

# Integral anizkoitzak. Winplot-ekin egiteko ariketak

Winplot programa erabiliz egiteko ariketak.

## 1 Gainazalen adierazpena koordenatu kartesiarretan

Winplot-ek  $z(x, y)$  funtzioaren bidez definitutako gainazalaren adierazpen grafikoa egiten du, eremu karratu batean, hau da,  $x \in [a, b], y \in [c, d]$ . Beharrezko datuak **Ecua**->**Explícita** aukeratzean irekitzen den leihoan sartu behar dira. Gainera, posible da  $z(x, y)$  funtzioaren integrala kalkulatzeko aipatutako eremuan, **Una**->**Integrar** aukeratuz.

1.  $z(x, y) = xy + 1$  funtzioaren adierazpen grafikoa egin  $x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]$  eremuan, eta kalkulatu goitik  $z$ -k eta behetik eremu lauak mugatzen duten gainazalaren bolumena.

## 2 Gainazalen adierazpena koordenatu zilindrikoetan

Winplot-ek koordenatu zilindrikoetan definitutako  $z = z(r, t)$  (non  $r \in [a, b], t \in [c, d]$ ) gainazalaren adierazpen grafikoa egiten du. Beharrezko datuak **Ecua**->**Cilíndrica** aukeratzean irekitzen den leihoan sartu behar dira.

2. Hurrengo gainazalen adierazpen grafikoa egin koordenatu zilindrikoak erabiliz:

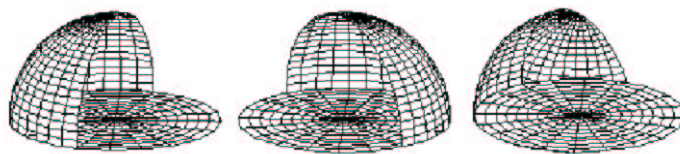
Paraboloide eliptikoa:  $z = 2x^2 + 3y^2$

Kono eliptikoa:  $z^2 = 2x^2 + 3y^2$

## 3 Gainazalen adierazpena koordenatu esferikoetan

Winplot-ek koordenatu esferikoetan definitutako  $r = r(\theta, \varphi)$  gainazalaren adierazpen grafikoa egiten du.  $t$  hizkia erabiltzen da  $\theta$  angelua adierazteko, eta  $u$  hizkia, berriz,  $\varphi$  angelurako. Beharrezko datuak **Ecua**->**Esférica** aukeratzean irekitzen den leihoan sartu behar dira.

3. Aurkitu irudian agertzen den gainazalaren adierazpen analitikoa. Grafikoki adierazi.



Irudia 1: jaurtigaiaren ibilbidea

## 4 Gainazalen adierazpena koordenatu parametrikoetan

Gainazalak forma parametrikoan adieraztea ere posible da winplot-ekin; modu orokorra goa da. Koordenatu bakoitza,  $x, y, z$ , bi aldagaiko ( $u$  eta  $t$ ) funtzioen bidez adierazten da:  $x = x(u, t), y = y(u, t), z = z(u, t)$  non  $u \in [a, b], t \in [c, d]$ . Beharrezko datuak Ecua- $\rightarrow$ Paramétrica aukeratzean irekitzen den leihoan sartu behar dira.

4. Aztertu zein gainazal adierazten dituzten ondorengo parametrizazioek, eta ondoren, adierazpen grafikoa egin:

(a)	(b)	(d)
$x = u \cos(t)$	$x = 1$	$x = 2 \cos(t)$
$y = u \sin(t)$	$y = u \cos(t)$	$y = 3 \sin(t)$
$z = 1$	$z = u \sin(t)$	$z = u$
$u \in [0, 2]$	$u \in [0, 2]$	$u \in [0, 4]$
$t \in [0, 2\pi]$	$t \in [0, \pi]$	$t \in [\pi, 2\pi]$
(e)	(f)	(g)
$x = 1$	$x = u \cos(t)$	$x = u \cos(t)$
$y = u$	$y = u \sin(t)$	$y = u \sin(t)$
$z = t$	$z = u^2$	$z = u^2 \cos(t) \sin(t) + 1$
$u \in [-1, 2]$	$u \in [0, 2]$	$u \in [0, 2]$
$t \in [-2, 2]$	$t \in [0, 2\pi]$	$t \in [0, 2\pi]$

## 5 Ariketak aldagai aldaketa.wp2 eta 3D solidoa.wp3 programekin

### 5.1 Erabilera

Winplot-ek ezin du zuzenean  $D$  edozein eremutan definitutako gainazal baten adierazpen grafikoa egin, ezta bere integrala kalkulatu ere. Hala ere, aldagai aldaketa bat eginez lor daiteke. Demagun  $D2$  eremua hurrengo funtzioen bidez definiturik dagoela:

$F(x) = D2$  goitik mugatzen duen kurba

$G(x) = D2$  behetik mugatzen duen kurba

non  $x \in [a, b]$ .

Ondorengo aldagai aldaketaren bidez:

$$x(u) = a + (b - a)u$$

$$y(v) = v(F(x(u)) - G(x(u))) + G(x(u))$$

$D2$ -ko  $(x, y)$  puntu guztiak lortzen ditugu,  $u \in [0, 1], v \in [0, 1]$  bidez definituriko  $D1$ -eko  $(u, v)$  puntu guztiak hartuz.

### 5.2 Eginbeharrekoak

**5. aldagai aldaketa.wp2 programak hurrengo bi barrutien arteko korrespondentzia erakusten du:**

$D1 : (u, v)$ , non  $u \in [0, 1], v \in [0, 1]$

$D2 : (x, y)$ , hurrengo kurbek mugatutakoa:  $F(x) = (x - 2)(x - 4)$  eta  $G(x) = 0.5x$ , non  $x \in [2, 4]$

*$u$  eta  $v$  aldagaiak alda ditzakezu,  $D1$ -eko puntu guztiak zeharkatzeko eta  $D2$ -ri dagozkion puntuak ikusteko.*

*Egiaztatu  $(u, v) \in D1$  bakoitzari  $(x, y) \in D1$  bakarria dagokiola, eta alderantziz.  $D2$ -ko  $(x, y) = (3.18, -0.303)$  puntua emanda, aurkitu berari dagokion  $D1$ -eko  $(u, v)$  puntua.*

*Integralaren balioa  $[0, 1] \times [0, 1]$  eremu berrian kalkulatzeko, transformazioaren Jakobiarra kalkulatu behar dugu:*

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = (b - a)(F(x(u)) - G(x(u))) \geq 0$$

3D `solidoa.wp3` programak eragiketa hauek guztiak egiten ditu. Bi gainazalek mugatutako solidoak marrazten ditu:

$S(x, y) =$  goitik mugatzen duen gainazala

$I(x, y) =$  behetik mugatzen duen gainazala

Solidoaren  $D$  proiektzioa ondorengo bi funtzioek mugatzen dute:

$F(x) = D$  goitik mugatzen duen kurba

$G(x) = D$  behetik mugatzen duen kurba

eta bere adierazpen grafikoa ere egiten du.

$A$  eta  $B$  aldagaietan  $x$ -en tartearen mugak egon behar dira.

$z(x, y)$   $D$ -n integratzeko, aukeratu **Una->Integrar**; ondoren, inbentarioko funtzio bakarra aukeratu, eta hartu lehenetsitako  $[0, 1] \times [0, 1]$  eremua.

**6.** *Hurrengo baldintzek mugatzen duten solidoaren adierazpen grafikoa egin eta kalkulatu bere bolumena:*

$$x = 4 - y^2$$

$$z = 0$$

$$z = x$$

**7.** *Hurrengo gainazalek mugatzen duten solidoaren adierazpen grafikoa egin. Kalkulatu bere bolumena eta bere gainazalaren azalera.*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$3z = x^2 + y^2$$