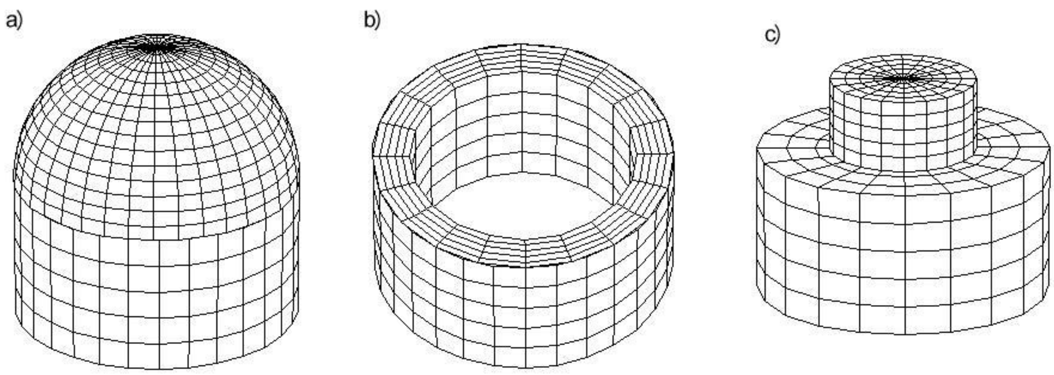
# 7. Kapitulua

# Integral anizkoitza

ikurra duten ariketak ebazteko komenigarria izango da funtzioen adierazpen grafiko eta zenbakizko kalkulurako programa informatiko bat erabiltzea, Winplot adibidez.

## 7.1 Integral bikoitza

**7.1. Ariketa** Ondorengo irudietan agertzen diren solidoak definitzeko erabiltzen diren gainazal guztien adierazpen analitikoa kalkulatu.




**7.2. Ariketa** Ondorengo baldintzek definitzen duten gorputza marraztu eta bere bolumena kalkulatu.

a) $z = \dfrac{y}{2},\ 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 2,\ z = 0$ b) $z = 6 - 2y,\ 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 2,\ z = 0$

c) $z = 4 - x - y,\ y = x,\ y = 2,\ x = 0,\ z = 0$ d) $z = 4,\ y = x,\ y = 0,\ x = 2,\ z = 0$

e) $2x + 3y + 4z = 12,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ f) $z = 1 - xy,\ y = x,\ x = 0,\ y = 1,\ z = 0$

g) $z = 4 - y^2,\ y = x,\ x = 0,\ z = 0$ h) $z = \mathrm{e}^{-\frac{x+y}{2}},\ 0 \le x < \infty,\ 0 \le y < \infty,\ z = 0$

**7.3. Ariketa** D integrazio-eremua marraztu, integrala kalkulatu eta integrala berridatzi integrazio-ordena aldatuz.

a) $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^1 (1+2x+2y)\,dy$ c) $\displaystyle\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x‘2}} (x+y)\,dy$ e) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^{y-1} \mathrm{e}^{x+y}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^6 dy \int_{y/2}^{3} (x+y)\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{y-1}^{0} \mathrm{e}^{x+y}\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^4 dy \int_{y/2}^{\sqrt{y}} x^2y^2\,dx$

**7.4. Ariketa** Koordenatu polarrak erabiliz, integral bikoitza kalkulatu non funtzioa eta integrazio-eremua ondorengo baldintzetan agertzen diren.

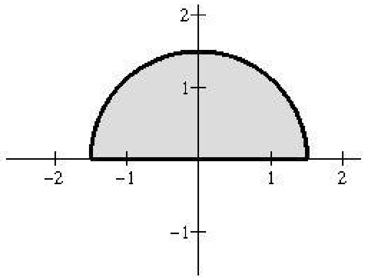
1. $z = x+y,\ x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

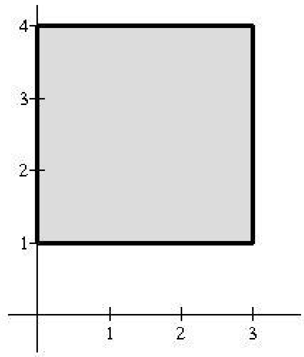
2. $z = \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ x^2+y^2 \leq 25, x \geq 0$

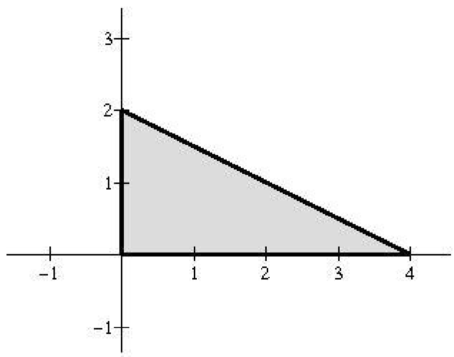
3. $z = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right),\ x^2+y^2 \leq 25,\ x \geq 0$

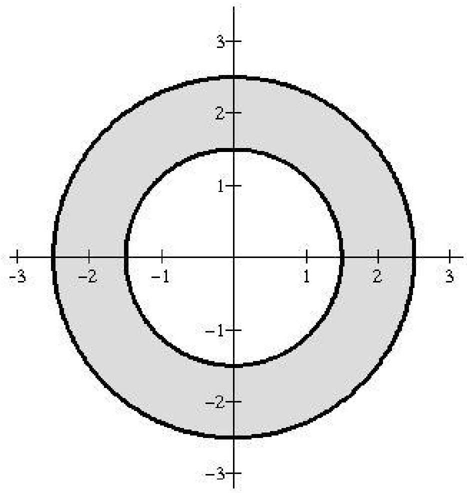
4. $z = 9-x^2-y^2,\ x^2+y^2 \leq 9,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

**7.5. Ariketa** Ondorengo irudietan agertzen diren eremu lauak kontsideratuz eta koordenatu angeluzuzenak eta koordenatu polarrak erabiliz, $z(x,y)$ funtzioarentzat integrazio limiteak idatzi. Azaldu kasu bakoitzarako aukeratuko zenituzkeen koordenatuak.




**7.6. Ariketa** Ondorengo ariketetan integrazio-eremua marraztu eta koordenatu polarrak erabiliz integral bikoitza kalkulatu.

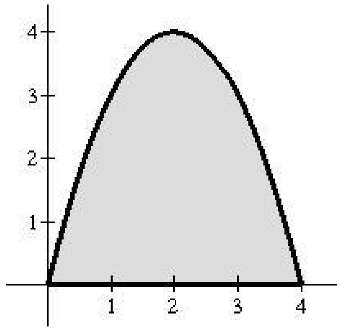
a) $\displaystyle\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy\,dy$ e) $\displaystyle\int_0^2 dy \int_y^{\sqrt{8-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\,dy$ d) $\displaystyle\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy$ f) $\displaystyle\int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} x^2\,dx$

**7.7. Ariketa** $z = c$ planoak mugatzen duen $z = 1 + x^2 + y^2$ paraboloidearen zatiaren azalera kalkulatu. Bi gainazal horiek mugatutako gorputzaren bolumena kalkulatu.

**7.8. Ariketa** $x^2 + z^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ zilindroak ebakitako $z = 2 - x - y$ planoaren zatiaren azalera kalkulatu.

**7.9. Ariketa** Kurba paraboliko bat jarraituz xafla metaliko bat moztu dugu (ikus irudia).




1. Parabolaren ekuazioa lortu.
2. Puntu bakoitzeko dentsitatea, $d(x, y)$, konstantea dela suposatuz M grabitate-zentroa kalkulatu.
3. Demagun $d(x, y)$ dentsitatea ez dela konstantea. Har ditzagun ondorengo funtzioak:

   $$d_1(x, y) = kx,\ d_2(x, y) = kxy,\ d_3(x, y) = k|x - y|,\ d_4(x, y) = k(4 - x)(4 - y)$$

   Aztertu funtzio hauen adierazpena, beraien gradientearena eta baita beraien sestra-kurbena ere. Grabitate-zentroaren aldaketa funtzioen arabera aztertu.

## 7.2 Integral hirukoitza

**7.10. Ariketa** Integral hirukoitza erabiliz, ondorengo baldintzek osatutako gorputzen bolumena kalkulatu:

a) $x = 4 - y^2,\ z = 0,\ z = x$

b) $z = xy,\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1$

c) $z = 36 - x^2 - y^2,\ z = 0$

d) $z = 4 - x^2,\ y = 4 - x^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

e) $z = 9 - x^2,\ y = 2 - x,\ y = 0,\ z = 0,\ x \geq 0$

f) $z = x^2 + y^2,\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1$

**7.11. Ariketa** Ondorengo integral hirukiotzek gorputz baten bolumena adierazten dute. Gorputza marraztu eta integral hirukoitza berridatzi, kasu bakoitzean eskatzen den eran.

a) $\displaystyle\int_0^4 dx \int_0^{\frac{4-x}{2}} dy \int_0^{\frac{12-3x-4y}{4}} dz$
ordena berria: $\int dz \int dx \int dy$

c) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_y^1 dx \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz$
ordena berria: $\int dx \int dy \int dz$

b) $\displaystyle\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^{6-x-y} dz$
ordena berria: $\int dy \int dx \int dz$

d) $\displaystyle\int_0^2 dx \int_{2x}^4 dy \int_0^{\sqrt{y^2-4x^2}} dz$
ordena berria: $\int dz \int dy \int dx$

**7.12. Ariketa** $x^2+y^2 = z^2$, eta, $z^2 = c^2$ baldintzek mugatutako gorputzaren bolumena kalkulatu.

**7.13. Ariketa** 1. ariketan azaltzen diren gorputzak koordenatu zilindrikoetan adierazi.

**7.14. Ariketa** Puntu bakoitzaren koordenatuak koordenatu-sistema desberdinetan adieraziz, ondorengo taula osatu.

| Koordenatu kartesiarrak $(x, y, z)$ | Koordenatu zilindrikoak $(\theta, \rho, z)$ | Koordenatu esferikoak $(\theta, \varphi, r)$ |
|---|---|---|
| $(0.096, 0.116, 0.45)$ | | |
| | $(1.44, 2.35, 3.3)$ | |
| | | $(1.445, 1.57, 1.85)$ |
| | $(5.4, 1.75, -2.7)$ | |
| $(-0.66, -0.216, 1.15)$ | | |
| | | $(2.57, 2.1, 1.85)$ |

**7.15. Ariketa** Koordenatu zilindrikoetan idatzita dauden ondorengo integraletan gorputz baten bolumena adierazten da. Gorputza marraztu.

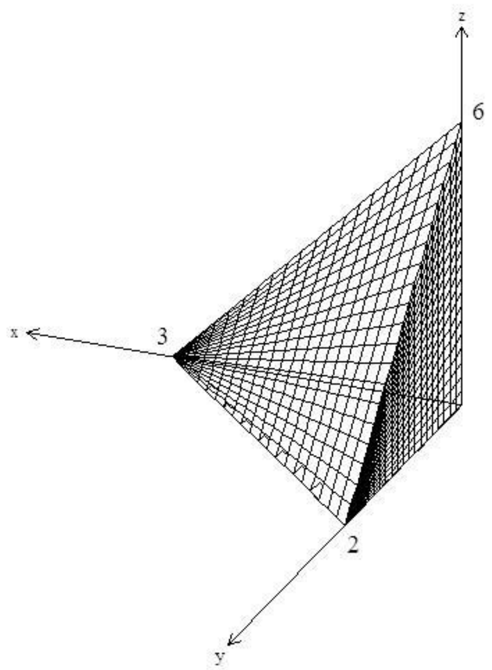
a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^3 dr \int_0^r r\, dz$ b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} dr \int_0^{3-r^2} r\, dz$

**7.16. Ariketa** Koordenatu esferikoetan idatzita dauden ondorengo integraletan gorputz baten bolumena adierazten da. Gorputza marraztu.

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^4 \rho^2 \sin\varphi\, d\rho$ b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} d\varphi \int_2^5 \rho^2 \sin\varphi\, d\rho$

**7.17. Ariketa** Irudian agertzen den P puntu bakoitzeko dentsitatea, P puntutik jatorrirainoko distantziaren karratuaren proportzionala da.

1. Dentsitate-funtzioa interpretatu.
2. Dentsitate-funtzioaren gradientea kalkulatu eta interpretatu.
3. Gorputzaren masa kalkulatu.

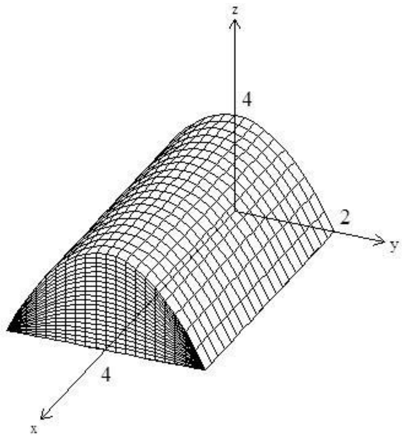



**7.18. Ariketa** Har dezagun irudian agertzen den zilindro parabolikoa.

1. Puntu bakiotzeko $d(x, y, z)$ dentsitatea konstantea dela suposatuz grabitate-zentroa kalkulatu.
2. Demgun $d(x, y, z)$ dentsitatea aldakorra dela. Izan bitez ondorengo funtzioak:

   $$d_1(x, y, z) = kx,\ d_2(x, y, z) = ky,\ d_3(x, y, z) = kz, d_4(x, y, z) = k(y + 2)$$

   Funtzio hauek, beraien gradienteak eta beraien sestra-kurbak interpretatu. Aztertu grabitate-zentroaren aldaketa funtzio horien arabera.


z
4
2
y
4
x