

# Lerro-integrala. Winplot-ekin egiteko ariketak

Winplot programa erabiliz egiteko ariketak.

## 1 lerroint2.wp2 eta lerroint3.wp2 fitxategiak erabiliz

### 1.1 Erabilera

lerroint2.wp2: Ecuación Definir Función leihoan  $V = (M(x, y), N(x, y))$  eremu bektoriala definitzen duten  $M(x, y)$  eta  $N(x, y)$  funtzioak sartzen dira. Programak marrazten du bai  $V$  baita ere eremu perpendikularra,  $U = (-N(x, y), M(x, y))$

Marrazten dira ere  $R(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  eta  $S(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$  puntuak eta bere mugak puntu horietan duen  $L(x(t), y(t))$  kurba norabideratua, non:

$$\begin{aligned}x(t) &= \mathbf{A} + \mathbf{K} * t + (\mathbf{P} - \mathbf{A} - \mathbf{K}) * t * t \\y(t) &= \mathbf{B} - \mathbf{H} + (\mathbf{Q} + \mathbf{H} * (1 - \exp(1)) - \mathbf{B}) * t + \mathbf{H} * \exp(t) \\t &\in [0, 1]\end{aligned}\tag{1}$$

Ikusi  $x(0) = \mathbf{A}$ ,  $y(0) = \mathbf{B}$ ,  $x(1) = \mathbf{P}$  eta  $y(1) = \mathbf{Q}$  direla  $\mathbf{K}$  eta  $\mathbf{H}$ -ren edozein balioentzat.  $\mathbf{K}$  eta  $\mathbf{H}$ -ren balioak parametroak dira, eta balio hauek aldatuz kurba desberdinak lortzen dira. Hau da, (1) kurben familia biparametrikoko bat da, non kurba guztiak  $R(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  eta  $S(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$  puntuetatik pasatzen diren.

Dos->Integral de línea leihoan  $V$  edo  $U$ -ren lerro-integrala  $L$ -n zehar kalkula daiteke.

Una->dy/dt trayectoria leihoan bi eremuen indar-lerroak azal daitezke. Adibidez,  $(x_0, y_0)$  puntutik pasatzen den  $V = (M(x, y), N(x, y))$  eremuaren indar-lerro bat ondorengo baldintzak betetzen dituen  $(x(t), y(t))$  kurba bat izango da:

$$\begin{aligned}x'(t) &= M(x, y) \\y'(t) &= N(x, y) \\x(t_0) &= x_0 \\y(t_0) &= y_0\end{aligned}$$

Horretarako:

- Una- $\rightarrow dy/dt$  trayectoria leihoan  $V$  edo  $U$  eremua aukeratu.
- Kurbako puntu baten  $(x_0, y_0)$  koordenatuak sartu eta Dibujar botoia sakatu. Edo nahi duzun  $(x_0, y_0)$  puntuan klikatu, eta kurba zuzenean agertuko da.
- **segu**, **retr** edo **ambos** gelaxka aktibatu grafikoa aurrerantz, atzerantz edo bi norabideetan marrazteko, eremuaren bektoreak  $(x_0, y_0)$  hasierako puntuan duen norabide eta norantzaren arabera.

**lerroint3.wp3:** Ecu- $\rightarrow$ Definir Función leihoan  $M(x, y)$  eta  $N(x, y)$  funtzioak sartzen dira eta ondorengo eran definiturik dagoen  $SP$  gainazalaren grafikoa marrazten da:

$$z = M_y(x, y) - N_x(x, y)$$

Orduan,  $V = (M(x, y), N(x, y))$  eremu bektoriala kontserbakorra bada, lortutako  $SP$  gainazala  $z = 0$  da.

## 1.2 Egin beharrekoak

1.  $IM(x, y)$  eta  $N(x, y)$  funtzioak sartu eta  $R$  eta  $S$  puntuak finkatu. **K** eta **H** parametroen balioak aldatu. Galdera da: lerro-integrala aukeratutako bidearen menpekoea al da? Erabili **lerroint3.wp3**  $M_y(x, y) = N_x(x, y)$  betetzen den egiaztatzeko.
2.  $V$  bektore-eremua irudikatu. Aukeratu  $R(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  eta  $S(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$  puntuak eta **K** eta **H** parametroen balioak, lerro-integrala positiboa dela grafikoki ikusteko moduan. Egiaztatu integrala kalkulatzeko **Dos- $\rightarrow$ Integral de línea**-ren bidez. Eragiketa berdina errepikatuz, baina orain integral negatiboarekin.
3.  $V$  eta  $U$  eremuen eremu-lerro batzuk marraztu, egiaztatu perpendikularrak direla.
4. Estimatu  $V$ -ren lerro-integrala eremu-lerroaren zati baten zehar.  
LAGUNTZA: Ikusi Winploten eremu-lerroaren zenbakizko kalkulua egiten duela, eta orduan ez dugu lerro horren  $(x(t), y(t))$  parametrizazioa. Baina, agian lor dezakegu (1) familiako lerro bat eremu-lerroari gutxi gora behera egokitzen zaiona.

## 2 Green.wp2 eta Green.wp3 fitxategiak erabiliz

### 2.1 Erabilera

**Green.wp2:** Ecu- $\rightarrow$ Definir Función leihoan sartzen dira:

- $D$  eremu itxia mugatzen duten  $y = F(x)$  eta  $y = G(x)$  funtzioak.
- $V = (M(x, y), N(x, y))$  bektore-eremua definitzen duten  $M$  eta  $N$  funtzioak.

Programak  $V$  bektore-eremua eta  $F(x)$  eta  $G(x)$  funtzioen grafikoak marrazten ditu.

**Green.wp3:** Ecua->Definir Función leihoan sartzen dira:

- $D$  eremu itxia mugatzen duten  $y = F(x)$  eta  $y = G(x)$  funtzioak.
- **A** eta **B** aldagaietan bi funtzioen definizio-eremua sartzen da. **A** eta **B**-ren balioak kalkulatzeko, **Green.wp2**-en **Dos->Intersección** leihoa ireki eta  $y = F(x)$  eta  $y = G(x)$  funtzioen ebakipuntuen  $x$  koordenatuak kalkulatu ditugu. Ondoren, balio horiek **Green.wp3**-ko **A** eta **B** aldagaietan sartuko ditugu.
- $V = (M(x, y), N(x, y))$  bektore-eremua definitzen duten bi funtzioak.

Programak ondorengo lanak egiten ditu:

- $D$  eremua marraztu.
- $N_x(x, y)$  eta  $M_y(x, y)$  deribatu partzialen zenbakizko kalkulua, ondorengo hurbilketa (zentrala) erabiliz:

$$N_x(x, y) \approx (N(x + 0.001, y) - N(x - 0.001, y))/0.002$$

$$M_y(x, y) \approx (M(x, y + 0.001) - M(x, y - 0.001))/0.002$$

- $S(x, y) = N_x(x, y) - M_y(x, y)$  funtzioa grafikoki adierazi.
- $S(x, y)$ -ren integral bikoitza  $D$  eremuan kalkulatu. Lortzeko, **Una->Integral f(x,y)dx dy** leihoan aukeratu **Inventario-n integratu** izenarekin agertzen funtzioa eta funtzio hori integratu defektuzko  $[0, 1] \times [0, 1]$  eremuan, **valor** botoian klikatuz. Programak aldagai aldaketa bat aplikatzen du eta lortutako balioa  $S(x, y)$ -ren integral bikoitza  $D$  eremuan da.

## 2.2 Egin beharrekoak

Ondorengo lanak egin  $V = (M(x, y), N(x, y))$  bektore-eremu desberdinekin eta  $y = F(x)$  eta  $y = G(x)$  bi funtzioek mugatutako  $D$  eremu lau desberdinetan.

1. Kalkulatu lerro-integrala  $D$  eremuko muga zehar **Dos->Integral de línea** erabiliz.
2. Kalkulatu lerro-integrala  $D$  eremuko muga zehar Greenen teorema erabiliz.

### 3 grabitazioa.wp2 fitxategia erabiliz

#### 3.1 Erabilera

- $M1$ ,  $M2$  eta  $M3$  hiru masek definitutako grabitazio-eremua simulatzen du. Masen balioak eta bere posizioak ondorengo aldagaietan sartzen dira:

Masa	Posición	Valor
$M1$	$(\mathbf{A}, \mathbf{B})$	$\mathbf{M}$
$M2$	$(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$	$\mathbf{N}$
$M3$	$(\mathbf{C}, \mathbf{D})$	$\mathbf{O}$

- $V$  grabitazio-eremua (kontserbakorra) eta  $U$  eremu perpendikularra azaltzen ditu.
- `lerroint2.wp2` programako funtzio biparametrikoen familia azaltzen du. Funtzio hauek, orain,  $X(\mathbf{R}, \mathbf{S})$  eta  $Y(\mathbf{U}, \mathbf{V})$  puntuetatik pasatzen dira,  $\mathbf{H}$  eta  $\mathbf{K}$ -ren edozein balio izanda ere.
- $X$  eta  $Y$ -ren arteko potentzial-diferentzia azaltzen du.

#### 3.2 Egin beharrekoak

1. Masen balioak eta posizioak aldatu, eta azaldu nola aldatzen diren  $V$  eta  $U$  bektore-eremuak.
2.  $V$  eta  $U$ -ren potentzialeko kurba batzuk grafikoki adierazi (`Una->dy/dt trayectoria` leihoa erabili). Masen balioak eta posizioak aldatu, eta azaldu nola aldatzen diren potentzialeko kurbak.
3. Sartu bi puntu,  $X$  eta  $Y$ , eta bi balio,  $\mathbf{H}$  eta  $\mathbf{K}$ . Kalkulatu  $V$  grabitazio-eremuak puntu bat  $X$ -tik  $Y$ -ra trasladatzekean egindako lana bi modu desberdinetan:
  - (a) Lerro-integrala kalkulatu.
  - (b) Funtzio-potentziala erabiliz.

Azaldu nola aldatzen den  $X$  eta  $Y$  puntuen arteko potentzial-diferentzia puntuen posizioen arabera.

4.  $U$  bektore-eremua kontserbakorra al da?