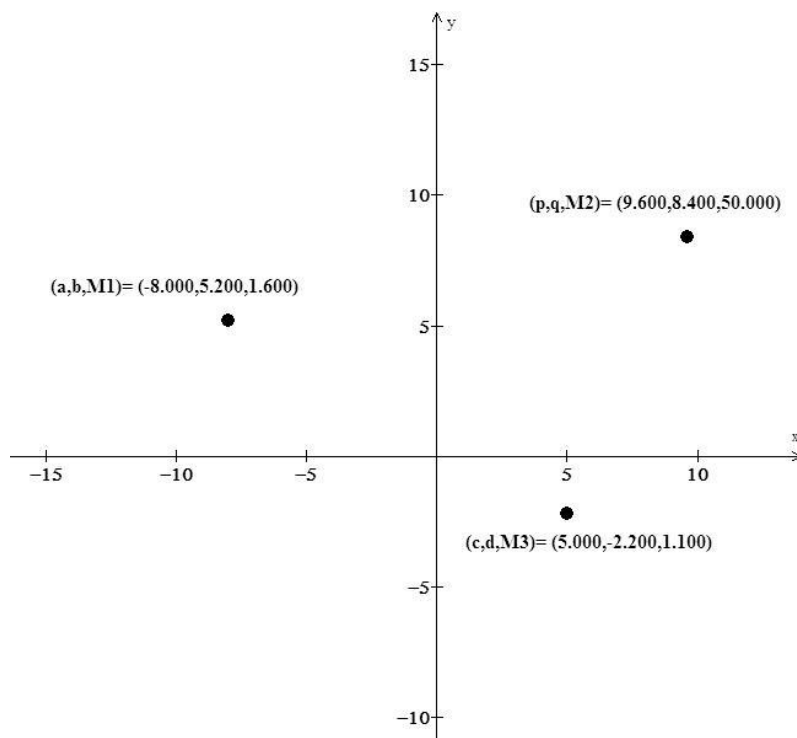
8.5. Adibidea

M_1, M_2 eta M_3 masak sortutako eremu grabitatorioa simulatuko dugu. Dakizunez, $P(a, b)$ puntuko M_1 masak sortutako $Q(x, y)$ puntu bateko eremu grabitatorioaren $F(x, y)$ balioa, M_1 -en proportzionala da eta P eta Q puntuen arteko distantziaren alderantziz proportzionala. Hau da:

$$F(x, y) = \frac{M_1}{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$Q(x, y)$ puntuan kokatutako partikula bat M_1 -ek erakarriko du, $F(x, y)$ eremuaren balioa gehien hazten den norabidean, hau da, $F(x, y)$ -en gradientearen norabidean, $grad(F) = (F_x(x, y), F_y(x, y))$. Hauxe da bektore-eremua: (x, y) puntu bakoitzean $grad(F) = (F_x(x, y), F_y(x, y))$ bektorea definituta dago. Horrela, kasu honetan, $X(x, y) = F_x(x, y)$, $Y(x, y) = F_y(x, y)$.

Aztertu 8.6 irudia; M_1 , M_2 eta M_3 masak kokatuta dauden puntuak agertzen dira, eta baita, bakoitzaren balioa ere. M_1 masak 1.6 balioa hartzen du, eta $(a, b) = (-8, 5.2)$ puntuan dago; M_2 50 da, eta $(p, q) = (9.6, 8.4)$ puntuan dago; M_3 -ren balioa, berriz, 1.1 da eta (c, d) -n dago.



8.6 Irudia: M_1 , M_2 eta M_3 masak

Hiru masen bektore-eremuak:

$$F(x, y) = \frac{M_1}{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$$\text{grad}(F) = (F_x(x, y), F_y(x, y))$$

$$G(x, y) = \frac{M_2}{(x - p)^2 + (y - q)^2}$$

$$\text{grad}(G) = (G_x(x, y), G_y(x, y))$$

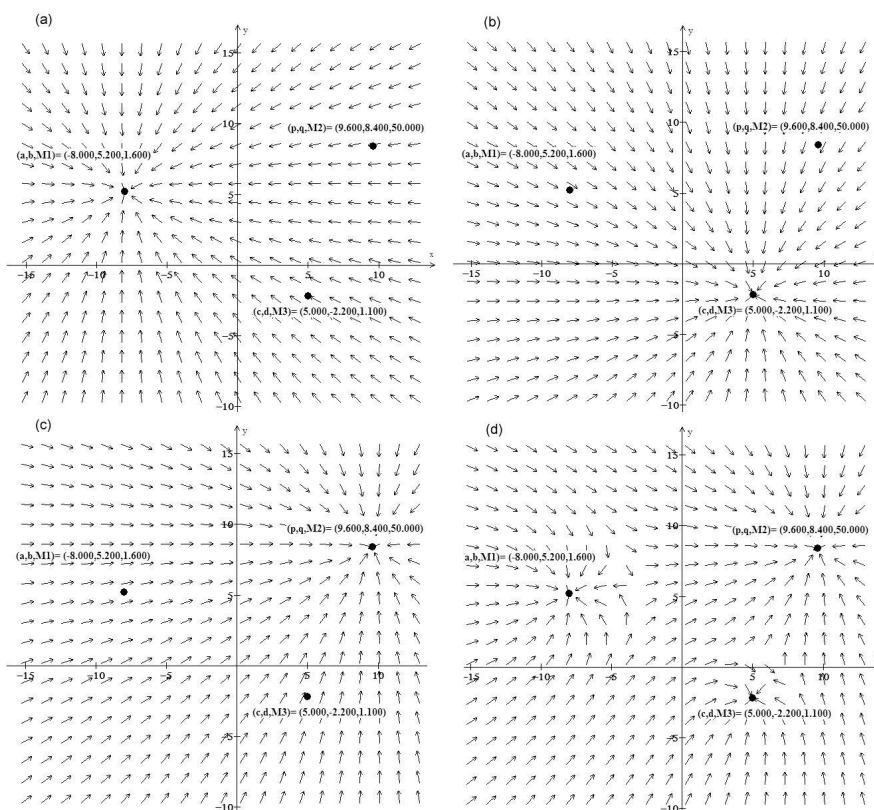
$$H(x, y) = \frac{M_3}{(x - c)^2 + (y - d)^2}$$

$$\text{grad}(H) = (H_x(x, y), H_y(x, y))$$

8.7(a) irudian $\text{grad}(F)$ dago, hau da, M_1 -ek eragindako indar-eremua. 8.7(b) eta (c) irudietan, $\text{grad}(G)$ eta $\text{grad}(H)$ daude, hurrenez-hurren, hau da, M_2 -k eta M_3 -k eragindako indar eremuak. Hiru indar bektoreak batzean, hurrengo eremua lortzen da:

$$\begin{aligned} V &= \text{grad}(F + G + H) = \text{grad}(F) + \text{grad}(G) + \text{grad}(H) = \\ &= (F_x(x, y) + G_x(x, y) + H_x(x, y), F_y(x, y) + G_y(x, y) + H_y(x, y)) \quad (3) \end{aligned}$$

8.7(d) irudian indar-eremu erresultantea marraztu da.

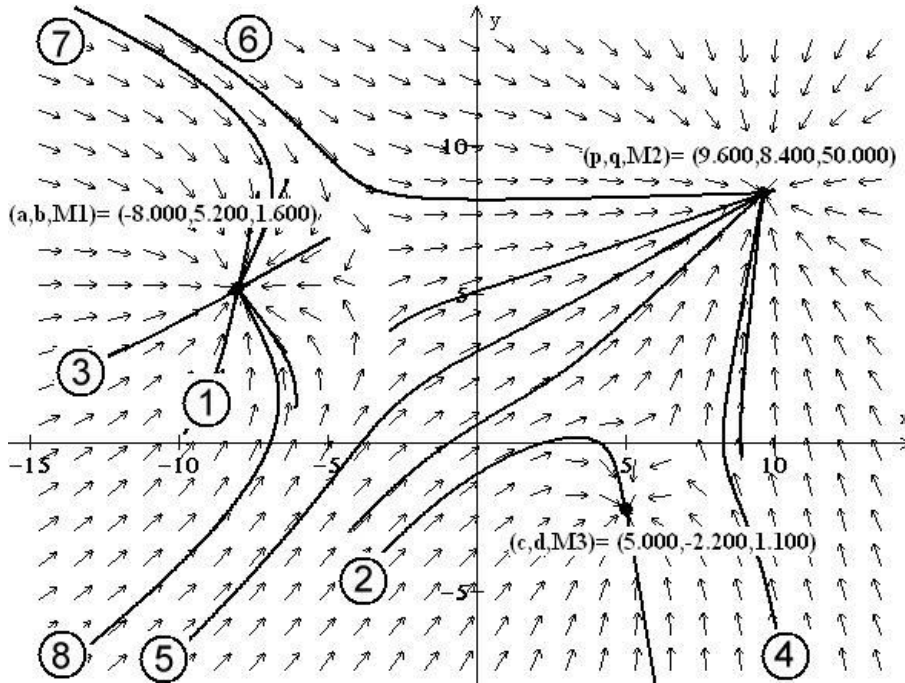


8.7 Irudia: bektore eremuak

Eta zer gertatuko zaio planoko (x, y) puntuan askatzen dugun partikula bati? Zein ibilbide egingo du beste indarren batek eragiten ez badio? Aztertu 8.8 irudia. Ibilbide horien grafiko batzuk marraztu ditugu. Ibilbide bakoitza (x_0, y_0) hasierako puntu batetik abiatzen da, eta masaren bat dagoen puntu batean geratzen da.

Aztertu 8.8 irudiko (1),(2) eta (3) ibilbideak. (x_0, y_0) hasierako puntua masatik nahiko hurbil dago, eta partikulak egiten duen ibilbidea masarantz doa. Hala ere, ohartu (5)-(8) eta (6)-(7) ibilbide bikoteak puntu ezberdinetara hurbiltzen doazela. Hasierako puntuak M_1 -etik askoz gertuago daude M_2 -tik baino, eta hala eta guztiz ere, (5) eta (6) ibilbideak M_2 -rantz gerturatzen dira, eta ez M_1 -erantz. (4) ibilbidearekin ere gauza berbera gertatzen da: M_3 -ra gerturatu beharrean M_2 -ra hurbiltzen da. Zergatik? M_2 masa beste biak baino

asko handiagoa delako.

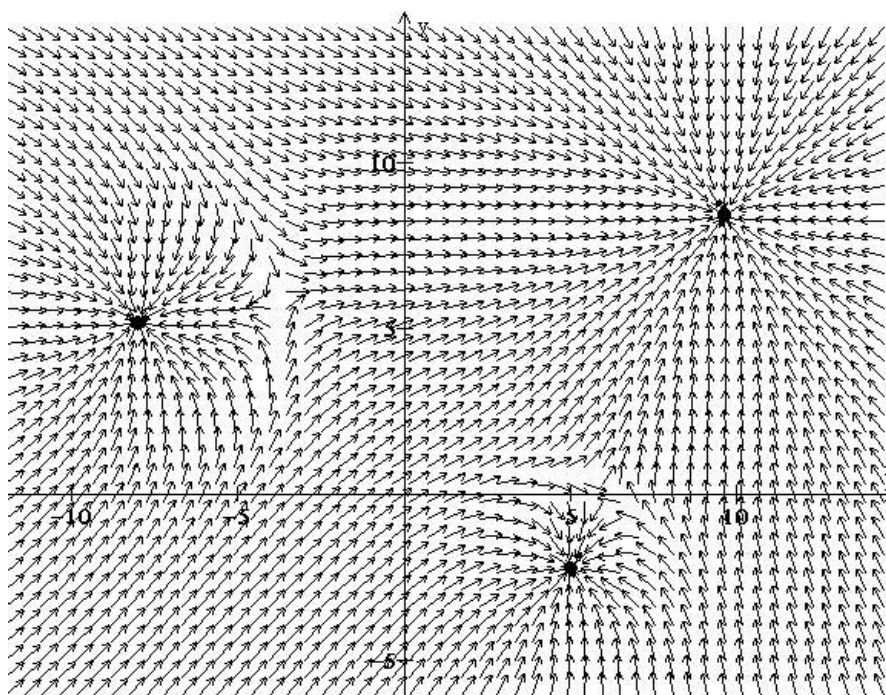


8.8 Irudia: partikulak egindako ibilbideak

8.9 irudian, 8.7(d)-n bezala, gradienteen eremu erresultantea agertzen da, ibilbideak marraztu gabe, baina dentsuago, bektore askoz gehiagorekin. Horrela, argiago ikus daiteke eremuaren bektoreek M_2 -ra orientatzeko duten joera.

8.3. 8.9 irudian, aukeratu hasierako (x_0, y_0) puntu batzuk eta marraztu dagozkien ibilbideak (ibilbide horiei eremu-lerroak deitzen zaie).

Eta nola marraztu ditugu 8.8 irudiko eremu-lerroak? Demagun $(x(t), y(t))$ lerro horietako baten adierazpen parametrikoa dela, eta $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$ puntutik pasatzen dela. (3) ekuazioaren bidez, ibilbidearen tangentea, $(x'(t), y'(t))$, $F(x, y) + G(x, y) + H(x, y)$ -ren gradientearen berdina da, puntu bakoitzean; ondorioz, $x(t), y(t)$ hurrengo problemaren soluzioak izango dira:



8.9 Irudia: gradienteen eremu erresultantea

$$x'(t) = F_x(x, y) + G_x(x, y) + H_x(x, y)$$

$$y'(t) = F_y(x, y) + G_y(x, y) + H_y(x, y)$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (4)$$

(4)-ko lehenengo bi ekuazioak, ekuazio diferentzialak dira, $x(t)$ eta $y(t)$ soluzioen deribatuetak agertzen baitira. Azken bi baldintzei, $x(t_0) = x_0$ eta $y(t_0) = y_0$, hasierako baldintzak deitzen zaie. (4) problema ebaztea, (4)-ko baldintza guztiak betetzen dituzten $x(t)$ eta $y(t)$ funtzioak aurkitzean datza.

Adibidez, frogatu $x(t) = e^t + e^{-t}$ eta $y(t) = e^{-t}$ funtzioak ondorengo (5) problemaren soluzioak direla:

$$x' = x - 2y$$

$$y' = -y$$

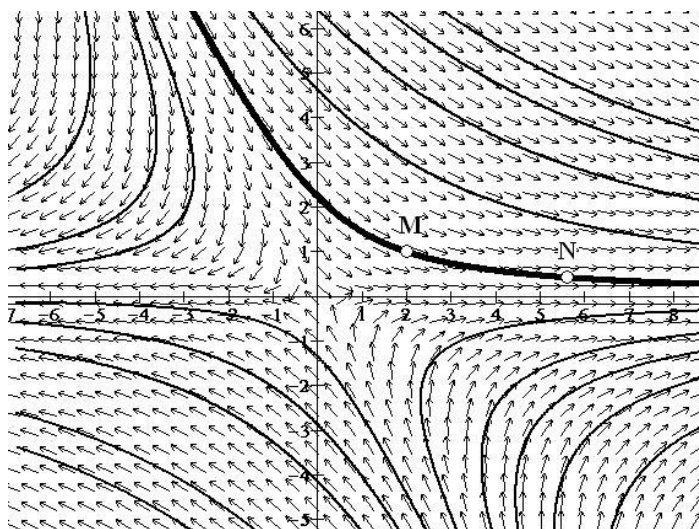
$$x(0) = 2$$

$$y(0) = 1 \quad (5)$$

8.10 irudian, (5) problemako ekuazio diferentzialen tangenteen eremua marraztu dugu, eta baita, bere soluzio batzuk ere. Soluzio hauetariko bakoitza, soluzioa pasa behar den (x_0, y_0) puntu bat zehaztuz lortzen da. Kurba lodiena, $M(2, 1)$ puntutik pasatzen den (5) problemaren soluzioa da:

$$x(t) = e^t + e^{-t}$$

$$y(t) = e^{-t}$$

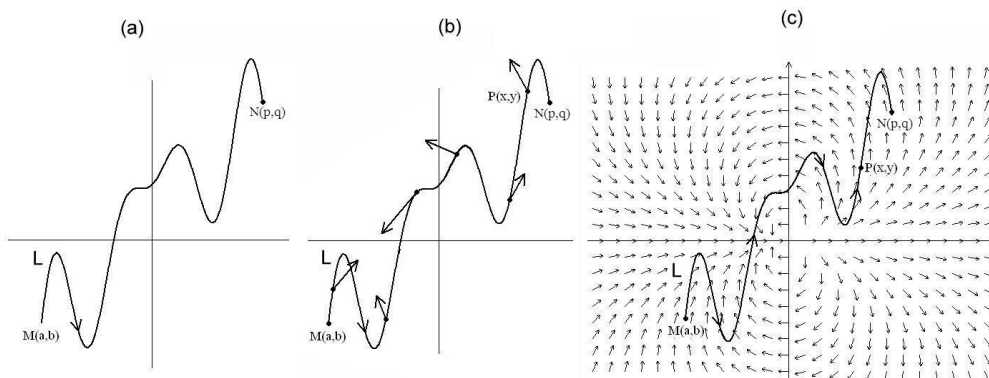


8.10 Irudia: (5) problemako ekuazioen tangenteen eremua

9. gaian, (4) eta (5) problemetan agertzen diren ekuazio diferentzialen modukoak ebazten ikasiko dugu. Oraingoz, nahikoa da, Winplot bezalako programek, zenbakizko metodoen bidez, soluzioa lortzeko aukera ematen digutela jakitea, eta baita, grafikoki adieraztekoa ere. Horrela lortu ditugu aurreko bektore-eremuen eta ibilbideen grafikoak.

Baina buelta gaitzen gure problemara. Nola kalkulatu daiteke $V = (X(x, y), Y(x, y))$ indarrak egiten duen W lana, partikula batek M puntutik N -rako (V -ren eremu-lerro baten norabidean) ibilbidea egiten duenean? Adibidez (ikus 8.10 irudia), zein da (5) problemaren bidez definitutako indarrak egingo duen W lana, partikula bat $M(2, 1)$ puntutik $N(5.56, 0.44)$ -ra eramatean, $x(t) = e^t + e^{-t}$, $y(t) = e^{-t}$ eremu-lerroaren norabidean?

Eta oraindik badago orokorragoa den beste galdera bat: nola kalkulatu V indarrak egindako W lana, edozein ibilbide jarraitzen badu (indar-lerroa ere izan gabe)? Ikus dezagun nola enuntziatzen den problema hau modu orokorrean:



8.11 Irudia: partikula baten ibilbidea

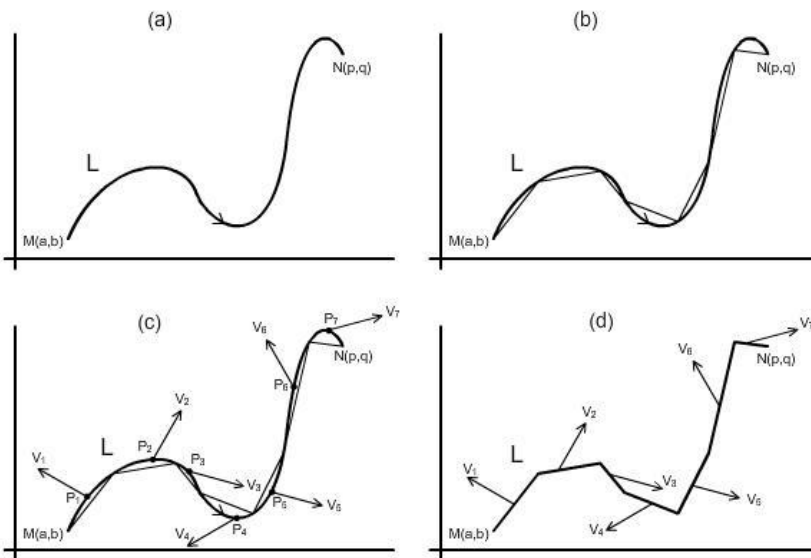
Demagun $P(x, y)$ partikula bat L ibilbidean zehar mugitzen dela, $M(a, b)$ hasierako puntutik $N(p, q)$ -ra (ikus 8.11(a) irudia). Ohartu ibilbideak orientazio bat duela; hau da, L -rentzat ibilbidearen noranzko bat aukeratu dugu. $P(x, y)$ -ren L ibilbidea, $P(x, y)$ -engan eragiten duten indar guztien erresultanteak eragindakoa izango da.

Demagun $V = (X(x, y), Y(x, y))$ bektorea indar horietariko bat dela. V -ren norabidea, noranzkoa eta modulua, indarra eragiten den (x, y) puntuaren arabera izango da orokorrean. 8.11(c) irudian, $V = (X(x, y), Y(x, y))$ indar eremuan "murgilduta" dagoen partikularen ibilbidea marraztu dugu.

8.4. Aztertu 8.11(c) irudian agertzen diren L ibilbidea eta V bektore-eremua. L, V eremuko lerro bat dela uste al duzu?

Problema ondorengoa da: Nola kalkula dezakegu partikula $M(a, b)$ -tik $N(p, q)$ puntura doanean (L ibilbidea jarraituz) $V = (X(x, y), Y(x, y))$ -ek eragindako W lana?

Izango al du erlaziorik horrek aurretik ikasi dugun kontzepturen batekin (deribatua, integrala, etab.)? Soluzioa aurkitzeko ondorengo ideia erabili dezakegu:



8.12 Irudia: L ibilbidearen partiketa

1. Izan bedi L , M eta N puntuak lotzen dituen ibilbide norabideratua (12(a) irudia).
2. L kurba n zatitan banatuko dugu eta lerro poligonal baten bidez hurbilduko dugu. 11(b) irudian $n = 7$ arkuetan banatutako kurba agertzen da.
3. Kurbaren arku bakoitzean P_i puntu bat aukeratzen dugu. P_i puntu bakoitzean V_i indarra definitzen da. 12(c) irudian L kurban aukeratutako P_1, \dots, P_7 puntuak eta puntu hauei dagozkien V_1, \dots, V_7 bektoreak agertzen dira.
4. Orain, L kurbaren hurbilketarekin jarraituko dugu. Demagun lerro poligonalaren C_i zuzenki bakoitzean indarra konstantea dela bere balioa V_i izanik (12(d) irudia).
5. Kalkula dezagun C_i segmentu bakoitzean V_i indarrak egindako W_i lana. Beraz, V_i eta C_i -ren arteko biderkaketa eskalarra egin beharko da (12(d) irudia).
6. W_i -ren n balioen batura egiten dugu. Emaitza, lortu nahi dugun W lanaren balio hurbildua da, hau da: $W \approx W_1 + \dots + W_n$.
7. Kalkula dezagun aurreko adierazpenaren limitea $n \rightarrow \infty$ -rantz doanean arkuen luzerak 0-rantz doazenean.
8. Orduan W ondorengo balioa da:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_i$$

Prozedura hau ez al zaizu gogoratzen integral baten kalkuluaren prozedura?. Hurrengo atalan, eragiketak zehaztuko ditugu eta ikusiko dugu funtzio baten integralak lanaren kalkulua ebatziko duela.

8.2 Lerro integrala planoan.

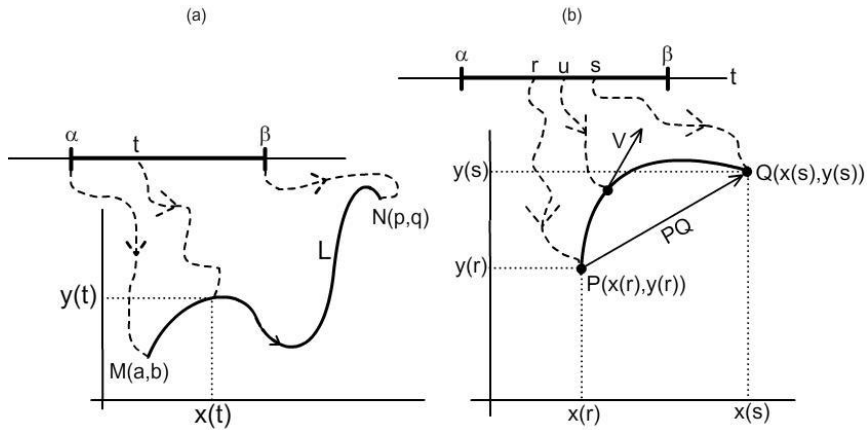
Aurreko atalan deskribatutako prozedura garatuko dugu. Izan bedi $x(t)$, $y(t)$ $t \in [\alpha, \beta]$, L kurbaren parametrizazio bat. 13(a) irudian ikusten denez, L kurbaren $(x(t), y(t))$ puntuak, $t \in [\alpha, \beta]$ parametroari balioak emanez lortzen dira. t -ri, $t = \alpha$ balioa emanez $M(a, b)$ puntua lortzen da, hau da, $x(\alpha) = a$, $y(\alpha) = b$. $N(p, q)$ puntua $t = \beta$ denean lortzen da, hau da, $x(\beta) = p$, $y(\beta) = q$. Har dezagun 13(b) irudia. Irudi honetan kurbaren arku bat marraztu dugu. Arkuaren puntuak, t parametroari $[r, s] \subset [\alpha, \beta]$ azpitartean balioak emanez, lortzen dira. Arkuaren muturrak $P(x(r), y(r))$, $Q(x(s), y(s))$ dira.

V indarra arkuaren hautazko puntu batean kalkulatzen denez, edozein $u \in [r, s]$ hartuko dugu:

$$V = (X(x(u), y(u)), Y(x(u), y(u)))$$

Desplazamendu bektorea $S = PQ = (x(s) - x(r), y(s) - y(r))$ da. 4 adibidean ikusitakoaren arabera, V indarrak egindako W lana, $S = PQ$ zuzenkian zehar, ondorengo eran kalkula daiteke:

$$\begin{aligned} w &= VS = (X(x(u), y(u)), Y(x(u), y(u))) \cdot (x(s) - x(r), y(s) - y(r)) = \\ &= X(x(u), y(u)) \cdot (x(s) - x(r)) + Y(x(u), y(u)) \cdot (y(s) - y(r)) \end{aligned} \tag{8.1}$$

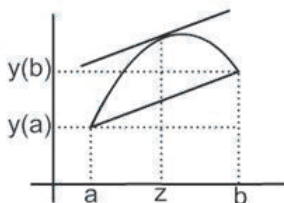


8.13 Irudia: Kurben parametrizazioa.

Har ditzagun (8.1) ekuazioan dauden $(x(s) - x(r))$, $(y(s) - y(r))$ faktoreak. Ezagutzen al dugu teoremaren bat bi gai hauen baiok ematen dituenena?. Bai, Lagrange-ren batezbesteko balioaren teorema. Gogora dezagun bere enuntziatua:

”Izan bedi $y(x)$, $[a, b]$ tartean jarraia eta (a, b) tartean deribagarria den funtzioa. Orduan, badago gutxienez $z \in (a, b)$ non $y'(z) = (y(b) - y(a))/(b - a)$ betetzen den”. Teorema honek badu adierazpen geometriko erraza eta hauxe da: badago gutxienez $z \in (a, b)$ puntu bat non ukitzailea $(a, y(a))$ eta $(b, y(b))$ puntuak lotzen dituen sekantearekiko paraleloa den. Aplikatu dezagun Lagrange-ren teorema $[r, s]$ tartean ondorengo funtzioari:

$$p(t) = X(x(u), y(u))x(t) + Y(x(u), y(u))y(t) \tag{8.2}$$



8.14 Irudia: Batezbesteko baioaren teorema.

Ohar zaitez (8.2) ekuazioan u -ren baioa konstantea eta t aldagaia direla. Lagrange-ren teoremaren arabera, badago $z \in (r, s)$ non $(s - r)p'(z) = p(s) - p(r)$ den, hau da:

$$\begin{aligned} (s - r)(X(x(u), y(u))x'(z)(s - r) + Y(x(u), y(u))y'(z)) &= \\ = X(x(u), y(u))x(s) + Y(x(u), y(u))y(s) - X(x(u), y(u))x(r) - Y(x(u), y(u))y(r) &= \\ = X(x(u), y(u))(x(s) - x(r)) + Y(x(u), y(u))(y(s) - y(r)) = V \cdot S \end{aligned}$$

Beraz, badago $z \in (r, s)$ non ondorengoa betetzen den:

$$W = V \cdot S = X(x(u), y(u))x'(z)(s - r) + Y(x(u), y(u))y'(z)(s - r)$$

u parametroak $[r, s]$ tartean edozein balioa har dezakenez, $u = z \in (r, s)$ balioa aukeratu dugu eta $h = s - r$ eran adieraziko dugu. Orduan:

$$\begin{aligned} W &= V \cdot S = X(x(z), y(z))x'(z)h + Y(x(z), y(z))y'(z)h = \\ &= (X(x(z), y(z))x'(z) + Y(x(z), y(z))y'(z))h \end{aligned}$$

Era honetan, V indarrak egindako W lana L kurbaren arku baten zeharreko balio hurbildua lortu dugu. Prozedura hau arku guztietan errepikatuz, $h = (\beta - \alpha)/n$ hartuz eta hurbilketa hauek batuz hau lortzen da:

$$W \approx \sum_{i=1}^n (X(x(z_i), y(z_i))x'(z_i) + Y(x(z_i), y(z_i))y'(z_i))h$$

$n \rightarrow \infty$ eginez:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (X(x(z_i), y(z_i))x'(z_i) + Y(x(z_i), y(z_i))y'(z_i))h \quad (8.3)$$

Orain arte ikusitakoarekin esan dezakegu (8.3) ekuazioan $g(t)$ funtzio errealaren integrala $[\alpha, \beta]$ tartean agertzen dela non $g(t)$ ondorengo den:

$$g(t) = X(x(t), y(t))x'(t) + Y(x(t), y(t))y'(t) \quad (8.4)$$

Hau da:

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (X(x(z_i), y(z_i))x'(z_i) + Y(x(z_i), y(z_i))y'(z_i))h = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (X(x(z), y(z))x'(z) + Y(x(z), y(z))y'(z)) dz \end{aligned} \quad (8.5)$$

Beraz, (8.5) ekuazioan W lana kalkulatzeko modu bat agertzen da. Prozedura hau da:

1. $V = (X(x, y), Y(x, y))$ indarraren balioa kurbaren $(x(t), y(t))$ puntuetan kalkulatu dugu. Modu honetan indarra, t aldagaiaren menpe lortuko dugu:

$$V(t) = (X(x(t), y(t)), Y(x(t), y(t))), t \in [\alpha, \beta]$$

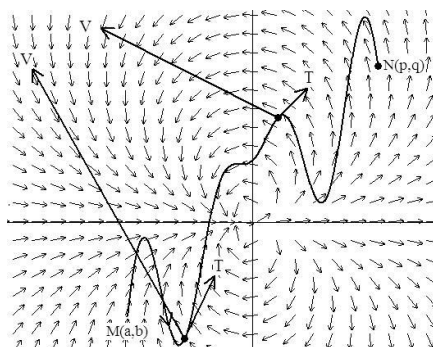
2. Puntu bakoitzean bektore ukitzailea kalkulatu dugu, $T(x'(t), y'(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$
3. T eta V -ren arteko $f(t)$ biderkaketa eskalarra kalkulatu dugu $t \in [\alpha, \beta]$ balio bakoitzarekiko:

$$\begin{aligned} f(t) &= (X(x(t), y(t)), Y(x(t), y(t)))(x'(t), y'(t)) = \\ &= X(x(t), y(t))x'(t) + Y(x(t), y(t))y'(t), t \in [\alpha, \beta] \end{aligned}$$

15 irudian V -ren bektore eremuan murgildutako partikularen ibilbidea erakusten da. Irudian kurbaren bi puntuetan ebaluatzen diren V eta T bektoreak adierazten dira. Ohar zaitez, V eta T bakoitzaren moduluarekin adierazi ditugula. Kurbar zehar mugitu ahala $V \cdot T$ biderkaketa eskalarraren balioa aldatzen denez, bere balioari $f(t)$ deitu diogu.

4. W , $f(t)$ -ren integrala $[\alpha, \beta]$ tartean da.

8.5. Ariketa W kalkulatzeko prozedura esaldi batean laburtu.



8.15 Irudia: V-T bi bikote

8.6. Ariketa Lortutako metodoa erabili $V = (x - y, x + y)$ indarrak egindako lana, partikula bat $M(-1, -3)$ puntutik $N(3, 5)$ puntura doanean, kalkulatzeko. Ondorengo bide desberdinak erabili:

1. $y = x^2 - 4$ parabola.
2. $y = 2x - 1$ zuzena.

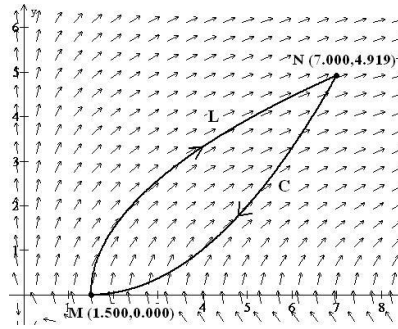
8.7. Ariketa 16 irudian $V = (xy, x + y)$ bektore eremua eta L eta C ibilbideak agertzen dira. Ibilbide horiek $M(1.5, 0)$ eta $N(7, 4.919)$ puntuak lotzen dituzte.

1. Zein izango da V -ek egindako lana ibilbide bakoitzean zehar?
2. Aurreko atalan eman duzun erantzuna egiaztatu kalkuluak eginez eta suposatuz L eta C ondorengo funtzioen bidez adierazten direla:

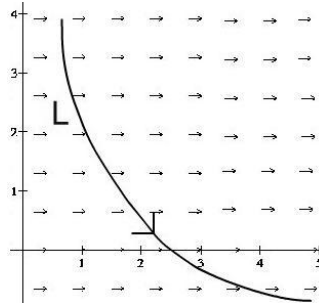
$$f(x) = (4.4(x - 1.5))^{1/2}, g(x) = 4.919(x - 1.5)^2 / (5.5)^2$$

8.8. Ariketa 17 ariketan V indar baten eremu bektoriala eta L eta C ibilbideak agertzen dira. Zein da V -ren lerro integralaren zeinua ibilbide bakoitzean zehar?

8.9. Ariketa Zer gertatzen da L kurbaren ibilbide norantza aldatzen badugu?. Emaitza hau orokortu.



8.16 Irudia: Bi lan.



8.17 Irudia: L -ren araberako lanaren zeinua.

Indar batek egindako lana kalkulatzeko kontzeptu berri bat aurkitu dugu. L kurban zeharreko integral baten kalkulua da. Defini dezagun kontzeptu hau zehazki:

8.1. Definizioa *Izan bedi $V = (X(x, y), Y(x, y))$, $(x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ parametrizazioa duen eta norabideratua den kurbako puntuetan definitutako bektore funtzioa. Izan bitez $M(x(\alpha), y(\alpha))$ eta $N(x(\beta), y(\beta))$ kurbaren hasierako eta bukaerako puntuak hurrenez hurren. V -ren lerro integrala L kurban zehar M eta N puntuen artean, ondorengo eran definitutako balioa da (badago):*

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (X(x(z_i), y(z_i))x'(z_i) + Y(x(z_i), y(z_i))y'(z_i)) h$$

Izan bedi L kurbaren puntu bakoitzean aplikatutako V indarra. Lerro integralaren balioa

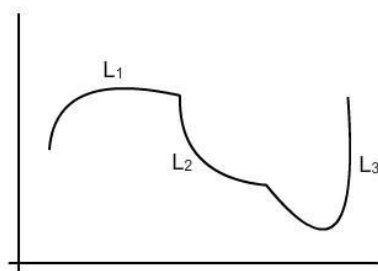
L kurban zehar M eta N puntuen artean, indar horrek egindako W lanaren balioaren berdina da.

Aurkitu dugun emaitza enuntziatuko dugu. Emaitza hau, lerro integralaren existentzia frogatzeko eta bere balioa kalkulatzeko erabiliko dugu:

8.1. Teorema *Izan bitez $x(t)$ eta $y(t)$ jarraiak diren funtzioak non beraien deribatuak $x'(t)$ eta $y'(t)$, $[\alpha, \beta]$ tartean jarraiak diren. Demagun $X(x(t), y(t))$, $Y(x(t), y(t))$ funtzioak jarraiak direla $[\alpha, \beta]$ tartean. Orduan lerro integrala existitzen da eta ondorengo eran kalkulatu daiteke:*

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} (X(x(t), y(t))x'(t) + Y(x(t), y(t))y'(t)) dt$$

8.1 teoremaren hipotesiak ($x(t)$ eta $y(t)$ jarraiak eta deribatu jarraiak dituzten funtzioak dira) betetzen dituen ($x(t), y(t)$) $t \in [\alpha, \beta]$ kurbari leuna deritzo. 8.1 teorema zatika leuna den kurbari ere aplikatu diezaiokegu; hau da: kurba, leunak diren n kurbetan (n finitua izanik) bana daiteke. 18 irudian zatika leuna den kurba agertzen da non kurba, L_1 , L_2 eta L_3 kurba leunen bidez osatuta dagoen. Zatika leuna den kurba baten zeharreko lerro integrala, zati bakoitzean lortutako lerro integralaren balioa batuz lortzen da.



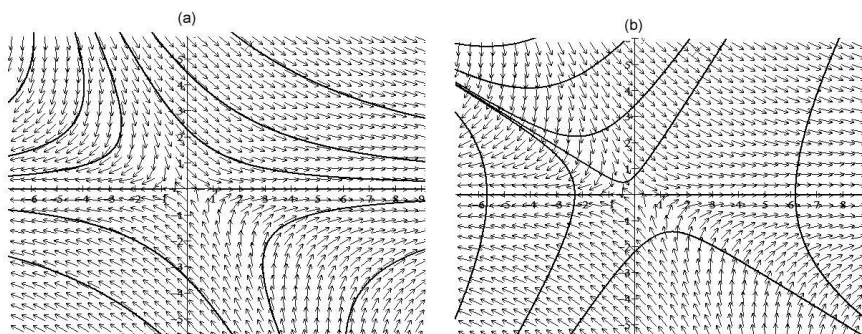
8.18 Irudia: Zatika leuna den kurba bat.

8.10. Ariketa Ikusi dugunez, $V = (X(x, y), Y(x, y))$ bektore eremuaren eremu lerroak, puntu bakoitzean ukitzalea V -ren berdina duten kurbak dira. Hau da, L eremu-lerro bat

$$\begin{cases} x'(t) = X(x, y) \\ y'(t) = Y(x, y) \end{cases}$$

ekuazio diferentzialetako sistemaren $x(t), y(t)$ $t \in [\alpha, \beta]$ soluzio bat da. Adibidez, L , 19(a) irudian agertzen den edozein kurbetako zati bat izan daiteke. Frogatu, kasu honetan lerro integrala kalkulatzeko, $(x(t), y(t))$ kurbaren bektore ukitzailearen moduluaren karratua $[\alpha, \beta]$ tartean integratu behar dela:

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} (x'(t))^2 + (y'(t))^2 dt = \int_{\alpha}^{\beta} \|(x'(t), y'(t))\|^2 dt$$



8.19 Irudia: Ibilbide tangenteak eta ortogonalak.

8.11. Ariketa Izan bedi L, V eremuaren indar lerro bat. Adibidez, L, M eta N puntuak lotzen dituen eta 19(a) irudian dagoen kurbaren edozein zati izan daiteke. V -ek egindako lana maximoa al da L ibilbidean zehar eta M eta N puntuen artean?

8.12. Ariketa Zuhaitz baten hosto bat ibaira erortzen da urak eramaten duelarik. Edo haizeak harri bat lurretik herrestatzen du. Bi egoera hauetan, bektore eremuaren esanahia, ibilbidea eta lerro integralaren esanahia azaldu.

8.13. Ariketa Demagun L ibilbidea $V = (X(x, y), Y(x, y))$ eremuarekiko perpendikularra dela. Hau da, $x(t), y(t)$ $t \in [\alpha, \beta]$ ibilbidea

$$\begin{cases} x'(t) = -Y(x, y) \\ y'(t) = X(x, y) \end{cases}$$

ekuazio diferentzialetako sistemaren soluzio bat da.

Adibidez, L , 19(b) irudian dagoen edozein kurbaren zati izan daiteke(19(a) irudian dauden kurbekiko perpendikularrak dira). Badakigu V indarrak egindako lana zero dela baina froga ezazu:

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0$$

8.14. Ariketa 11 ariketaren pareko egoeretan pentsatu(ibaia eta motor txalupa bat edo arrai bat...). Egora horietan bektore eremuaren esanahia, ibilbidea eta lerro integralaren esanahia azaldu.

8.6. Adibidea Maelstroma, Lotofen uhartedi norvegiarreko hegoaldeko kostaldean, sortutako itsas zurrunbilo handia da. Zurrunbiloa, ur-laster eta kontrako ur-laster indartsuen elkartzean, sortzen da; hauek itsasarte 18 kilometrotan zehar zeharkatzen duten olatuak dira. Maelstrom toponimoa malen (=txikitu) eta stroom (=ur-laster)nederlandar hitz konposatuetatik dator; hau da : “ur-laster birrintzailea”. Antzinan nabigazioentzat oso arriskutsua zen Maelstroma, Edgar Allan Poek eta Julio Vernek erromantikoki deskribatu zuten: Maelstroma itsas hondora iristen den zurrunbilo zirkular erraldoia zen.

Edgar Allan Poek (1809-1849) idazle eta olerkari estatubatuarrak, bere “Maelstroma bidaia” irudipenezko ipuinan, zurrunbiloak harrapatutako arrantzale baten esperientzia beldugarria kontatzen du. Protagonista bizirik atera zen eta hauxe kontatzen du:

”Nere ileak, bezperan bele baten lumak bezain beltzak zirela, zuk oraintxe bertan ikusten duzun bezain txuriak dira. Nere burkideek, aurpegia erabat aldatu zidala ziurtatu zidaten ”

Hau da Julio Vernek (1828-1905) nobelagile frantsesak, bere “20000 legoko itsapeko bidaia” famatuan kontatzen duena: Annorax irakaslea eta bere lagunak, Nemo kapitainaren presoak zirela, ontzitik txalupa hauskor batean ihes egiten saiatzen ari zirean bertan; zurrunbilo erraldoiak, Nautilus harrapatu zuela:

”Maelstrom! Maelstrom!- ohiukatzen zuten denak. Maelstroma!. Hain beldugarria litzatekeen egoera batean izen horren bidez gure belarriak burrunbata izan genituzke?. Noruegako kostaldeko inguru arriskutsuetan geunden eta”

Adibide honetan Maelstrom bat simulatuko dugu. Ikusi 20(a) irudian dagoen bektore eremua eta 20(b) irudiko ibilbidea. Ibilbide honen hasierako puntua $(0, 1)$ da eta ibilbidea $(0, 0)$ erakarpen punturantz espiral antzera dijoa. Planoaren (x, y) puntu bakoitzean $V = (8y - x, -8x - y)$ bektorea erabili dugu. $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ puntutik pasatzen den

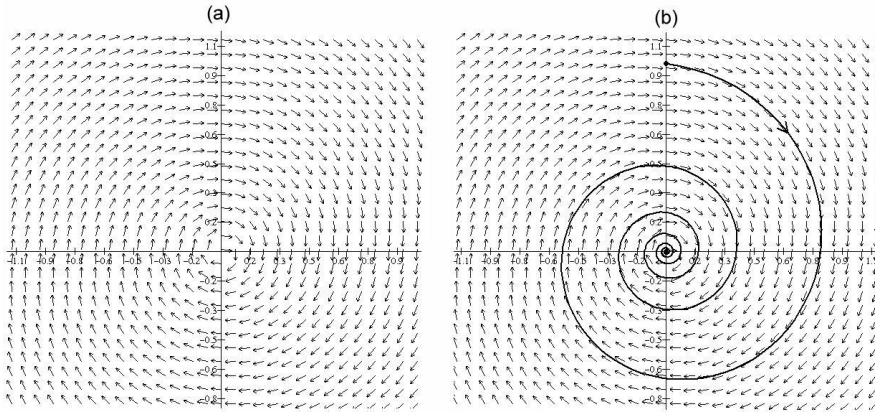
$(x(t), y(t))$ ibilbidea (indar lerroa edo korrante lerroa) V -rekiko paraleloa izango da; hau da: ondorengo ekuazio diferentzialetako problemaren soluzioa izango da:

$$\begin{aligned}x'(t) &= 8y - x \\y'(t) &= -8x - y \\x(0) &= 0, y(0) = 1\end{aligned}\tag{8.6}$$

Frogatu (8.6) problemaren soluzioa (Nautilus-en ezinbesteko ibilbidea) ondorengo dela:

$$\begin{aligned}x(t) &= e - t \sin(8t) \\y(t) &= e - t \cos(8t)\end{aligned}\tag{8.7}$$

Ohar zaitetz, honen arabera, Nautilus ez zela inoiz $(0, 0)$ puntura iritsiko baizik eta bertirako jatorritik gero eta hurbilago dauden ibilbideak jarraituko zituela. $t \rightarrow \infty$ denean $x(t) \rightarrow 0$ eta $y(t) \rightarrow 0$ dira.

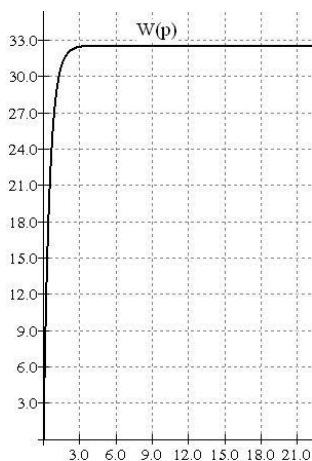


8.20 Irudia: Maelstrom.

Zein da Maelstromen indarrak egindako lana (8.7) ezinbesteko ibilbidean zehar eta $t = 0$ eta $t = p$ puntuen artean? 8.10 ariketaren arabera ondorengo da:

$$\begin{aligned}\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy &= \int_\alpha^\beta ((x'(t))^2 + (y'(t))^2) dt \\W &= \int_0^p ((x'(t))^2 + (y'(t))^2) dt = 65 \int_0^p e^{-2t} dt\end{aligned}$$

Betiko Maelstrom-en lana $W(\infty) = 32.5$ izango litzateke. $[0, 3]$ tartean indarrak $W(3) = 32.419$ lana egiten du. Beraz, lanaren %99.75a $[0, 3]$ tartean egiten da. 21 irudian $W(p)$ -ren grafikoa agertzen da. $p = 3$ -tik aurrera grafikoa ia-ia laua da.



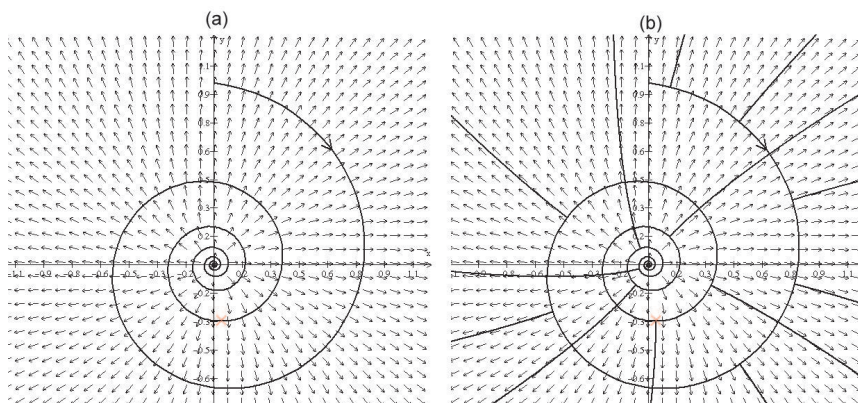
8.21 Irudia: Maelstromen lana.

Baina Nautilus-ek Maelstrometik ihes egiten du; egile berberaren “Irla misteriotsua” nobelan agertzen baita. Nautilus-ek gure simulatutako Maelstrometik ihes egin zezakeen $V = (8y - x, -8x - y)$ indarraren zurrunbiloak egindako lana nulua izango balitz. Hau da, V -rekiko perpendikularra den U indar eremu bat sortu beharko luke; beraz, $U = (8x + y, 8y - x)$. Orduan, Nautilus-ek (x_0, y_0) abiapuntutik jarraituko lukeen $(x(t), y(t))$ ibilbide salbatzailea ondorengo problemaren soluzioa izango litzateke:

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= 8x + y \\
 y'(t) &= 8y - x \\
 x(0) &= x_0 \\
 y(0) &= y_0
 \end{aligned}
 \tag{8.8}$$

(8.22)(a) irudian ibilbide hilgarria azaltzen da U bektore-eremu salbatzailean sartuta. (8.22)(b) irudian azaltzen dira ere ibilbide hilgarriko (x_0, y_0) puntu desberdinetatik ateratzen diren ibilbide salbatzaile batzuk, eta guzti hauek aurreko sistemaren soluzioak dira. Adibide gisa, egiaztatu aurreko sistemaren soluzioa honako hau dela:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{8t}(y_0 \sin t + x_0 \cos t) \\y(t) &= -e^{8t}(x_0 \sin t - y_0 \cos t)\end{aligned}\tag{8.9}$$



8.22 Irudia: Ibilbide hilgarria eta ibilbide salbatzaile batzuk

Eta zein da Nautilusek Maelstrometik ateratzeko egin behar duen lana? Ontziak sortu-tako bektore-eremua $U = (8x + y, 8y - x)$ da eta ibilbideak (8.9) adierazpenak emandakoak dira. Suposa dezagu eremu arriskutsua zentroa jatorrian duen 2 erradioko zirkulu bat dela (ikusi (8.23) irudia). $M(x_0, y_0)$ hasierako puntu desberdinetatik segurtasun eremura joateko Nautilusek egindako lana kalkulatu dugu.

Ikusi (8.23) irudia. Suposa dezagun hasierako puntua $M(0.408, 0.853)$ dela. Ibilbide salbatzailea, (8.9)-ren arabera, honako hau izango da:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{8t}(0.853 \sin t + 0.408 \cos t) \\y(t) &= -e^{8t}(0.408 \sin t - 0.853 \cos t)\end{aligned}$$

Bukaerako puntura, $N(1.031, 1.7414)$, $t = 0.1$ denean iristen da. U -k egindako lana modu honetan kalkula daiteke:

$$W = \int_0^1 ((x'(t))^2 + (y'(t))^2) dt = 14.36$$

Balio hau ikaragarria da, Maelstromek ibilbide hilgarri osoan egindako lanaren %44 bait da!

Suposa dezagun orain hasteko puntua $M(0.163, 0.078)$ dela. Ibilbide salbatzailea, (8.9)-ren arabera, hau izango da:

$$x(t) = e^{8t}(0.078 \sin t + 0.163 \cos t)$$

$$y(t) = -e^{8t}(0.163 \sin t - 0.078 \cos t)$$

Bukaerako puntua $N(1.978, 0.294)$ da, eta $t = 0.3$ momentuan iristen da. Beraz, U -k egindako lana:

$$W = \int_0^{0.3} ((x'(t))^2 + (y'(t))^2) dt = 15.98$$

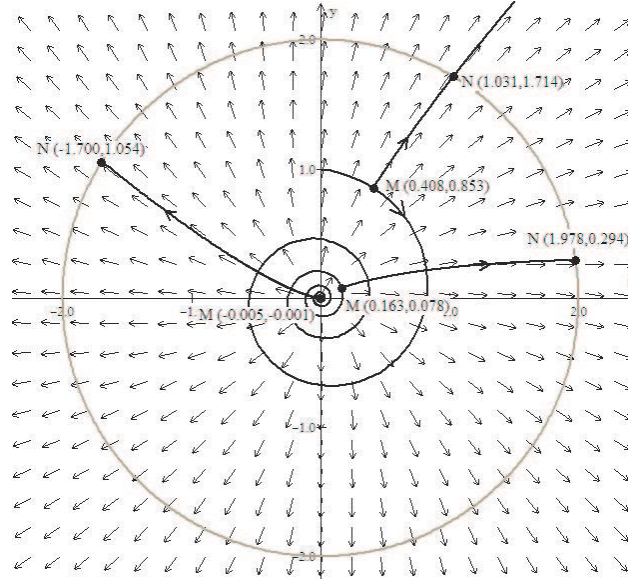
Egin behar duen lana, orain, Maelstromek ibilbide hilgarri osoan egindako lanaren %49 izango da. Modu berdinean egiazta dezakegu Nautilusek egindako lana $[0, 0.746]$ denborako tartean, $M(-0.005, -0.001)$ eta $N(-1.7, 1.105)$ puntuak lotzen dituen U -ren indarraren lerroa jarraitzerakoan, $W = 16.15$ izango dela, Maelstromek egindako lan osoaren %49.7.

8.15. Ariketa Suposa dezagun Nautilusek ezin duela egin Maelstrometik ateratzeko beharrezkoa den lan izugarria. Orduan, Nemo kapitainak jatorriaren inguruan ibilbide zirkular bat jarraitzea erabakitzen du, Maelstrom desagertu arte.

- Frogatu Nautilusek egin behar duen lana W zentrua jatorria duen R erradioko ibilbide zirkularra jarraitzeko, erlojuen orratzen norantzan, zirkuluaren azalerarekiko proportzionala dela.
- Frogatu Maelstromek ibilbide berberan egindako lana ere zirkuluaren azalerarekiko proportzionala dela.
- Suposa dezagun Nautilusek biraketa zirkular bakoitzean egin dezaken lana $W = 6.28$ dela. Zein da Nautilusek jarrai dezaken ibilbidearen R erradioa? Zein izango da Maelstromek biraketa bakoitzean egingo duen lana?

8.7. Adibidea Har dezagun berriro lehenago ikusi dugun hiru masek sortutako grabitazio-eremuko adibidea. Han, grabitazio-indarren V eremuaren eredu bat eraiki genuen, $F(x, y)$, $G(x, y)$ eta $H(x, y)$ funtzio potentzialeko hiru masen ordezkaria zena:

$$\begin{aligned} V &= \text{grad}(F + G + H) = \text{grad}(F) + \text{grad}(G) + \text{grad}(H) = \\ &= (F_x(x, y) + G_x(x, y) + H_x(x, y), F_y(x, y) + G_y(x, y) + H_y(x, y)) \end{aligned}$$



8.23 Irudia: Ibilbide salbatzaileak

Beraz, V -rekiko perpendikularra den U eremua hau izango da:

$$U = (-Fy(x, y) - Gy(x, y) - Hy(x, y), Fx(x, y) + Gx(x, y) + Hx(x, y)) \quad (8.10)$$

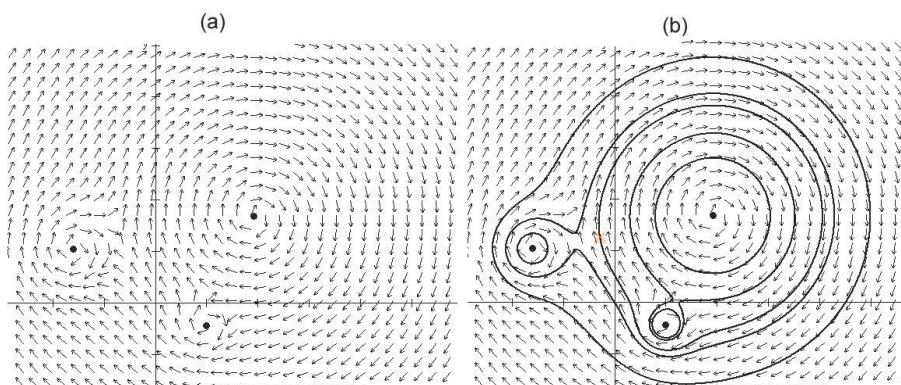
Ondorioz, partikula batek $(x(t), y(t))$ ibilbide bat jarraitzeko, masa bat jo gabe, (8.9)-rekiko perpendikularra den norabide bat jarraitzea nahikoa da, hau da $(x(t), y(t))$ kurbak honako ekuazio diferentzial hauek betetzen ditu:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -F_y(x, y) - G_y(x, y) - H_y(x, y) \\ y'(t) &= F_x(x, y) + G_x(x, y) + H_x(x, y) \end{aligned} \quad (8.11)$$

(8.24)(a) irudian U eremua azaltzen da eta (8.24)(b) irudian (8.11) sistemaren soluzio batzuk. Soluzio guztiak V indar eremuan orbitatzen den satelite artifizial batek jarrai ditzaken orbita egonkorak dira. Orbita guztietan egindako V lana nulua da.

8.3 Lerro-integrala espazioan

Lerro-integrala planoan definitzeko eta indar batek egindako lana kalkulatzeko erabili gedituen ideia berberak espazioan aplikatu ditzakegu. Orain indar-bektorea (eremu bektoriala)



8.24 Irudia: Ibilbide egonkorak

$V = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$ moduan adieraziko da, non $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$ eta $Z(x, y, z)$ espazioko R eremuan definitutako funtzioak diren. L ibilbidearen parametrizazio bat $(x(t), y(t), z(t))$ $t \in [\alpha, \beta]$ da.

Adibidez, M masa batek sortutako grabitazio-eremua modelatzeko bektore eremu bat eraiki dezakegu, planoan egin genuen bezala, baina orain espazioan. Gradienteen eremuaren funtzio potentziala definitzen dugu:

$$F(x, y, z) = \frac{M}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

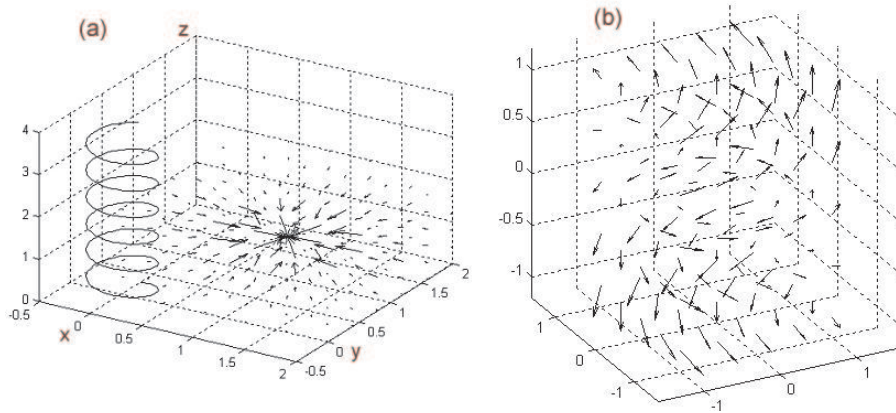
Orduan, lortutako gradienteen eremua, V , hau da:

$$V = \text{grad}(F) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$$

(8.25)(a) irudian $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ puntuan dagoen $M = 1$ masa baten V gradiente-eremua azaltzen da. Irudi honetan bektoreak ez daude normalizatuta, bakoitza bere moduluarekin azaltzen da. Gradientea puntu bakoitzean $(1, 1, 1)$ punturantz orientatzen da, puntu honetan masa dagoelako, eta bere modulua handitzen da $(1, 1, 1)$ puntura hurbiltzen denean. Horrez gain, irudi honetan agertzen da ere L ibilbide posible bat, $x(t) = 0.3 \sin(t)$, $y(t) = 0.3 \cos(t)$, $z(t) = 0.1t$, $t \in [0, 12\pi]$ kurba helikoidala. (8.25)(b) irudian $V = (-y, x, z)$ bektore eremua azaltzen da.

Orain, kasu bidimentsionalean egin genuen galdera berbera planteatzen dugu: Nola kalkulatu daiteke V indarrak egindako lana partikula bat M puntutik N puntura joaten denean?

8.16. Ariketa Lerro integrala hiru dimentsioetan definitzeko jarraitu behar diren pausoak formalki garatu. Garapenaren eskema bat honako hau da:



8.25 Irudia: Gradiente eremuak

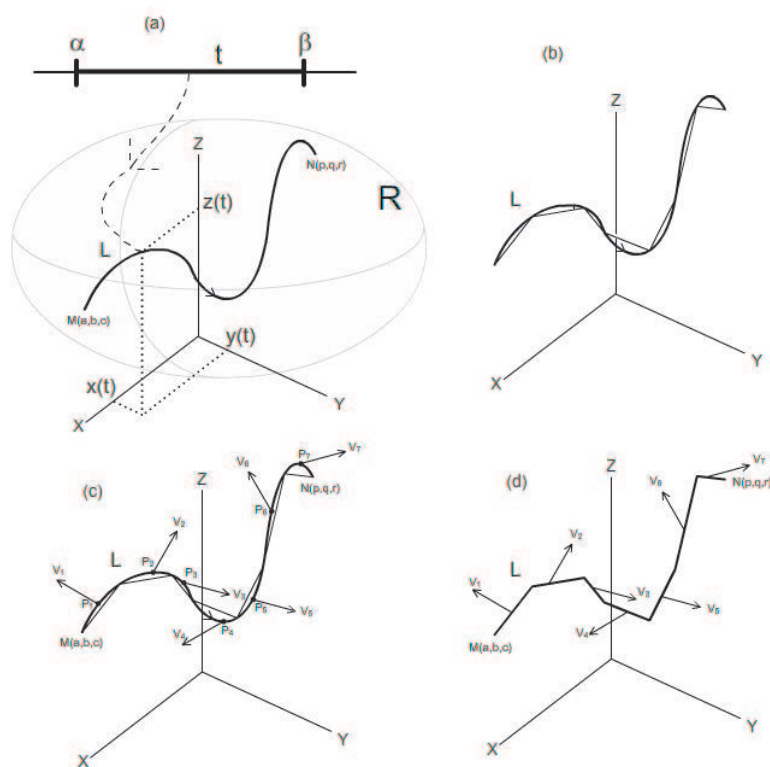
1. Har dezagun espazioko R eremuan definiturik dagoen $V = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$ indarra. Partikula bat $x(t), y(t), z(t)$ $t \in [\alpha, \beta]$ parametrizazioak emandako R -ren L kurbatik mugitzen da (ikus (8.26)(a) irudia). Kalkulatu nahi duguna partikula $M(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ puntutik $N(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ puntura joaterakoan V indarrak egindako lana da.
2. L kurba n arkuetan zatitzen dugu eta lerro poligonalaren bidez hurbiltzen dugu. (8.26)(b) irudian ikus dezakegu kurba bat $n = 7$ arkuetan zatituta.
3. Kurbaren arku bakoitzean P_i puntu bat aukeratzen dugu. P_i puntu bakoitzean V_i indar-bektorea definituta dago. (8.26)(c) irudian P_1, \dots, P_7 L -ren zazpi puntuen aukera posible bat eta V_1, \dots, V_7 bektoreak ikusten dira.
4. L kurbarekin ordeztu, hurbilketa poligonalarekin landuko dugu. Hurbilketa egiteko suposatuko dugu lerro poligonalaren C_i zuzenki bakoitzean indar-bektorea konstantea dela, bere balioa V_i izanik ((8.26)(d) irudia).
5. C_i zuzenki bakoitzean V_i indarrak egindako w_i lana kalkulatzeko dugu (zuzenkian indar-bektorea konstantea dela suposatu dugu).
6. w_i guztien balioak batu egiten dugu. Emaitza kalkulatu nahi dugun W lan osoaren hurbilketa bat da, $W \cong w_1 + \dots + w_n$.
7. Arkuen kopurua, n , ∞ -rantz aldatzen dugu, bakoitzaren luzera 0-rantz joaten direla kontutan hartuz.

8. Kalkulatu nahi genuen W balioa:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n w_i = \int_L X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz$$

9. Beharrezkoak diren baldintza guztiak betetzen direnean:

$$\begin{aligned} \int_L X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz &= \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + Z(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt \end{aligned}$$



8.26 Irudia: Kurbaren hurbilketa lerro poligonal batekin

8.17. Ariketa Grafikoki adierazi $z = y^2$, $x = 2$, $y \in [1, 3]$ baldintzek definitutako L kurba. Honako integral honen balioa kalkulatu:

$$\int_L (x + y + z)dx + (-x + y - z)dy + (2x - y + z)dz$$

8.4 Lerro-integrala gradiente eremu batean

$V = (X(x, y), Y(x, y))$ eremu bektorial ugari funtzio baten gradienteak dira. Honek esan nahi du existitzen dela $F(x, y)$ funtzio erreal bat non:

$$\begin{aligned} X(x, y) &= F_x(x, y) \\ Y(x, y) &= F_y(x, y) \end{aligned}$$

$F(x, y)$ eremuaren funtzio potentziala deitzen da. Adibidez, funtzio potentziala $F(x, y) = x^2 + y^2$ bada, gradienteen eremua $V = (2x, 2y)$ izango da.

$F(x, y)$ funtzio baten gradiente bezala lortutako eremua bat *eremu kontserbakorra* deitzen da. Grabitazio-eremua eta eremu elektrikoa dira eremu kontserbakorren garrantzizko bi adibide fisiko. Ordea, eremu magnetikoa ez da kontserbakorra, hau da, ez da $F(x, y)$ funtzio baten funtzio potentziala.

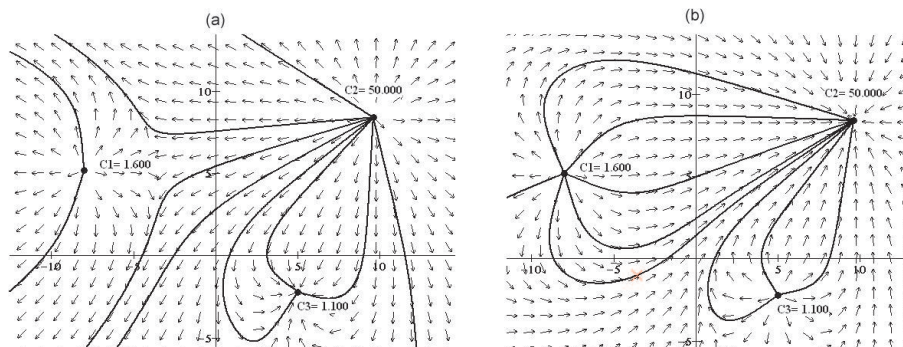
8.8. Adibidea Eremu elektriko bat simulatzea grabitazio-eremua simulatzea bezain erraza da, baina orain kontutan hartu behar dugu indarra izan daitekela erakargarria (zeinu desberdineko kargak) edo aldaragarria (zeinu berdineko kargak). V $M(a, b)$ puntuan dagoen C kargak sortutako eremu elektrikoa bada, $P(x, y)$ puntuan dagoen unitateko kargan aplikatzen den indarra C -rekin proportzionala da eta P eta M -ren arteko distantziarekin alderantzizko proportzionala. Horrela, V ondorengo funtzio potentzialaren gradiente bezala modeliza daiteke:

$$F(x, y) = \frac{C}{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

Ohartu funtzio hau grabitazio-eremuko simulazioko adibidean lortu genuen funtzio berbera dela, baina C koefiziente orain positiboa edo negatiboa izan daiteke. Orduan V -n, F -ren gradiente-eremuan, sartuta dagoen karga batek jarraituko duen $(x(t), y(t))$ ibilbidea kalkulatzeko modeloa hau izan daiteke:

$$\begin{aligned} x'(t) &= F_x(x, y) \\ y'(t) &= F_y(x, y) \end{aligned}$$

Grabitazio-eremuaren simulatzailea berriro erabiltzen badugu, eremu elektriko bat simula dezakegu. Ikusi (8.27) irudia. C_1 , C_2 eta C_3 kargek sortutako eremuak azaltzen dira, non kargen moduluak $C_1 = 1.6$, $C_2 = 50$ eta $C_3 = 1.1$ dira, baina ez dugu bakoitzaren zeinua ezagutzen. Eremu-lerro batzuk azaltzen dira ere. Esan dezakezu kasu bakoitzean zein da C_1 , C_2 eta C_3 -ren zeinua, eremuan utzitako unitateko kargaren zeinua eta kurben zehar ibiltzeko norantza?



8.27 Irudia: Hiru kargek sortutako eremu elektrikoak

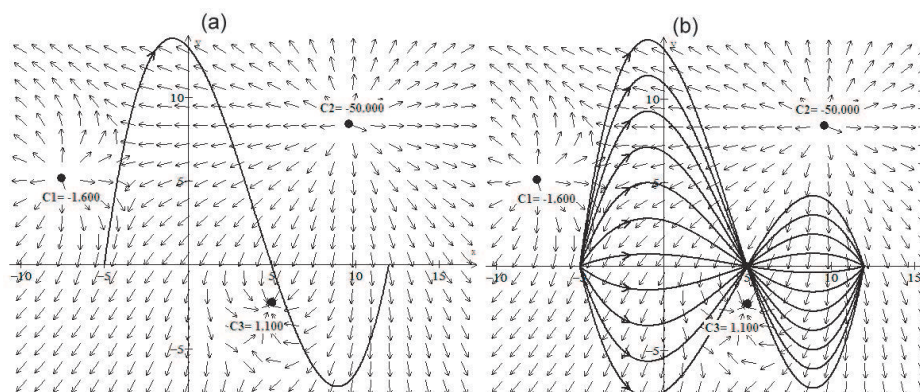
Suposa dezagun orain C karga negatiboa V eremu elektriko kontserbakorraren edozein ibilbidetan mugitzen dela. (8.28)(a) irudian azaltzen dira eremu elektrikoa eta $M(-5, 0)$ eta $N(12, 0)$ puntuak lotzen dituen $y = 0.04325(x+5)(x-5)(x-12)$, $x \in [-5, 12]$ adierazpenak emandako L kurba. Winplot erabiliz lerro-integralaren balioa kalkulatu dugu (hau da, C karga M -tik N -ra L -ren zehar joateko V -k egindako W lana). Balio hau $W = -0.40958$ da.

Baina orain dator harritzekoa. Eragiketa errepikatu dugu M eta N puntuetatik pasatzen diren (8.28)(b) irudian adierazitako kurba guztiekin eta lortutako balioa kasu guztietan berdina izan da, $W = -0.40958$.

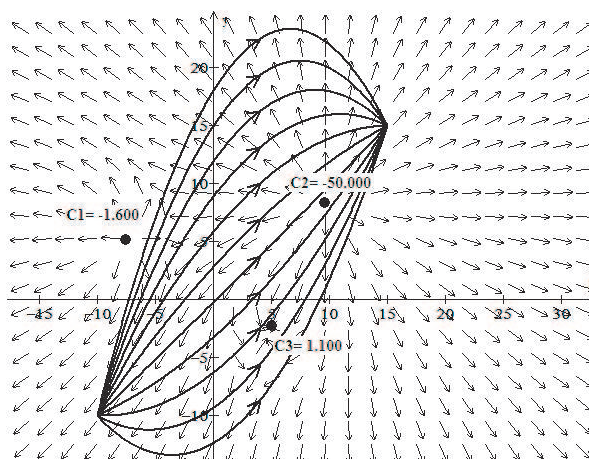
Gauza bera errepikatu dugu $M(-10, -10)$ eta $N(15, 15)$ puntuetatik pasatzen diren $y = A(x+10)(x-15)+x$, $x \in [-10, 15]$ (A parametro erreal bat da) familiako kurba batzuk kontsideratuz. (8.29) irudian adierazi ditugu. Indarrak egindako lana, kurba guztiekin, $W = -0.59189$ da.

Hau da, dirudienez eremu honetan lerro-integralaren balioa ez dago L kurbaren menpe, baizik eta bakarrik hasierako eta bukaerako puntuen menpe. Kasualitatea izango al da? Eremu elektrikoetan bakarrik gertatuko da? Ala eremu kontserbakor GUZTIEN propietatea izango da?

8.18. Ariketa Suposa dezagun V bektore eremu kontserbakorraren funtzio potentziala



8.28 Irudia: Ibilbide guztietan lana berdina da



8.29 Irudia: Indarrak egindako lana berdina da kurba guztietan

$F(x, y) = x^2 + xy$ dela. $y = A(x + 3)(x - 4) + x^2$ familiako kurba guztiak $M(-3, 9)$ eta $N(4, 16)$ puntuetatik pasatzen dira.

- Frogatu M -tik N -rako lerro integralaren balioa A -ren parametroarekiko independenta dela.
- Har ezazu orain M eta N puntuen arteko edozein ibilbide $Ax(t), y(t)$. Zein da lerro-integralaren balioa? Emaitza kontutan hartuz, zein da atera dezakezun ondorioa?

Orain, propietate hau edozein eremu kontserbakorretan betetzen dela frogatuko dugu. Horretarako $V = (F_x(x, y), F_y(x, y))$ eremu kontserbakorraren lerro integralaren balioa kalkulatu dugu, $(x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ parametrizazioak emandako L kurban zehar, eta aukeratu dugun kurbarekiko independentea dela ikusiko dugu.

Hasierako puntua $M(x(\alpha), y(\alpha))$ izango da, eta bukaerakoa $N(x(\beta), y(\beta))$. Lehenengo teoreman ikusi genuenez:

$$\int_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_\alpha^\beta (X(x(t), y(t))x'(t) + Y(x(t), y(t))y'(t)) dt$$

$X(x, y) = F_x(x, y)$ eta $Y(x, y) = F_y(x, y)$ direnez:

$$\int_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_\alpha^\beta (F_x(x(t), y(t))x'(t) + F_y(x(t), y(t))y'(t)) dt$$

Orain, $F(x(t), y(t))$ funtzio konposatua deribatzen katearen erregela gogoratu:

$$\frac{d}{dt}(F(x(t), y(t))) = F_x(x(t), y(t))x'(t) + F_y(x(t), y(t))y'(t)$$

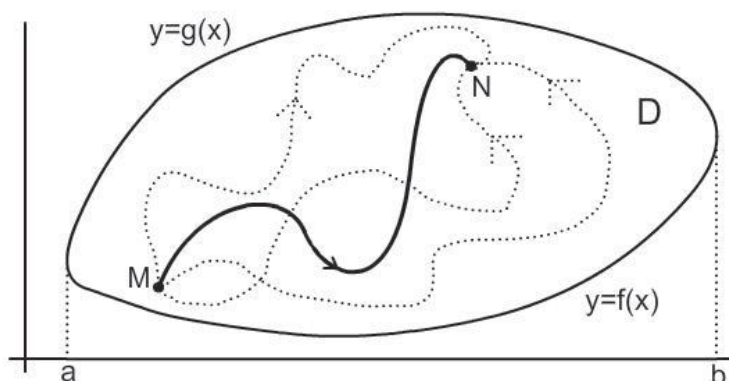
Eta ondorioz:

$$\int_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy = F(x(t), y(t)) \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = F(x(\beta), y(\beta)) - F(x(\alpha), y(\alpha)) = F(N) - F(M)$$

Beraz, lerro-integralaren balioa M eta N , hasierako eta bukaerako balioen menpekota da eta ez jarraitzen den ibilbidearena. Integralaren balioa kalkulatzeko, M eta N -ren arteko potentzialaren diferentzia kalkulatzeko nahikoa da. Goazen emaitza hau formalki enuntziatzera:

8.2. Teorema *Izan bedi D $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioek mugatutako eremu laua, ($f(x) \leq g(x)$) $x \in [a, b]$ izanik (ikus 8.30 irudia). Suposa dezagun $F(x, y)$ funtzioa eta bere deribatu partzialak, $F_x(x, y)$ eta $F_y(x, y)$, jarraituak direla D eremuan. $V = (X(x, y), Y(x, y))$ bektore eremu kontserbakorra eraikitzen dugu, bere funtzio potentziala $F(x, y)$ izanik, hau da, $X(x, y) = F_x(x, y)$ eta $Y(x, y) = F_y(x, y)$. Suposa dezagun M eta N D eremuaren edozein bi puntu direla eta L D eremuan sartuta dagoen edozein kurba jarraitua eta deribagarria dela deribatua jarraitua izanik ((8.30) irudian kurba posible batzuk azaltzen dira). Orduan, V eremuaren lerro integralaren balioa M -tik N -ra ez da L -ren menpekota eta gainera:*

$$\int_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy = F(N) - F(M)$$

8.30 Irudia: M eta N -ren arteko ibilbide desberdinak

Teorema honen ondorioz, baldintza nahikoak betetzen badira, ez da beharrezkoa integrala kalkulatzeko erabiliko dugun L kurba azaltzea, M eta N puntuak esatea nahikoa da. Horregatik integrala honako modu honetan adieraz daiteke:

$$\int_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_M^N X(x, y)dx + Y(x, y)dy = F(N) - F(M) \quad (8.12)$$

Ikus dezakezunez, (8.12) erlazioa eta aldagai bateko funtzio baten integrala kalkulatzeko erabiltzen den Barrow-en erregela antzekoak dira. Kasu honetan, “jatorrizko funtzioa” $F(x, y)$ funtzio potentziala izango da eta “integrazio limiteak” M eta N puntuak. Gainera, “jatorrizko funtzioa” orain ere ez da bakarrik $F(x, y) + K$ edozein K konstanterako beste funtzio potentziala bait da. Hala ere, $F(N) - F(M)$ balioaren kalkulua ez da aldatzen K -ren aldaketarekin (zergatik?).

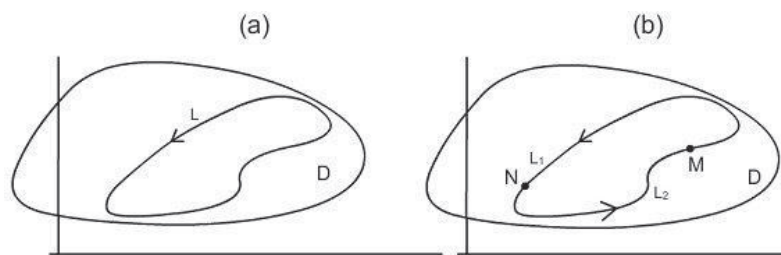
8.19. Ariketa (8.16) ariketako eremu kontserbakorra harturik, $M(-3, 9)$ eta $N(4, 16)$ puntuen arteko lerro-integrala kalkulatu, emaitza ariketa hartan lortu zenuen balioa egiaztatuz.

Eta zer gertatzen da eremu kontserbakor batean lerro-integrala kalkulatzekoan ibilbidea itxia bada, hau da, si $M = N$ badira? Orduan, lerro-integrala honela adierazten da:

$$\oint_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy$$

Lerro itxiaren norantza, kontrakoa ez bada esaten, erlojuaren orratzen aurkakoa dela suposatzen da.

Ikusi (8.31)(a) irudia, D barruan dagoen L ibilbide itxi bat adierazi dugu.



8.31 Irudia: L ibilbide itxia da

(8.31)(b) irudian ikusten denez, M eta N L -ren edozein bi puntu harturik, L kurba bi ibilbideetan deskonposatzen da, L_1 eta L_2 , eta horrela:

$$\oint_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_{L_1} X(x, y)dx + Y(x, y)dy + \int_{L_2} X(x, y)dx + Y(x, y)dy$$

Baina L_1 eta L_2 ibilbideak M -tik N -ra doaz aurkako norantzak jarraituz. Beraz:

$$\int_{L_2} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = - \int_{L_1} X(x, y)dx + Y(x, y)dy$$

Orduan:

$$\oint_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_{L_1} X(x, y)dx + Y(x, y)dy - \int_{L_1} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = 0$$

Emaitza honek esaten digu V eremu kontserbakor batean V indarrak egiten duen lana partikularen ibilbidea itxia denean, nulua dela. Enuntzia dezagun emaitza berri hau:

8.3. Teorema $V = (X(x, y), Y(x, y))$ eremu kontserbakorra, eta L ibilbide itxia baldin badira, orduan

$$\oint X(x, y)dx + Y(x, y)dy = 0$$

Teorema honen alderantzizkoa ere egia da. Hau da, froga daiteke

$$\oint X(x, y)dx + Y(x, y)dy = 0$$

D eremuan dagoen edozein L kurba itxientzat betetzen denean, V eremua kontserbakorra da, hau da, D -n $Y_x(x, y) = X_y(x, y)$ betetzen dela.

Beste era baten, V , eremu kontserbakorean partikula lerro itxi baten zehar mugitzen denean V -k egiten duen lana nulua da, eta alderantziz partikula edozein lerro itxiren zehar mugitzen denean V -k egindako lana nulua denean V nahi eta nahi ez kontserbakorra da.

8.20. (8.32) irudian sei bektore-eremuen adierazpenak ditugu. Esan dezakezu zeintzuk ez dira kontserbakorrak?

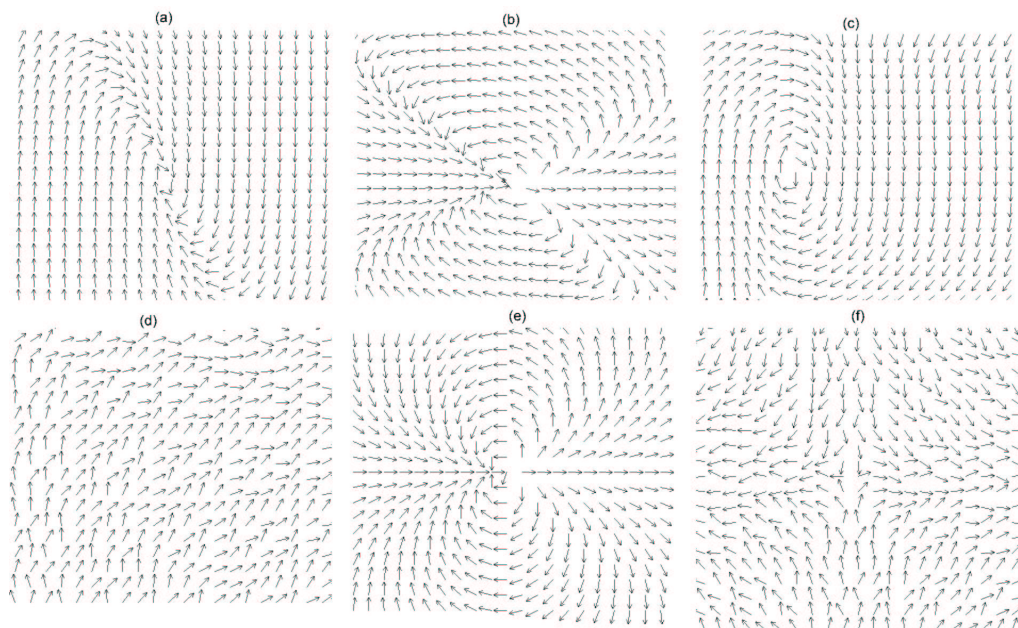
(8.2 eta (8.3 teoremek lerro-integralak lortzeko lana erretzen dute $V = (X(x, y), Y(x, y))$ eremua kontserbakorra denean. Funtzio potentziala $F(x, y)$ izanik, L kurba itxia denean integrala nulua da, eta itxia ez denean integrala ez da aldatuko L -ren arabera, beti hasiera eta bukaerako puntuen potentzialen diferentzia, $F(N) - F(M)$, izango da.

Eremua kontserbakorra den ala ez aldeztu aurretik ez dugu jakiten. Gehienetan, $V = (X(x, y), Y(x, y))$ eremuaren lerro-integrala L ibilbidearen zehar lortu beharko dugu, kontserbakorra den ala ez jakin gabe. Hau da, (8.13) baldintza betetzen duen $F(x, y)$ funtzioa dagoen ala ez jakin gabe.

$$\begin{aligned} X(x, y) &= F_x(x, y) \\ Y(x, y) &= F_y(x, y) \end{aligned} \tag{8.13}$$

Nola jakin dezakegu $V = (X(x, y), Y(x, y))$ eremua kontserbakorra den ala ez? Demagun badela (8.13) berdintzak betetzen dituen $F(x, y)$ potentzial funtzioa. Lehenengo ekuazioa y -rekiko eta bigarrena x -rekiko deribatuz

$$\begin{aligned} X_y(x, y) &= F_{xy}(x, y) \\ Y_x(x, y) &= F_{yx}(x, y) \end{aligned} \tag{8.14}$$



8.32 Irudia: Bektore-eremuak

lortzen ditugu. Bi aldagaiko funtzioen Schwartz teoremaren hipotesiak betetzen direnean $F_{xy}(x, y) = F_{yx}(x, y)$ beteko da, eta horrela (8.14) berdintzak beste honekin baliokideak dira.

$$X_y(x, y) = Y_x(x, y) \quad (8.15)$$

Beraz, (8.15) baldintza eremua kontserbakorra den ala ez erabakitzeke erabil dezakegu. $X(x, y)$ eta $Y(x, y)$ funtzioak (8.15) baldintza betetzen badute eremua kontserbakorra da eta $F(x, y)$ (8.13) baldintza betetzen duen potentzial funtzioa dago. Schwartz teoremaren baldintzak gogoratu teoremaren enuntziatua era honetan gelditzen da.

8.4. Teorema Demagun D eremua (ikus ?? irudia) $f(x)$, $g(x)$, $x \in [a, b]$ funtzioak mugatzen duten eremua dela. Demagun $X(x, y)$ eta $Y(x, y)$ D -n deribatu partzial jarraituak, $X_y(x, y)$, $Y_x(x, y)$, dituzten funtzio jarraituak. Orduan, $F(x, y)$, $X_y(x, y)$, $Y_x(x, y)$ betetzen dituen potentzial funtzioa dago baldin eta soilik baldin, $X_y(x, y) = Y_x(x, y)$ D - puntu guztientzat betetzen baden.

8.21. . Funtzio potentziala baldin badago, integrazioz lortuko dugu. Demagun

$$\int_{M(1,2)}^{N(3,4)} (2xy^2 + 1)dx + (2yx^2 - 1)dy$$

lortu behar dugula.

(8.15) baldintza betetzen dela egiaztatu. Funtzio potentziala, $F(x, y)$, badela dakigunez, funtzio hori aurkitzeko bideren bat pentsatu. 2. teorema erabiliz integralaren balioa lortu.

8.9. Adibidea (8.4) teorema aplikatu baino lehenago, teoremaren baldintza (hipotesi) guztiak betetzen direla egiaztatu behar dira. Demagun L zentroa koordenatu jatorrian eta R erradioko zirkunferentzia dela. Honako integral hau lortuko dugu,

$$\oint_L \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

Eremu kontserbakorra den ala ez egiaztatzen dugu,

$$X(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Y(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$X_y(x, y) = \frac{-(x^2 + y^2 - 2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$X_y(x, y) = \frac{(x^2 + y^2 - 2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

betetzen dira, baina $X(x, y)$, $Y(x, y)$ funtzioak $(0, 0)$ puntuan definituta ez daudenez teoremaren baldintzak ez dira betetzen. Beraz, ezin dugu ezan

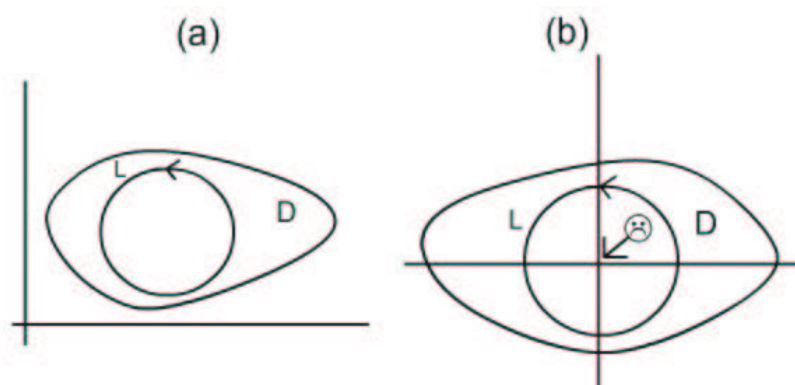
$$\oint_L \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

integralaren emaitza nulua izango dela.

Integralaren kalkulua egiten badugu, L , lerroaren parametrizazioa $x(t) = R \cos t$, $y(t) = R \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ erabiliz,

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2 \sin^2 t}{R^2} + \frac{R^2 \cos^2 t}{R^2} \right) dt = 2\pi \neq 0$$

L lerroa (8.33(a)) irudian adierazita duguna denean D eremuan $X_y(x, y) = Y_x(x, y)$ betetzen da eta funtzioak jarraituak dira eta deribatu partzial jarraituak dituzte. Baina, L lerroa (8.33(b)) irudian adierazitako zirkunferentzia denean, D eremuak $(0, 0)$ puntua barne du eta ezin dugu (8.4) teorema aplikatu.



8.33 Irudia: (8.9) adibidearen eremuak

Hiru dimentsiotako kasuan antzerako emaitzak ditugu. Egiazta ezazu, $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ funtzio jarraituak eta deribatu partzial jarraituak dituzten funtzioak baldin bada, $V = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$ bektore eremua kontserbakorra dela baldintza hauek betetzen direnean.

$$\begin{aligned} X_y(x, y, z) &= Y_x(x, y, z) \\ X_z(x, y, z) &= Z_x(x, y, z) \\ Y_z(x, y, z) &= Z_y(x, y, z) \end{aligned} \quad (8.16)$$

eta (8.16) baldintzak betetzen direnean badago 8.17 baldintzak betetzen dituen $F(x, y, z)$, funtzio potentziala.

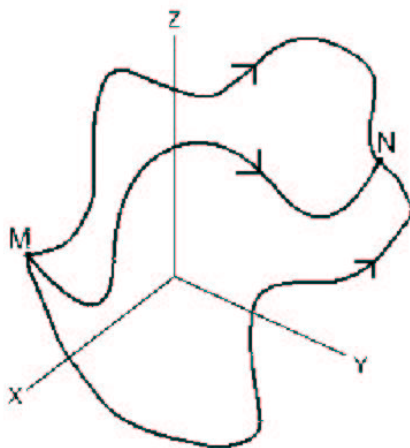
$$\begin{aligned} F_x(x, y, z) &= X(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) &= Y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) &= Z(x, y, z) \end{aligned} \quad (8.17)$$

Kasu honetan M eta N puntuen arteko integrala ez da aldatzen L ibilbidea aldatzen dugunean, hasiera eta bukaera puntuen menpe dago bakarrik. Integrala, bi dimentsiotako kasuaren bezala, N eta M -ren potentzialen diferentzia da.

$$\int_M^N X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz = F(N) - F(M)$$

L ibilbidea itxia denean

$$\int_M^N X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz = 0$$



8.34 Irudia: 3 dimentsiotako lerroak

8.22. Kalkulatu integral hau.

$$\int_{M(0,0,0)}^{N(1,1,2)} (2xy^2z^2 + y + z)dx + (2x^2yz^2 + x)dy + (2x^2y^2z + x - 1)dz$$

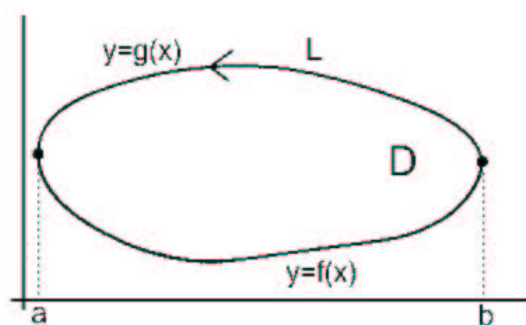
8.5 Green-en formula planoan

Hurrengo teorema $V = (X(x, y), Y(x, y))$ bektore-funtzioaren lerro-integrala L ibilbidean zehar eta $G(x, y) = Y_x(x, y) - X_y(x, y)$ funtzioaren integral bikoitza L -k mugatzen duen D eremura hedatuta erlazionatzen ditu.

8.5. Teorema *Green-en teorema* $y = f(x)$, $y = g(x)$, $(f(x) \leq g(x))x \in [a, b]$ funtzioak mugatzen duten (ikus (8.35) irudia) D eremua eta funtzio biek osatzen duten ibilbide itxia L izanik, $X(x, y)$ eta $Y(x, y)$ D - definitutako deribatu partzialak dituzte funtzioa jarraituak badira, orduan,

$$\oint_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \iint_D (Y_x(x, y) - X_y(x, y)) dx dy$$

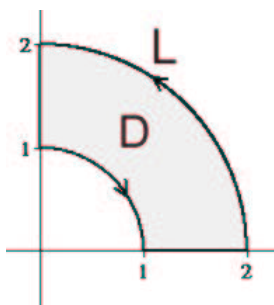
Hurrengo ariketan lerro-integrala lortzerakoan Green-en teorema erabiltzeak lana errazten du.



8.35 Irudia: Green-en teoremaren eremua eta ibilbidea

8.23. L lehenengo koadrantean eta koordinatu jatorrian zentroa era erradio 1 eta 2lo zirkunferentziak mugatzen duten D eremuaren muga da. (ikus (8.36) irudia) Lortu lerroa integral hau.

$$\oint_L (e^x + 2xy)dx + (3x^2 + \cos^3 y)dy$$



8.36 Irudia: (8.23) ariketaren eremua

8.24. Badakigu $V = (X(x, y), Y(x, y))$ kontserbakorra badin bada eta L ibilbide itxia, orduan

$$\oint X(x, y)dx + Y(x, y)dy = 0$$

betetzen dela. Green-en teorema erabiliz emaitza hori frogatu daitekeela egiaztatu.

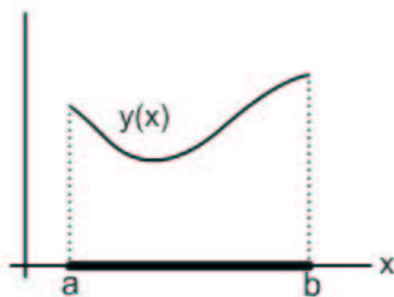
8.25. $V = (X(x, y), Y(x, y))$ indarrak bektore-eremua definitzen du eta $Y_x(x, y) - X_y(x, y)$ konstantea da. L, D eremu laua mugatzen duen ibilbidea izanik, V -k L -en zehar egiten duen lana lortu.

8.6 Lerro integrala arkuaren luzerarekiko

Orain arte ikusi dugun lerro-integrala funtzio bektorial batena izan da. Baina, adibidez, L kable bat bada eta bere dentsitatea puntuala ezagutzen badugu, nola lortzen dugu masa?, eta grabitate-zentroa? Problema hauetan ez dugu bektore-funtzio bat baizik eta eskalarra den funtzioa $F(x, y)$ edo $F(x, y, z)$ L -ko puntuen dentsitatea adierazten duen funtzioa. Masaren kalkulua aztertuko dugu, besteak ariketa bezala proposatzen dira.

Problema hau 5. gaian aztertu genuen eta $y(x)$ -k barra baten x puntuko dentsitatea adierazten badu barraren masa era honetan lortzen da:

$$M = \int_a^b Y(x) dx$$

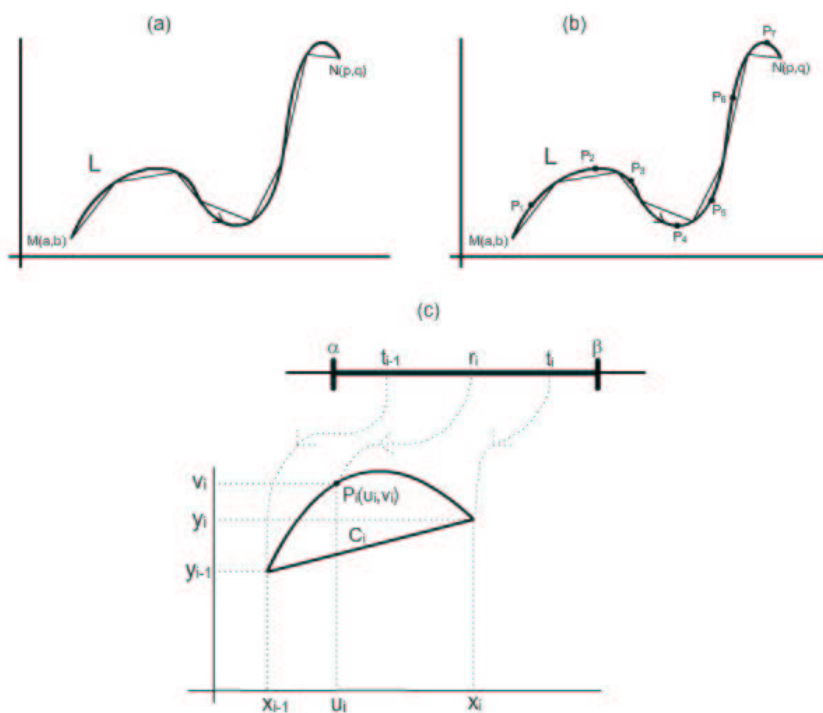


8.37 Irudia: Barraren masa

(??) irudian, $[a, b]$ tartea L lerromakurra bezala har daiteke eta L -zehar dentsitate funtzioa definituta dugu. L -kurbaren adierazpen parametrikoa $x(t) = t$, $y(t) = 0$, $x \in [a, b]$, eta dentsitate funtzioa $(x, y) = y(x)$ dira.

Orokorrean, demagun $F(x, y)$ funtzioak L kurbaren (x, y) puntuaren dentsitatea adierazten duela eta $(x(t), y(t))$ $t \in [\alpha, \beta]$ L -ren adierazpen parametrikoa. L -ren masa kalkulatzeko nahi dugu eta horretarako lana lortzeko egin genuenare antzekoa egingo dugu.

1. L lerromakurra, n arkutan zatitzen dugu eta lerro poligonalen bidez hurbiltzen dugu. (8.38) irudian $n = 7$ deneko kasua dugu. Arku bakoitzetik P_i puntua aukeratzen dugu,



8.38 Irudia: Luzerarekiko lerro-integrala

(8.38(b)) irudian adierazita dagoen bezala, eta arkuan zehar dentsitatea $F(P_i)$ konstantea dela suposatzen dugu. S_i -k zuzenkiaren luzera adierazten du. (8.38(c)) irudian arku horietatik bat, arkuko $P_i(u_i, v_i)$ puntua eta C_i zuzenkia. Arkuen muturrak (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) , dira.

$$x_{i-1} = x(t_{i-1}), y_{i-1} = y(t_{i-1}), x_i = x(t_i), y_i = y(t_i), u_i = x(r_i), v_i = y(r_i), i = 1, \dots, n$$

2. C_i zuzenkiaren masaren hurbilketa $m_i = F(x_i, y_i)S_i$ da. Zuzenki guztien masak batuz, bilatzen ari garan, M , masaren hurbilketa lortuko dugu. $M \cong m_1 + \dots + m_n$,

$$M \simeq \sum_{i=1}^n F(u_i, v_i)S_i$$

C_i zuzenkiaren luzera, S_i , hau da:

$$S_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

3. $x(t)$ eta $y(t)$ funtzioei batezbesteko teorema $[t_{i-1}, t_i]$ tartean aplikatuz, deribagarriak direla suposatuz, badira c_i, d_i bi puntu (t_{i-1}, t_i) tartean non

$$x'(c_i) = \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, \quad y'(d_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$$

betetzen den.

Demagun $h = t_i - t_{i-1}$ tartearen luzera oso txikia dela eta c_i, d_i puntuak bata bestearikiko oso gertu daudela eta berdinak bezala har ditzakegula, orduan

$$S_i = \sqrt{(x'(c_i))^2 + (y'(c_i))^2} h$$

da, beraz

$$M \simeq \sum_{i=1}^n F(u_i, v_i) \sqrt{(x'(c_i))^2 + (y'(c_i))^2} h$$

4. Baina $P_i(u_i, v_i)$ lerromakurraren edozen puntu denez $u_i = x(c_i), v_i = y(c_i)$ aukeratzen ditugunean

$$M \simeq \sum_{i=1}^n F(x(c_i), y(c_i)) \sqrt{(x'(c_i))^2 + (y'(c_i))^2} h$$

5. n arkuen kopurua $\infty (h \rightarrow 0)$ -ra jotzen duenean M bilatzen ari garan balioa

$$M = \sum_{i=1}^{\infty} F(x(c_i), y(c_i)) \sqrt{(x'(c_i))^2 + (y'(c_i))^2} h \quad (8.18)$$

izango da.

6. $x'(t)$ eta $y'(t)$ funtzioak $[\alpha, \beta]$ tartean jarraituak baldin badira eta $F(x, y)$ funtzioa L kurba barruan duen D eremuan jarraitua baldin bada, (8.18) ekuazioan aldagai bakarreko integrala dugu, beraz

$$M = \sum_{i=1}^{\infty} F(x(c_i), y(c_i)) \sqrt{(x'(c_i))^2 + (y'(c_i))^2} h = \int_{\alpha}^{\beta} F(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad (8.19)$$

(8.19) ekuazioaren bidez L -ren masa lor dezakegu.

8.2. Definizioa . Arkuaren luzeraz zeharreko lerro-integrala, baldin badago, era honetan definitzen dugu.

$$\int_L F(x, y) ds = \sum_{i=1}^{\infty} F(x(c_i), y(c_i)) \sqrt{(x'(c_i))^2 + (y'(c_i))^2} h$$

Ikusi dugunez, L kurbaren adierazpen parametrikoa $x = x(t)$ eta $y = y(t)$ baldin bada, funtzioak eta euren deribatu partzialak jarraituak baldin badira, arkuaren hasiera $t = \alpha$ eta bukaera $t = \beta$ ri dagokienean arku luzeran zehar lerro-integrala era honetan lor dezakegu.

$$\int_L F(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} F(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

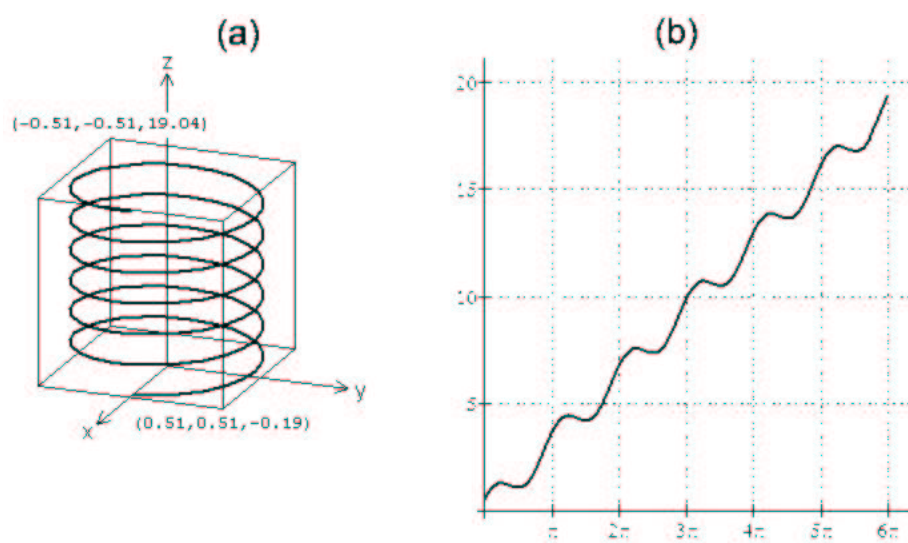
8.26. Demagun L kurbaren dentsitatea (x, y) puntuetan konstantea dela, hau da $F(x, y) = k$. Frogatu L -ren masa kl izango dela, l arkuaren luzera izanik.

8.27. Itzul gaitzen dimentsio bakarreko barraren kasura. (8.19) formula erabiliz, (??) integralaren adierazpena lortu.

Antzerako bidea erabiliz hiru dimentsiotako arkuaren luzeran zeharreko lerro-integrala lortzen dugu.

$$\int_L F(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} F(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

8.28. $x(t) = 0.5 \cos 2t$, $y(t) = 0.5 \sin 2t$, $z = t$, $t \in [0, 6\pi]$ (ikus (8.39a) irudia) itxura duen malguki baten puntu-dentsitatea $F(x, y, z) = x + y + z$ da. (8.39(b)) irudian puntuko masaren adierazpena dugu, hau da, $F(x(t), y(t), z(t)) = 0.5(\cos 2t + \sin 2t) + t$, $t \in [0, 6\pi]$ funtzioaren adierazpena. Lortu malgukiaren masa.



8.39 Irudia: Malgukiaren masa

