6. Kapitulua

Aldagai anitzeko funtzio errealak

6.1 Arazoaren aurkezpena

Orain arte, y aldagai bat nola aldatzen den x beste aldagai batekiko aztertzeko balio duen tresneria matematikoa garatu dugu. Adibidez, ondorengoak ikasi ditugu:

- x aldagaiak hartzen dituen balioen arabera, $x = a$ balio jakin batetik gertu dagoenean, y aldagaiaren jokaera nola aldatzen den aztertu dugu (hau da, $y(x)$-en limitea eta jarraitasuna $x = a$ puntuan).
- Aldagaiaren balioak ea $[m, M]$ tarte jakin baten barruan mantentzen diren aztertu dugu (y-ren bornapena).
- y aldagaia x-ekiko zein abiaduran aldatzen den ikasi dugu (y-ren deribatua x-ekiko).
- y-ren batez besteko balioa x-ekiko $[a, b]$ tarte batean aztertu dugu ($y(x)$-en integrala $[a, b]$-en).
- y aldagaiari (x-ekiko) lotuta dauden parametroak kalkulatzen ikasi dugu ($y(x)$ funtzioaren bidez definitutako kurba zatia emanik, berak mugatutako azaleraren kalkulua, luzera, biraketa-gorputzaren bolumena)

Baina Zientzian eta Ingeniaritzan interesatzen zaizkigun fenomeno errealetan, aldagai bat baino gehiagoren menpe dauden M magnitudeak ere ager daitezke. Aldagai hauetariko bakoitzak bere esanahia eta bere definizio eremua izango du. M aldagaia, adibidez u, v, w aldagaien menpekoa dela adierazteko, $M(u, v, w)$ idatziko dugu. Ikus ditzagun adibide erraz batzuk:

1) Azalera eta bolumena.

Hainbat parametroren menpe (luzera, altuera, erradioa,...) emanda datozen laukizuzenen, triangeluen, esferen, konoen, etab. bezalako irudien azalera edo bolumena. Beraz, azalera eta bolumena parametro horien menpeko funtzioak dira.
x eta y aldeko laukizuzen baten azalera: $A(x, y) = xy$.
b oinarriko eta h altuerako triangelu baten azalera: $A(b, h) = bh/2$.
r erradioko eta h altuerako kono baten bolumena: $V(r, h) = \pi r^2 h/3$.
b oinarriko, a zabalerako eta h altuerako prisma angeluzuzen baten bolumena: $V(b, a, h) = bha$.

2) $y(x)$-en integrazioa mutur aldakorrekin.

Dakigunez, $y(x) \geq 0$ bada $[a, b]$ tartean, orduan

$$A = \int_a^b y(x)dx$$

balioa (existitzekotan) $y(x)$ funtzioaren grafikoak eta OX ardatzak mugatzen duten azaleraren berdina da, edozein $x \in [a, b]$ balioetarako. Hala ere, a eta b muturrak aldakorrak direla suposatuz, A balioa a eta b-ren menpe idatz dezakegu:

$$A(a, b) = \int_a^b y(x)dx$$

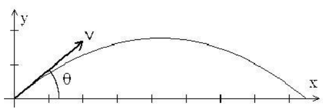
Adibidez, $y(x) = \mathrm{e}^x$ bada:

$$A(a, b) = \int_a^b \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a \;\Rightarrow\; A(a, b) = \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a \qquad (1)$$

(1) adierazpenarekin, zuzenean A azalera kalkula dezakegu a eta b parametroen balioak ezagututa. Hau da, adibidez, $A(0, 1) = \mathrm{e} - 1$ eta $A(2, 4) = \mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^2$.

3) Jaurtigaien jaurtiketa.

Kontsidera dezagun kanoi bat, lurretik jaurtigaiak jaurtitzen dituena, θ angelu jakin batekin eta v abiadurarekin (ikus 1 irudia).



6.1 Irudia: jaurtigaiaren ibilbidea

Kasu honetan, jaurtigaiaren x posizioa eta bere y altuera (t une bakoitzean) kalkulatzeko eredu bat, hurrengo funtzioen bidez emanda dator:

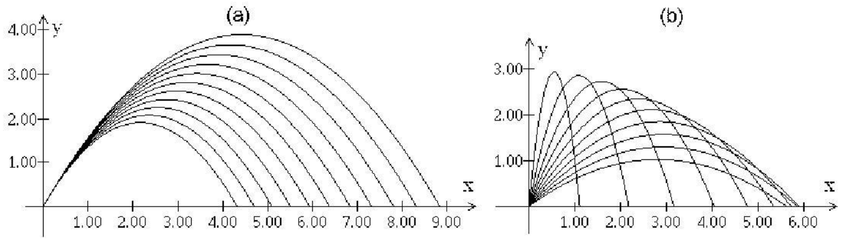
$$x(t, v, \theta) = tv \cos\theta$$

$$y(t, v, \theta) = tv \sin\theta - \frac{gt^2}{2} \qquad (2)$$

x eta y funtzioak t denboraren, v hasierako abiaduraren eta θ jaurtiketa angeluaren menpekoak dira. (2) ekuazioetatik, y posizio bertikala kalkula daiteke, x, v eta θ-ren menpean:

$$y(x, v, \theta) = x \tan\theta - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2\theta}$$

Ikusi 2 irudia. (a)-n v-ren balio ezberdinak hartuz y-ren grafikoak marraztu ditugu (x-en menpean); guztietan θ balioa konstantetzat hartu dugu. (b) irudian, berriz, θ-ren balio ezberdinekin y-ren grafikoak marraztu ditugu (x-en menpean); kasu honetan, v konstante mantendu dugu.



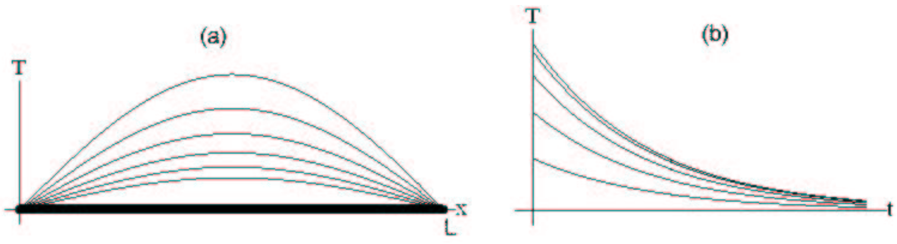
6.2 Irudia: y-ren grafikoak θ (a irudia) eta v (b irudia) konstantetzat hartuz

4) Barra bateko beroaren banaketa.

Demagun L luzerako barra metaliko baten T tenperaturaren aldaketa aztertu nahi dugula. Barraren puntu bateko T tenperaturaren balioa bi aldagaien menpekoa da: x posizioa eta tenperatura neurtzen den t momentua; beraz, $T(x, t)$. Ikusi 3a irudia; t momentu ezberdinetan T-ren banaketaren eboluzio posible bat marraztu dugu. Hau da, $T(x, t)$-ren grafikoak daude t balio zehatz jakin batzuetarako. $T(x, 0)$, barrako hasierako tenperaturaren banaketa da, noski.

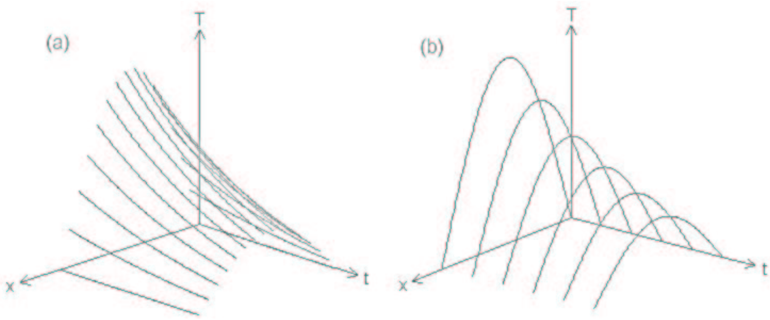
3b irudian, aldiz, barraren puntu jakin batzuetarako T-ren grafiko posibleak marraztu ditugu. Hau da, irudian $T(x, t)$-ren grafikoak daude, x-en balio ezberdinekin. Kasu honetan, $T(0, t)$ eta $T(L, t)$ funtzioek, barraren muturretan, tenperatura nola aldatzen den (denborarekiko) adierazten dute.

Aurreko grafikoak aldagaietariko bati balio finko bat emanda marraztu ditugu. Baina posible da T tenperaturaren eboluzioaren grafikoa marraztea x eta t aldagaien menpe; horretarako espazioan marraztutako grafikoa behar dugu. x-en balio zehatz batzuk hartu eta dagozkion $T(x, t)$ kurbak marraztu behar dira (ikus 4a irudia). Ondoren, t-ren balio finko



6.3 Irudia: $T(x,t)$-ren grafikoak t-ren (a) eta x-en (b) balio ezberdinetarako

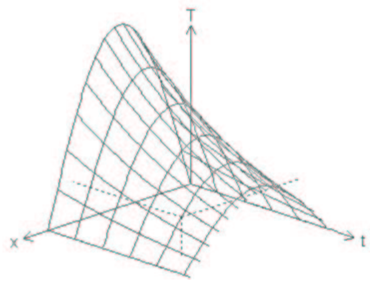
batzuk hartuz, dagozkion $T(x,t)$ kurbak marrazten dira (ikus 4b irudia).



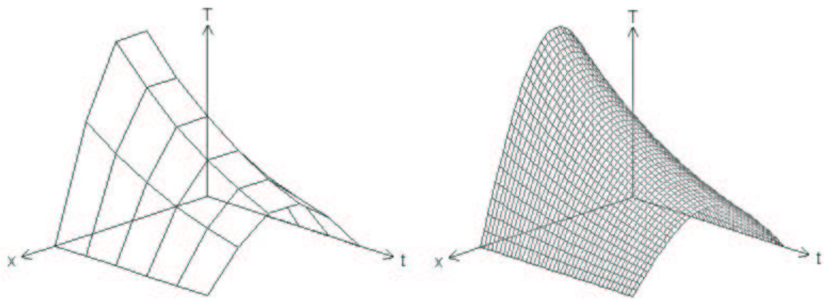
6.4 Irudia: $T(x,t)$-ren grafikoak espazioan

Bi kurba familiak grafiko berean marrazten baditugu, T-ren eboluzioaren grafikoa lortuko dugu (x-en eta t-ren menpean aldi berean) (ikus 5 irudia).

Ondorioz, (x,t) puntu bakoitzerako $T(x,t)$-ren balioa kokatu dugu OZ ardatzean; emaitza 3 dimentsioko gainazal bat izan da. Gainazal hori $x = K$ planoarekin ebakitzen badugu, kurba bat lortzen da; kurba horrek, barraren x balio horretan tenperatura nola aldatzen den adierazten du, denbora aurrera doan heinean. Aldiz, gainazala $t = K$ planoarekin ebakiz, lortzen dugun kurbak, momentu zehatz horretan barraren x puntu bakoitzeko tenperaturaren balioa ematen digu. Gainazal horiek marrazteko, posible da, noski, kurba horien loditasuna aldatzea, 6 irudian agertzen den bezala.



6.5 Irudia: Aurreko bi kurba familiak grafiko berean



6.6 Irudia: Aurreko gainazalaren grafikoak loditasun ezberdinekin

6.1. Ariketa Aplikazio praktikoetan agertzen diren aldagai anitzeko funtzioen beste adibideak hurrengoak dira: xafla metaliko plano baten (x, y) puntu bakoitzeko $T(x, y)$ tenperatura; labe baten (x, y, z) puntu bakoitzeko $T(x, y, z)$ tenperatura; $K(x, y, z)$ kontaminazio-kontzentrazio maila, (x, y, z) puntu bakoitzean. Aurreko ideiak jarraituz, adibide hauetariko bakoitzarekin, marraztu aldagai bakoitzaren banaketen grafiko posibleak.

Ikusi dugunez, aplikazio praktiko interesgarrietan aldagai anitzeko funtzio errealak agertzen dira. Defini dezagun kontzeptua modu formalean.

6.1. Definizioa *Izan bedi D planoko eremu bat. D-n definituta dagoen bi aldagai errealetako funtzio erreal bat, $(x, y) \in D$ puntu bakoitza, $f(x, y)$ zenbaki erreal bakar batekin lotzen duen elkarbidea da.*
Modu berean definitzen dira hiru, lau edo aldagai gehiagoko funtzio errealak.

6.2. Ariketa Hurrengo funtzio errealen definizio eremua lortu eta ondoren, grafikoa marraztu.

a) $f(u,v) = \dfrac{1}{u+v}$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

d) $f(x,y) = \ln(x^2 - xy)$

e) $f(x,y,z) = \sqrt{xyz}$

f) $f(x,y,z) = \sqrt{x+y+z-1}$

Orain, planteatzen dugun lana, aldagai bakarreko funtzioekin egindakoaren berbera da; hau da, tresneria matematikoa garatu nahi dugu; horrekin, M aldagaia nola aldatzen doan aztertu ahal izango dugu, menpeko x, y, z... aldagaien balioak aldatzen doazen heinean. Zentzua izango al du $M(x,y)$ edo $M(x,y,z)$ funtzioen limiteaz eta jarraitasunaz hitz egiteak? Deribatu ahal izango dira? Eta integratu? Zer adieraziko dute, kasu honetan, deribatzeak eta integratzeak? Zer erabilpen izango dituzte kontzeptu horiek? Galdera guzti hauek erantzungo ditugu gai honetan, eta baita hurrenagokoetan ere.

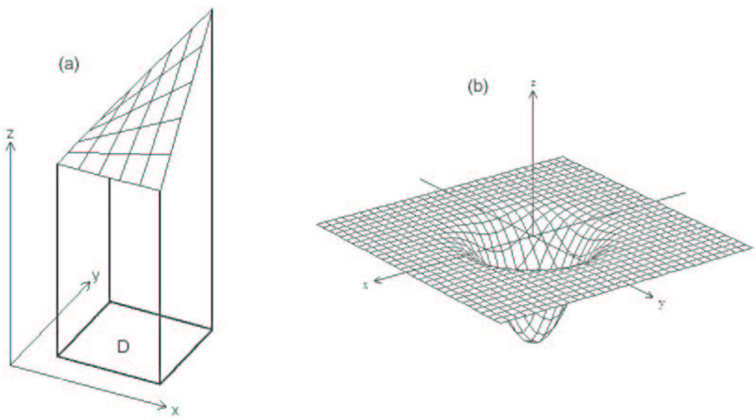
6.2 $z = f(x,y)$ funtzioen adierazpen grafikoa. Maila-lerroak

Azter dezagun zehatzago bi aldagaitako $z = f(x,y)$ funtzioen adierazpen grafikoak egiteko modua. Ohartu aldagai bateko $y(x)$ funtzio erreal baten (non $x \in D \subset \mathbb{R}$) adierazpen grafikoa egiteko, planoan $(x, y(x))$ (non $x \in D$) puntuak marrazten ditugula. Aurreko atalean ikusi dugun bezala, $z = f(x,y)$ funtzioa $D \subset \mathbb{R}^2$ eremuan marrazteko ere ideia berbera erabiltzen da; hau da, espazioan $(x, y, f(x,y)$ moduko puntuak (non $(x,y) \in D$) marraztu behar ditugu. Puntu hauek guztiak gainazal bat osatuko dute.

$z = f(x,y), (x,y) \in D$ funtzioaren gutxi gora beherako grafikoa marrazteko hurrengo pausuak jarraitu beharko ditugu:

- $y = k$ planoan $z = f(x,k)$ kurba marraztu, k-ren balio ezberdinetarako. Hau da, gainazala OY ardatzari elkarzutak diren planoekin ebaki behar dugu, eta ondoren, lortutako ebakidurako kurbak marraztu behar dira.
- $x = k$ planoan $z = f(k,y)$ kurba marraztu, k-ren balio ezberdinetarako. Hau da, gainazala OX ardatzari elkarzutak diren planoekin ebaki behar dugu, eta ondoren, lortutako ebakidurako kurbak marraztu behar dira.

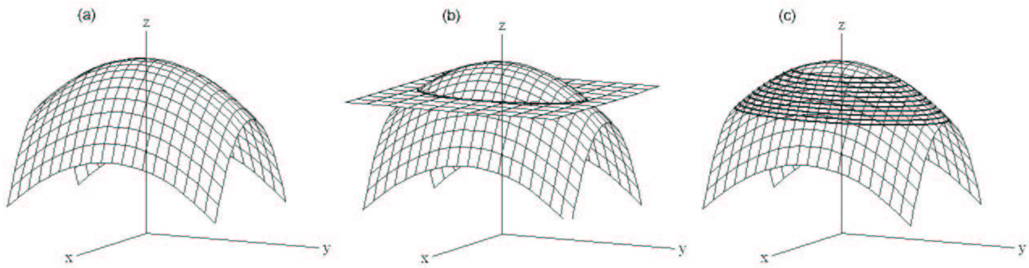
7a irudian, $z_1 = 2.6 + (x - 0.4)(y - 0.4)$ funtzioa modu horretan marraztuta agertzen da,



6.7 Irudia: z_1-en (a) eta z_2-ren (b) grafikoak

$D = [0.4, 1.4]x[0.4, 1.4]$ eremuan. 7b irudia, berriz, $z_2 = \frac{-5}{1+e^{(x^2+y^2)}}$ funtzioaren grafikoa da, $D = [-4, 4] \times [-4, 4]$ eremuan.

$z = f(x, y)$ funtzioaren grafikoaren informazio gehiago lor daiteke gainazala, OZ ardatzari elkarzuta den plano batekin ebakiz, hau da, $z = k$ itxurako plano batekin. Ikusi 8 irudia. (a) irudian, $z = 40 - 4x^2 - y^2$ gainazala marraztu dugu. (b) irudian, $z = 33$ planoa, eta bi funtzioen arteko ebakidura kurba. Eta (c) irudian berriz, gainazala eta $z = k$ moduko plano batekin ebakitzean lortutako ebakidurako hainbat kurba marraztu ditugu.



6.8 Irudia: $z = 40 - 4x^2 - y^2$ gainazalaren eta $z = k$ planoen arteko ebakidurak

Ikus dezagun zein kurba lortzen dugun $z = 40-4x^2-y^2$ funtzioaz definitutako gainazala eta $z = k$ planoa ebakitzean:

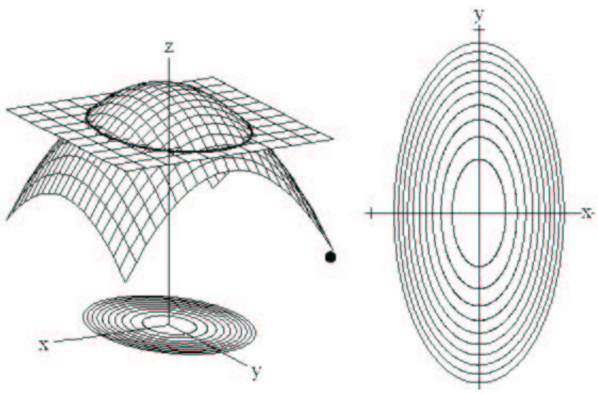
$z = 40 - 4x^2 - y^2$ eta $z = k$
Ordezkatuz:

$$k = 40 - 4x^2 - y^2 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{40-k}{4}} + \frac{y^2}{40-k} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{40-k}{4}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{40-k}\right)^2} = 1 \qquad (4)$$

Beraz, ebakidura, $z = k$ planoan kokatuta dagoen elipse bat da, zentroa $(0,0,k)$ puntuan eta ondorengo ardatzerdiak dituena:
$a = \sqrt{\frac{40-k}{4}}$ eta $b = \sqrt{40-k}$ (non $k < 40$) (5)
Gainera, elipse hauek espazioan marraztu beharrean XY planoan marraz ditzakegu, maila-lerroak deitutakoak lortuz.

6.2. Definizioa *Izan bitez D planoko eremu bat eta $z = f(x,y)$ D-n definituta dagoen bi aldagaitako funtzio bat. $k = f(x,y)$ moduko kurba guztiei maila-lerroak deitzen zaie, k konstante bat izanik.*

9 irudian ikus daitekeen bezala, maila-lerroak $z = f(x,y)$ gainazala eta $z = k$ planoak ebakitzean lortzen diren kurben XY planoko proiekzioak dira.



6.9 Irudia: maila-lerroak

Ohartu maila-lerro bat z-k balio berberak hartzen dituen (x,y) puntuetaz osaturik dagoela. Adibidez, $z = 40 - 4x^2 - y^2$ funtzioak txapa metaliko baten (x,y) puntuan duen tenperatura adierazten badu, orduan, k-ren balio bakoitzerako, (9 irudiko) dagokion elipseak k tenperatura duten (x,y) puntuak bilduko ditu. k-ren balioa handitzen doan heinean (tenperatura handiagoa), elipsearen ardatzerdien balioak txikiagotzen doaz ((5) ekuazioa). Tenperatura maximoa $k = 40$ da, $(0, 0)$ puntuan lortzen dena. Kasu horretan, ez da maila-lerrorik existitzen, gainazala eta $z = 40$ planoaren arteko ebakidura $(0, 0, 40)$ puntua baita.

Maila-lerroen diagrama batean, ondoz ondoko bi kurben arteko tarte-luzerak aztertuz, informazio garrantzitsua lor dezakegu. $f(x, y) = k$ maila-lerroak k parametroaren gehikuntza konstanteen bidez marrazten dira. Adibidez, 9 irudiko hamar maila-lerroak, $k = 30, 31, 32, \ldots, 39$ balioak hartuz marraztu dira. Ohartu, (irudi berean) maila-lerroak $(0, 0)$ puntutik urruntzen doazen heinean, geroz eta gertuago daudela elkarrengandik. Horrek esan nahi du, $(0, 0)$-tik urrun dagoen (a, b) puntu batean, (a, b)-tik $(a + h, b + h)$-rako desplazamendu txiki batek funtzioaren balioetan ezberdintasun handia egotea eragin dezakeela. Hau da, $f(a, b)$ eta $f(a+h, b+h)$ (f-ren gehikuntza) arteko diferentzia handiagotzen da, (a, b), $(0, 0)$ puntutik urruntzen doan heinean.

6.3. Ariketa Izan bedi $f(x, y) = 40 - 4x^2 - y^2$ funtzioa. Kalkulatu funtzioak (a, b)-tik $(a+h, b+k)$ puntura pasatzeko jasaten duen gehikuntza $(0, 0), (1, 1)$ eta $(10, 10)$ puntuetan, gehikuntza txiki bat hartuz (adibidez $h = 0.1, k = 0.2$). Interpretatu lortutako emaitza.

Ikusi dugunez, $f(x, y) = 40-4x^2-y^2$ funtziorako, $f(a, b)$ eta $f(a+h, b+h)$ (f-ren gehikuntza) arteko diferentzia handiagotzen doa, (a, b) puntua $(0, 0)$-tik urruntzen doan heinean. Orokorrean, $z = f(x, y)$ funtzio baterako, (a, b)-tik $(a+h, b+k)$ puntura desplazatzean (h eta k gehikuntza txikiekin), (a, b) puntua maila-lerroak elkarrengandik oso gertu dauden eremu batean kokatuta badago, orduan, z balioak gehikuntza handi bat jasan dezake. Eta (a, b) puntua maila-lerroak elkarrengandik urrun dauden eremuan badago, berriz, z-k gehikuntza txikiagoa jasango du. Hau da, beste modu batera esanda, z aldagaia aldatzen den abiadura handiagoa da maila-lerroak gertu dauden eremuetan, urrun dauden eremuetan baino. Ikus dezakezunez, pixkanaka, $y = f(x)$ aldagai bakarreko funtzioetan ikasi genuen kontzeptu bati forma ematen ari gara orain ere: deribatua; baina, kasu honetan, bi aldagaiko $z = f(x, y)$ funtzioekin.

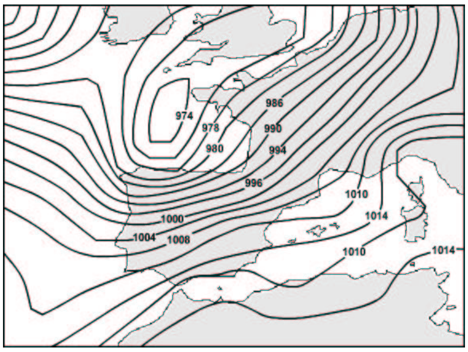
6.3 Maila-lerroen aplikazioak

Ikus ditzagun $z = f(x, y)$ funtzio baten maila-lerroetatik informazio garrantzitsua lor daitezkeen egoera praktikoen adibide batzuk.

1) Isobarak.

Meteorologian oso magnitude garrantzitsua da, itsasmailan, eremu geografiko bateko (x, y) puntu bakoitzeko presioaren P balioa. Horrela, funtzio erreal bat definitzen da, $P = F(x, y)$, milibaretan emanda datorrena. Presio atmosferikoaren balioak, momentu berean lurrean eta itsas gaineko buiatan kokatutako hainbat estazio meteorologikotatik hartzen dira. Presio atmosferiko berbera duten mapako puntuak marren bidez lotuz (konbenio bidez, lau milibaretako tarteekin), meteorologoek lurreko gainazaleko eremuaren presioaren egoera orokorra zein izan daitekeen ondoriozta dezakete. Marra horiei, Meteorologian, isobarak deitzen zaie, baina presio funtzioaren marra-lerroak besterik ez dira, hau da, $F(x, y) = k$ kurbak, non adibidez, k=996, k=1000, k=1004, etab.

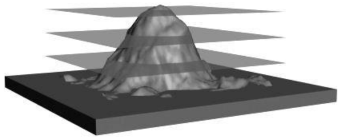
10 irudian ohiko isobara mapa bat dago, 2004-ko Urriak 20 egunekoa. Ikusi eremu geografiko batzuetan (Iberiar Penintsularen erdialdean, adibidez) isobarak nahiko gertu daudela elkarrengandik, eta askoz urrunago beste eremu batzuetan (Mediterraneo inguruan, adibidez). Isobarak hurbil dauden eremuetan, gertu dauden bi puntuetan P presio atmosferikoan ezberdintasuna handia izango da. Beste modu batera esanda, P-ren aldaketaren abiadura handiagoa da isobarak gertu dauden eremuetan. Eta zer adierazten du horrek Meteorologian? Haize gogorrak. Isobarak oso gertu dauden lekuetan haize gogorra ibiliko da. Isobarak urrun dauden lekuetan, berriz, haizea ahulago ibiliko da. Adibidez, 10 irudiko mapan, Euskal Herrian kokatuta dauden isobarak nahiko gertu daude, eta egun hartan, Cerrojako (Bizkaia) estazio meteorologikoan 143 Km/h-ko abiadurako haize bortitza neurtu zen.



6.10 Irudia: isobara mapa

2) Mapa topografikoak.
Mapa topografikoetan, maila-lerroen bidez, (x, y) puntu bakoitzeko $H = H(x, y)$ altueran lurraren mailen arteko ezberdintasuna adierazten da. Maila-lerroak, itsasmailarekiko altuera berean dauden puntuak lotzen ditu (ikus 11 irudia). Maila-lerroei hisohipsak deitzen zaie itsasmailatik gora baldin badaude, eta behera daudenean, berriz, isobatas.

Aztertu 12 irudia. Eremu geografiko bateko 60 Km^2-ko mapa topografiko bat da, 100 metro bakoitzeko altuerak agertzen direlarik. Gero, A eta B puntuak emanda, bi puntuen



6.11 Irudia: maila-lerroak altuera bereko puntuez osatzen dira

arteko ibilbidearen gutxi gora beherako profila marraztu dugu. Itxura honetako profilak, adibidez, mendiko liburuetan eta txirrindulari biratako etapetan agertzen dira. Isohipsak gertuago dauden eremuetan, aldapa handiagoak daudela esan nahi du; isohipsak aldenduago dauden lekuetan berriz, aldapa txikiagoak dauden seinale izango da, hau da, lurra lauagoa izango da. Beste modu batera esanda, H altueraren aldaketa abiadura handiagoa izango da isohipsak gertuago dauden eremuetan.

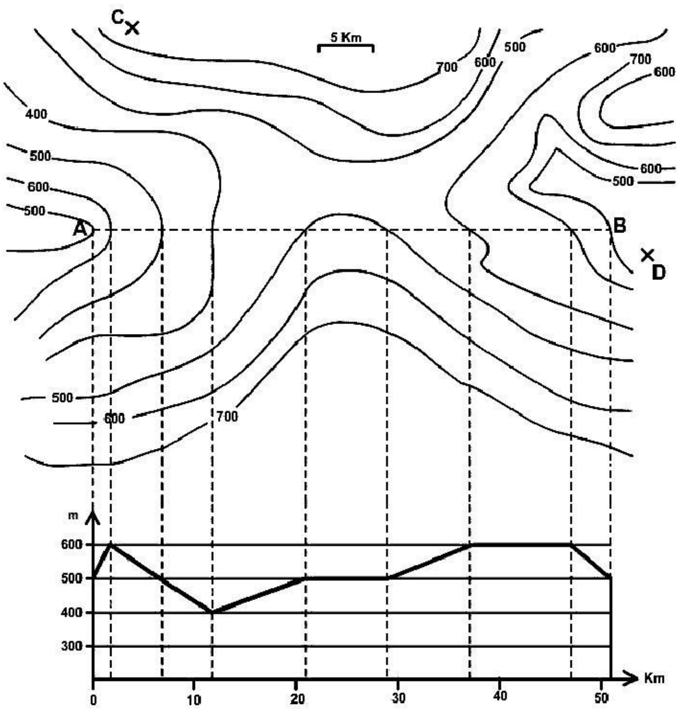
6.4. Ariketa 12 irudiari buruzkoa:
a) C eta D puntuak ibilbide zuzen batekin lotuz, marraztu bi puntuen arteko ibilbidearen profila.
b) Kalkulatu gutxi gora beherako bi puntuen arteko distantzia.
d) Demagun bizikletaz egiten dugula ibilbidea, eta aldapa gogorrenak saihestu nahi ditugula. Aukeratu C eta D arteko ibilbide laburrena.

6.4 Gainazal klasiko batzuk

Ikusi dugunez, $z = f(x, y)$ funtzio batek definitutako gainazalaren zirriborroa marrazteko, gainazala $x = k, y = k, z = k$ planoez ebakitzean lortutako kurbetaz baliatzen gara. Zehazki $z = 40 - 4x^2 - y^2$ funtziorako, gainazalaren eta $z = k$ planoaren arteko ebakidura elipse bat dela ikusi genuen. Erraz egiaztatu daiteke gainazalaren eta $x = k$-ren arteko ebakidura parabola bat dela, eta baita $y = k$-rekin ebakiz (ikusi 8 irudian parabola horiek). Horregatik, $z = 40 - 4x^2 - y^2$ funtzioaz definitutako gainazalari paraboloide eliptikoa deitzen zaio.

6.5. Ariketa 13 irudian aplikazio praktikoetan maiz agertzen diren gainazal batzuk daude. Beraien ekuazioak ondorengoak dira, baina, lotu al dezakezu gainazal bakoitza bere ekuazioarekin?

$$a)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}$$



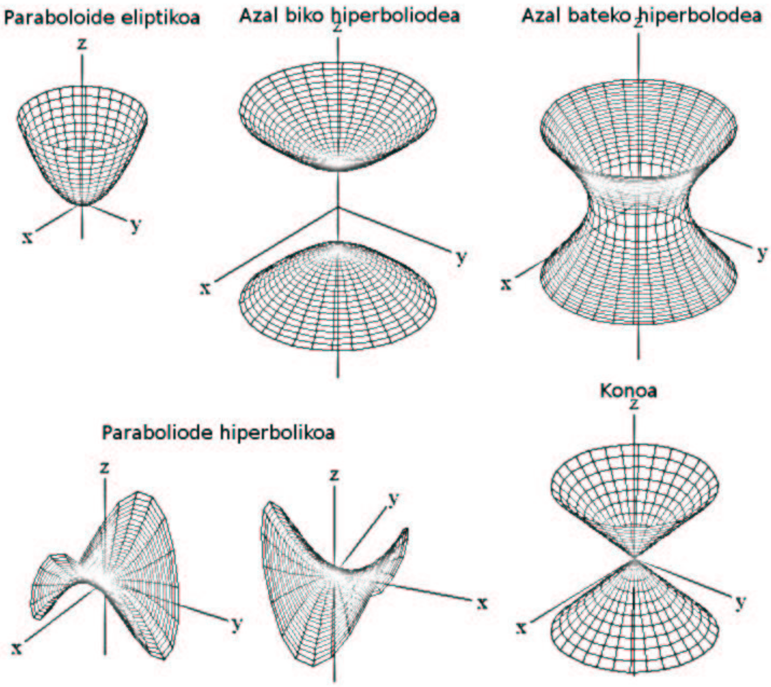
6.12 Irudia: mapa topografikoa eta A-tik B-rako ibilbidearen profila

b) $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

d) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2} - 1$

e) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$

f) $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = cz$



6.13 Irudia: (6) funtzioen grafiko batzuk

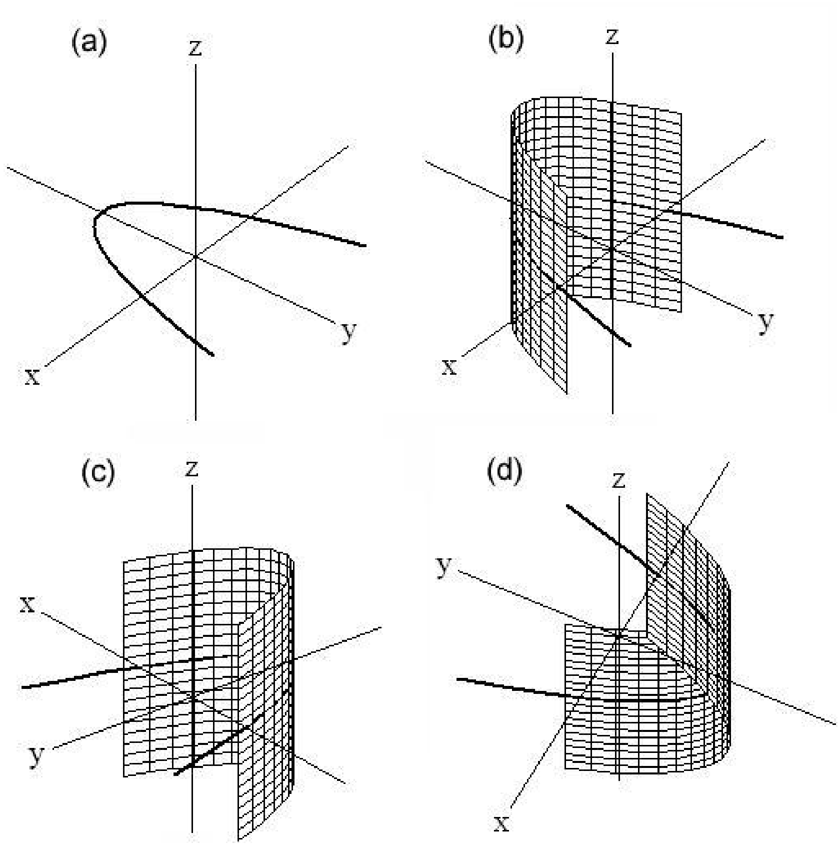
6.5 Gainazal zilindrikoak

Aztertu 14a irudia. $y = x^2 + 1$ parabola marraztu dugu XY planoan. Hau da, hurrengo bi baldintza analitikoak betetzen dituzten puntuen multzoa marraztu dugu espazioan:

$$y = x^2 + 1$$

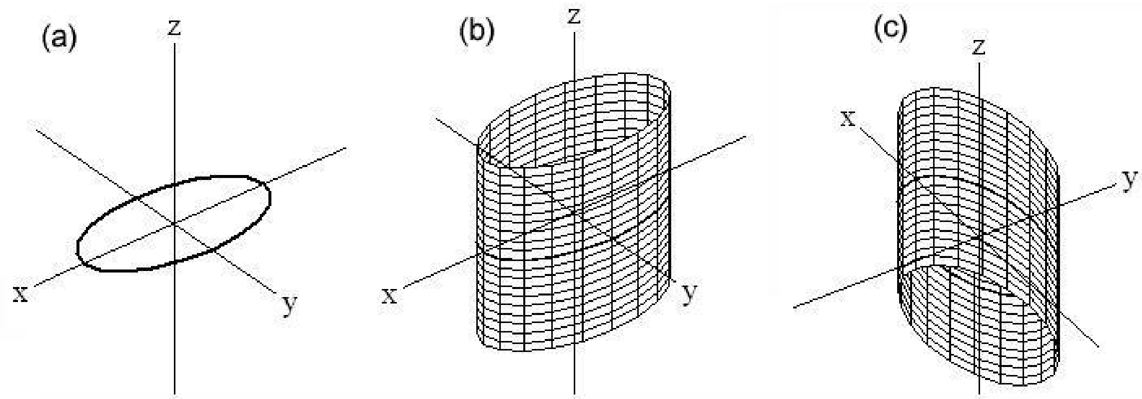
$$z = 0$$

Baina, zer gertatzen da $z = 0$ bigarren baldintza kentzen dugunean?. $y = x^2 + 1$ baldintzak espazioko zer puntuak adierazten ditu?. $y = x^2 + 1$ baldintzak ondorengoa adierazten du: z aldagia murrizketarik ez duela; hau da: $z \in (-\infty, \infty)$. $y = x^2 + 1$ ekuazioa betetzen duten (x, y, z) puntuek honako gainazala mugatzen dute: OZ ardatzarekiko paraleloak diren, eta (x, y) puntutik pasatzen diren zuzenak mugatutzen dutena, hai zuzen ere. 6.14(b,c,d) irudiek, gainazal honen zati bat adierazten dute; zati hau espazioko ikuspuntu desberdinetatik ikusita lortzen delarik. Era honetan definitutako gainazalari gainazal zilindrikoa edo zilindroa deritzo. Gainazal zilindrikoa definitzen duen $y = f(x)$ kurbari zuzentzailea deritzo. Zilindroa sortzen duten OZ ardatzarekiko paraleloak diren zuzenak sortzaileak dira.



6.14 Irudia: Gainazal zilindrikoak.

6.15 irudiak, zilindroaren beste zati bat erakusten du. Zilindoaren zuzentzailea elipse bat da. Orokorrean, zilindroaren zuzentzailea kurba ireki bat izan daiteke. Horrez gain, zuzentzailea, XZ edo YZ koordenatu planoetan egon daiteke. Zilindroa OZ ardatzarekiko paraleloa bada, gainazal zilindrikoa $F(x, y) = 0$ itxurako ekuazioaren bidez ematen da, $F(x, z) = 0$ ekuazioa erabiliko dugu, zilindroa OY ardatzarekiko paraleloa denean, eta $F(y, z) = 0$ ekuazioak adierazten du OX ardatzarekiko paraleloa den zilindro bat. Zuzentzailearen ekuazioan ez dagoen aldagaia hartzen badugu, zilindroa ardatz horrekiko paraleloa izango da.

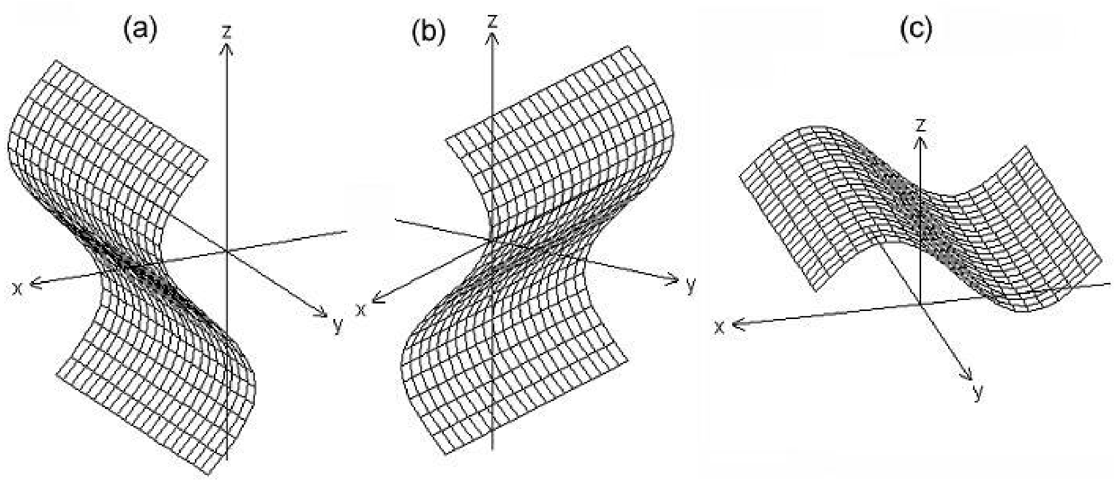


6.15 Irudia: Zilindro eliptikoa.

6.6. Ariketa 6.16 irudian, ondorengo zuzentzaileek definitzen duten gainazal zilindrikoen zati batzuk, agertzen dira: $z = 1 + \sin x$, $x = 1 + \sin z$, $y = 1 + \sin z$. Badakizu zuzentzaile bakoitzari dagokion grafikoa aukeratzen?

6.7. Ariketa Ondorengo gainazalak marraztu.

1. $x = \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2}$
2. $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(z - z_0)^2}{b^2} = \dfrac{(y - y_0)^2}{c^2}$
3. $x = \dfrac{1}{y^2}$
4. $y^2 + z^2 = R^2$
5. $y = z^2 + 2$



6.16 Irudia: 6.6 adibidearen gainazalak.

6.6 Gainazal baten bidez definitutako solidoak.

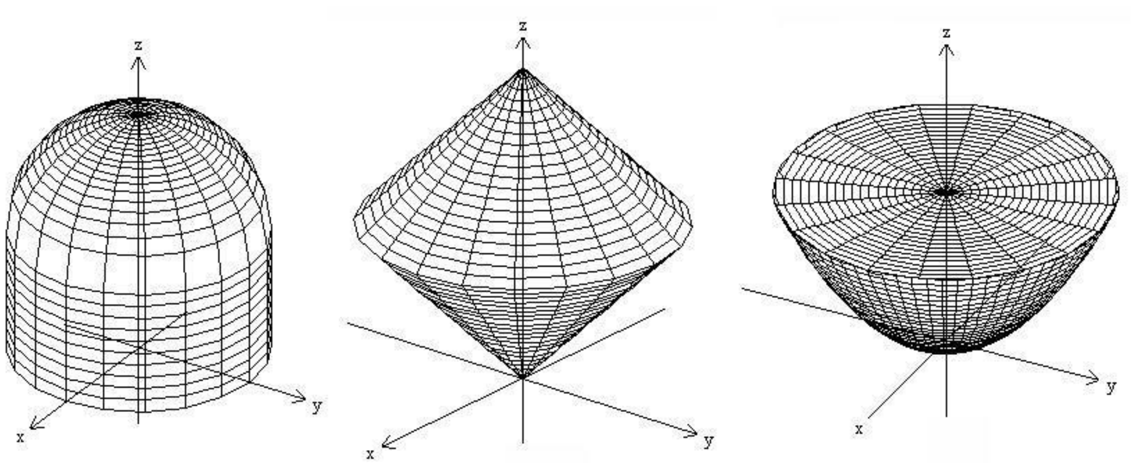
Askotan interesatzen zaigu espazioko gorputz baten bolumena, bere gainazalaren azalera, masa, grabitate-zentroaren koordenatuak, etb. kalkulatzea. Has gaitezen ikusten, batzuetan, S gorputza adieraz daitekela bere muga osatzen duten gainazalaren bidez.

6.8. Ariketa 6.17 irudian hiru gorputz desberdinak agertzen dira. Ondorengo baldintzek gorputz horiek definitzen dituzte. Saia zaitez baldintzak eta solidoak erlazionatzen.

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4 \quad 2 \leq z \leq 4 \\ z = 0 \end{cases}$



6.17 Irudia: 6.8 ariketako gorputzak

6.7 w=f(x,y,z) itxurako funtzioen adierazpen grafikoa. Maila kurbak

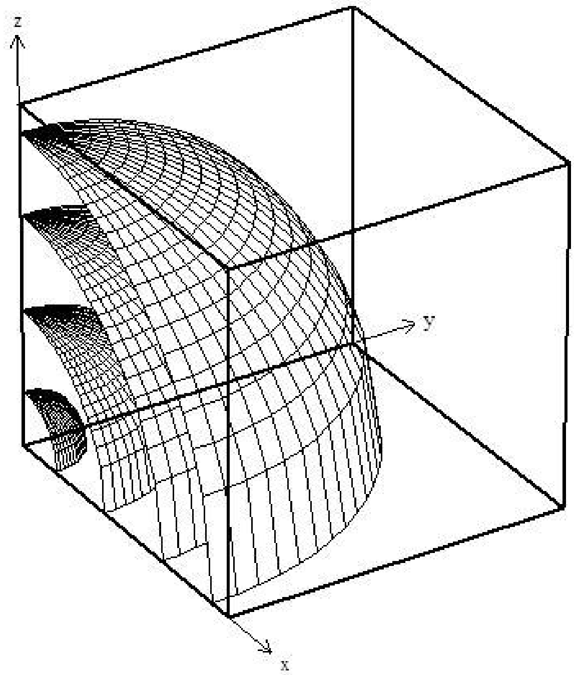
Ikusi dugunez, garrantzitsua den maginitude fisiko bat (tenperatura, masaren konzentrazioa, presioa, altuera etb.), planoko $D \subset \mathbb{R}^2$ eremuan definitutako $f(x, y)$ funtzioaren bidez adieraz daiteke. Era berean, espazioko $D \subset \mathbb{R}^3$ eremuan definitutako $f(x, y, z)$ funtzioak ere, $(x, y, z) \in D$ puntu bakoitzean, magnitude fisikoren bat adieraz dezake. Adibidez, D labe baten barrualdea izan daiteke eta $T = f(x, y, z)$ funtzioa, (x, y, z) puntu bakoitzeko tenperatura.

Gogora ezazu, $y = f(x)$ $\mathbb{R}^2$-n marrazten dela eta $z = f(x, y)$ funtzioa $\mathbb{R}^3$-n marrazten dela. Era berean, $w = f(x, y, z)$ $\mathbb{R}^4$-n marraztu beharko genuke, azkeneko hau ezinezkoa izanik.

$w = f(x, y, z)$ funtzioaren "mailak"marrazten dira. Hau da: k konstanteari balioak emanez, $f(x, y, z) = k$ berdintza betetzen duten espazioko (x, y, z) puntuak marrazten ditugu. Maila hauek, geometrikoki, $\mathbb{R}^3$-ko gainazalak dira. Gainazal hauei maila kurbak deritze.

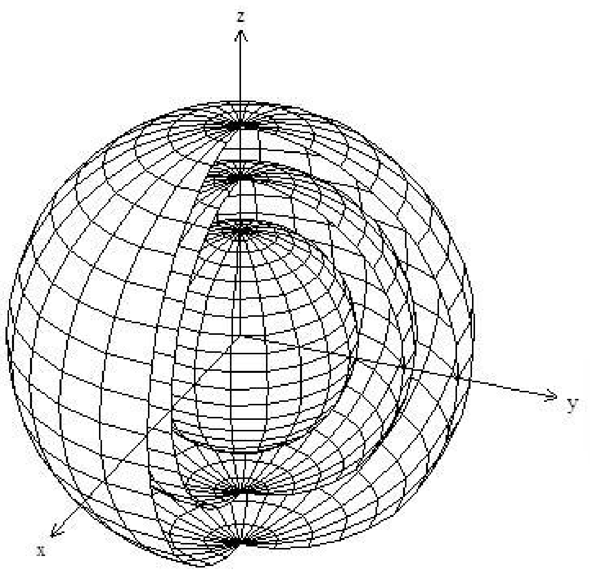
6.3. Definizioa *Izan bedi $w = f(x, y, z)$, espazioko D eremuan definitutako 3 aldagai errealeko funtzio erreala. $k = f(x, y, z)$ itxurako edozein gainazali funtzioaren maila kurba deritzo; k konstante bat da.*

6.1. Adibidea Demagun espazioko gorputz baten $P(x, y, z)$ puntu bakoitzeko masaren konzentrazioa, P puntutik gorputzaren erpin baterainoko ditantziaren proportzionala dela. Beraz, $P(x,y,z)$ puntu bakoitzeko masa puntuala, $C(x,y,z) = M^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ekuazioaren bidez adierazten da. Maila kurbak hauxek dira: $C(x,y,z) = k^2$, hau da, $\left(\dfrac{k}{M^2}\right)^2 = x^2+y^2+z^2$, $(0,0,0)$ zentroko eta k/M erradioko esferak. k-ren balio bakoitzarako, masaren konzentrazioa berdina duten $P(x,y,z)$ puntuek, maila kurba osatzen dute. 6.18 irudian itxura honetanko kurba batzuk azaltzen dira.



6.18 Irudia: 6.1 adibideko maila kurbak.

6.2. Adibidea M masak, bere inguruan grabitazio-eremu bat definitzen du. M puntutik distantzi berara kokatuta dauden puntuentzat eremuaren balioa berdina da. Orduan, maila kurbak (gainazal ekipotentzialak) M zentroko esferak dira. 6.19 irudian hauetako gainazal batzuk azaltzen dira non suposatu den masa koordenatu jatorrian kokaturik dagoela.



6.19 Irudia: 6.2 adibideko gainazalak.

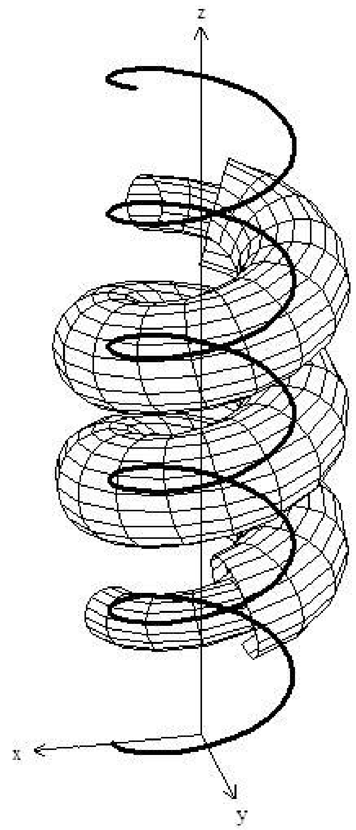
6.3. Adibidea Karga elektriko bat eroale batetik ibiltzen denean, bere inguruan eremu magnetiko bat sortzen du. Eremu magnetikoaren V balioa berdina izango da, eroaletik distantzi berberara kokaturiko (x, y, z) puntuentzat. 6.20 irudiak, bi maila kurba eta kable espira batzuk osatutako eroalea adierazten du.

6.8 $z = f(x, y)$ funtzioaren limitea eta jarraitasuna.

Ikus dezagun zein den $z = f(x, y)$ funtzioaren portaera (a, b) puntuaren inguruan. Ikus 6.21 irudia. Irudi honetan, $D = [0, 2] \times [0, 1]$eremuan definitutako ondorengo funtzioa agertzen da:

$$z = \begin{cases} 2x^2 + 1 & 0 \leq x \leq 1 \text{ bada} \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2 \text{ bada} \end{cases} \tag{6.1}$$

Argi dago, $f(x, y)$ funtzioaren portaera $P(1, 0.5)$ eta $Q(1.5, 0.5)$ puntuetan oso desberdina dela. Grafikoaren arabera, esan dezakegu $f(x, y)$ funtzioa "jarraia"dela $Q(1.5, 0.5)$

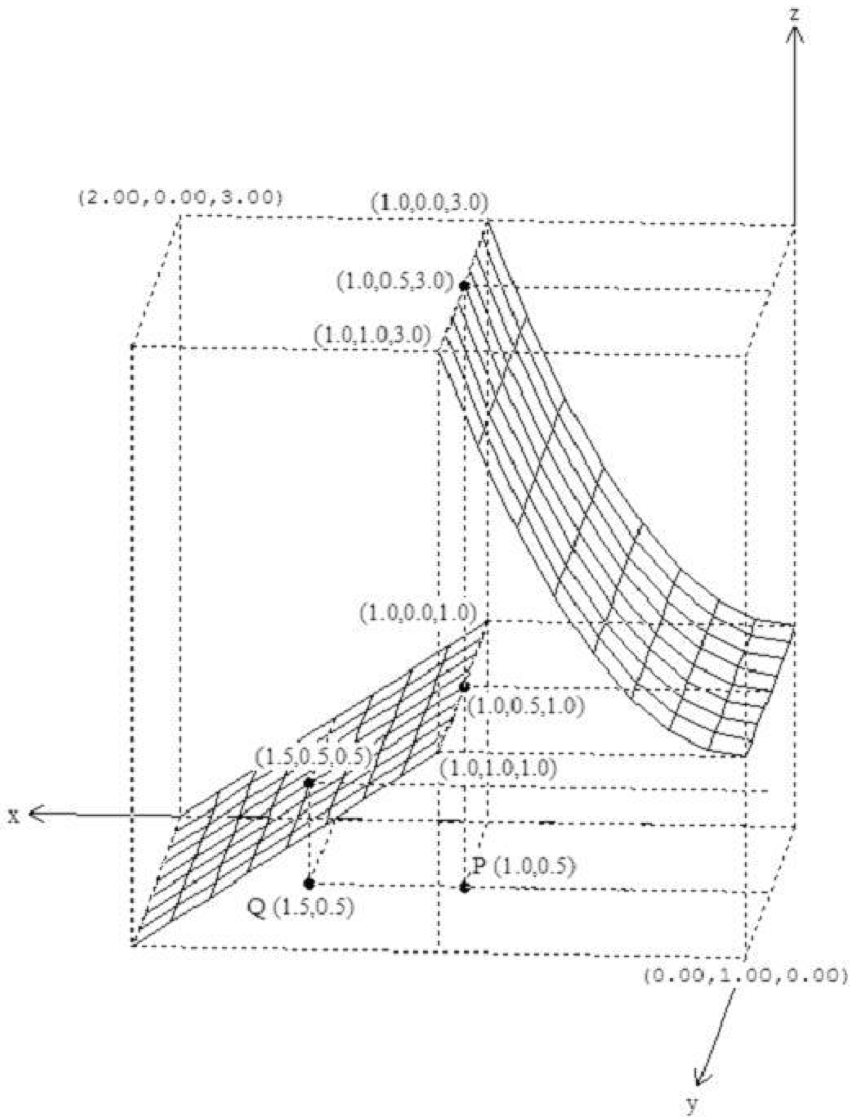


6.20 Irudia: 6.3 abidideko gainazalak.

puntuan eta $P(1, 0.5)$ puntuan berriz, ez-jarraitua dela. Are gehiago, esan dezakegu $f(x,y)$ funtzioa, eremuan dauden $(1,y)$ itxurako puntu guztietan ez-jarraitua dela. Batzuetan, ez da nahikoa izango $f(x,y)$ funtzioaren grafikoa erabiltzea, funtzioaren portaera (a,b) puntuaren inguruan deskribatzeko. Ikus 6.22 irudian azlatzen den grafikoa. $(0,0)$ puntuaren ingurune batean ondorengo funtzioaren bi bista desberdin marraztu ditugu.

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \tag{6.2}$$

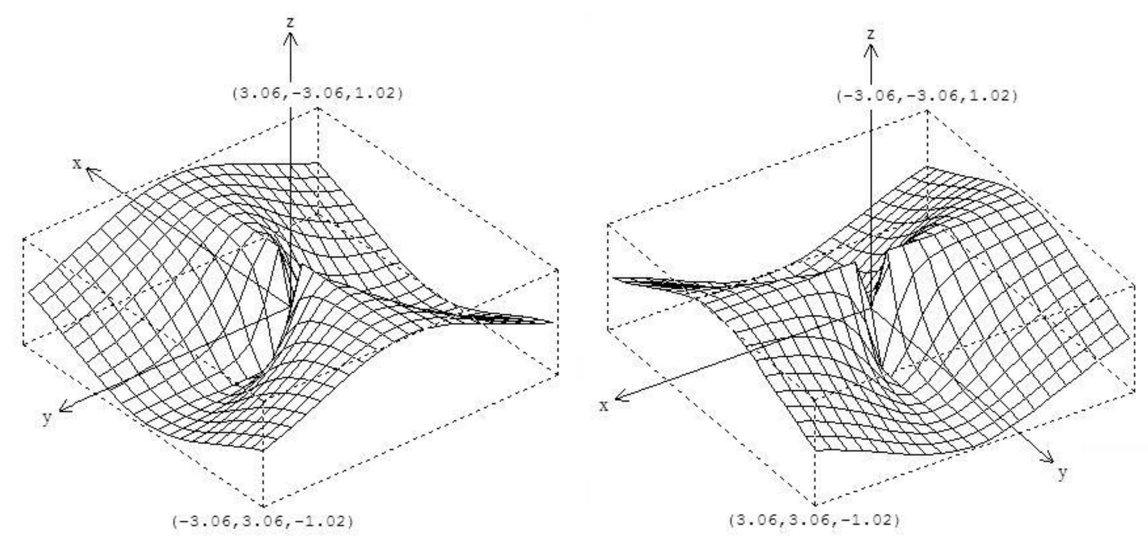
$(0,0)$ puntuan jarraia al da?. Funtzio hau ez dago definiturik $(0,0)$ puntuan, beraz, zaila



6.21 Irudia: Límite y continuidad

da puntu honen inguruan bere portaera aztertzea, grafikoa besterik erabilitzen ez badugu.

Aldagai bakarreko funtzioen kasuan bezala, jarraitasunaren adierazpen analitikoa idatzi



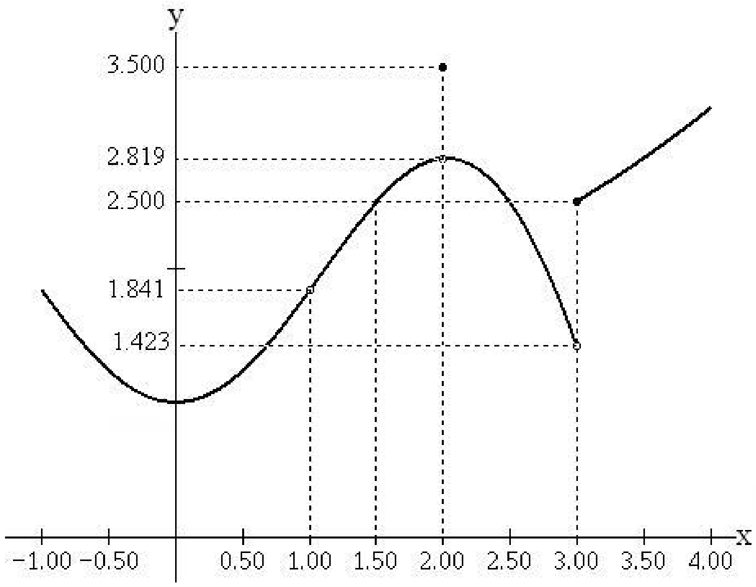
6.22 Irudia: $z = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ funtzioa

beharko dugu. Hasteko, prozedura gogoratuko dugu, aldagai bakarreko kasurako. Ikus 6.23 irudian azaltzen den $y(x)$ funtzioaren marrazkia.

Ikus dezagun $y(x)$-ren portaera eremuaren puntu batzuetan:

- $x = 1$ puntuan funtzioa ez dago definiturik baina $L = 1.841$ limitea onartzen du; alboko limiteak existitzen dira eta balio honen berdinak dira.
- $x = 1.5$ puntuan funtzioa definituta dago jarraia izanik; alboko limiteak existitzen dira eta $y(1) = 2.5$-ren berdinak dira.
- $x = 2$ puntuan funtzioa definituta dago eta $L = 2.819$ limitea lortzen da; kasu honetan ez da jarraia L, $y(2) = 3.5$-ren desberdina delako.
- $x = 3$ puntuan funtzioa definituta dago baina eskuin-limitea (2.5) eta ezker-limitea (1.423) desberdinak direnez ez dago limiterik.

$y(x)$ funtzioaren L limitearen existentzia $x = a$ puntuan aztertzeko, forgatu behar da alboko limiteak eta L berdinak direla. Funtzioa, $x = a$ puntuan jarraia izango da, $L = y(a)$ betetzen bada. Prozedura hau bi aldagia errealeko funtzioen kasuan erabili nahi dugunean,



6.23 Irudia: Aldagi bakarreko funtzioa.

ondorengo problema sortzen da. Ikus 6.24(a) irudia. $D \subset \mathbb{R}^2$ eremua eta $(a, b) \in D$ marraztu ditugu. Hau da nahi duguna: $(x, y) \in D$ puntua (a, b)-rantz joatea. Baina zer gertatzen da?. Orain ez dugula, ez (a, b) puntuaren ezkerra ezta (a, b) puntuaren eskuina. (a, b) puntura hurbiltzeko $y = c(x)$ kurba edo bideak jarraitu dezakegu non

$$\lim_{x \to a} c(x) = b$$

betetzen den.

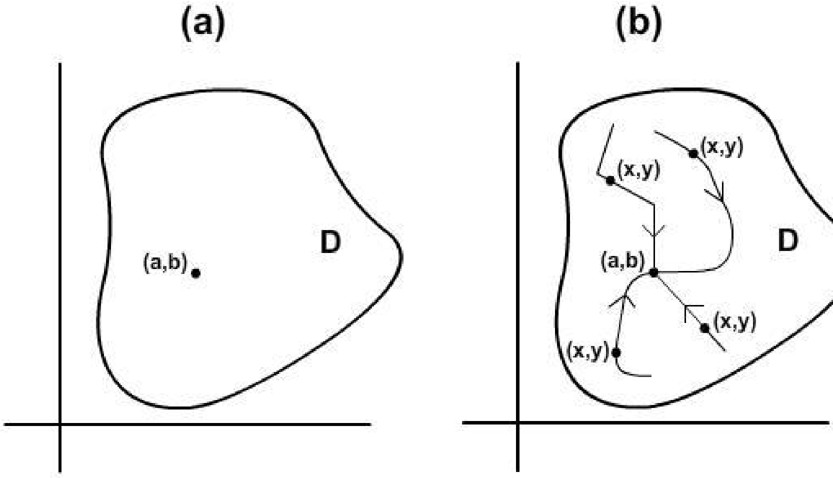
6.24(b) irudian horietako bide batzuk agertzen dira.

$z = f(x, y)$ funtzioaren limitearen existentzia eta jarraitasuna aztertzeko ondorengo ideia erabiliko dugu:

"L zenbaki erreala, $z = f(x, y)$, funtzioaren limitea da $(x, y) \to (a, b)$ doanean, ondorengoa betetzen bada: edozein biderako, $(x, y) \in D$ puntua (a, b) punturantz doanean, $z = f(x, y)$-ren balioak L balio berberantz jotzen du. Horrez gain, $L = f(a, b)$ betetzen bada orduan, $f(x, y)$ jarraia da (a, b) puntuan ".

Idatz ditzagun idei hauek formalki:

6.4. Definizioa *Izan bitez $z = f(x, y)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ eremuan definitutako funtzioa eta L*



6.24 Irudia: Bideak.

zenbaki erreal bat. L, $f(x,y)$-ren limitea da $(x,y) \to (a,b)$ doanean ondorengo baldintza betetzen denean: D eremuan dagoen eta

$$\lim_{x \to a} c(x) = b$$

baldintza betetzen duen hautazko $y = c(x)$ kurbarako

$$\lim_{x \to a} f(x, c(x)) = L$$

betetzen da.

Eta ondorengo eran adieraziko dugu:

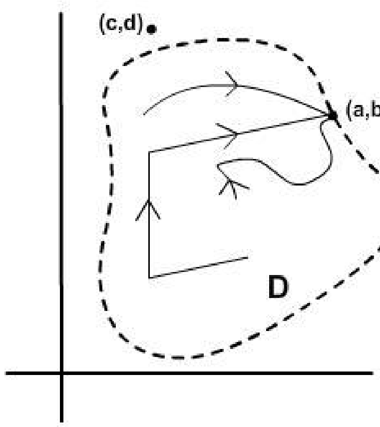
$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = L$$

6.5. Definizioa *Izan bedi $z = f(x,y)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ eremuan definitutako funtzioa, non $(a,b) \in D$ den. Aurreko funtzioa (a,b) puntuan jarraia da, (a,b) puntuan limitea onartzen badu eta limite hori $f(a,b)$-ren berdina bada. Baldintza hau ondorengo eran adieraziko da:*

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Aldagai bakarreko kasuan bezala, (a, b) puntuan L limitea existitzeko ez da beharrezkoa (a, b) puntua $f(x, y)$-ren D definizio eremuan egotea, hau da, gerta daiteke $f(a, b)$ ez egotea. $f(x, y)$ funtzioa (a, b) puntuan jarraia izateko beharrezkoa da $f(a, b)$ existitzea. Adibidez, (6.2) funtzioa ez dago definiturik $(a, b) = (0, 0)$ puntuan. Beraz, funtzioa ez da jarraia izango. Hala ere, $z = f(x, y)$ funtzioaren limitea puntu horretan azter dezakegu.

Ikus 6.25 irudia. $z = f(x, y)$ funtzio baten D eremuaren muga puntuen bidez adierazi dugu; modu honetan zera adierazten dugu: $z = f(x, y)$ funtzioa D-ren barruko puntuetan bakarrik definiturik dagoela. (a, b) puntua ez dago D eremuan, beraz ez dago $z = f(x, y)$ funtzioaren jarraitasuna (a, b) puntuan aztertzerik. Hala ere, $z = f(x, y)$ funtzioaren limitea $(x, y) \to (a, b)$ denean aztertu daiteke; D-ren barnean dauden kurbak erabil ditzakegu $(x, y) \to (a, b)$ lortzeko. Kasu honetan ez du zentzurik $z = f(x, y)$ funtzioaren limitea aztertzea $(x, y) \to (c, d)$ denean; ez dago (c, d) puntura iristerik D-ren barnean dauden kurbak erabiltzen baditugu.



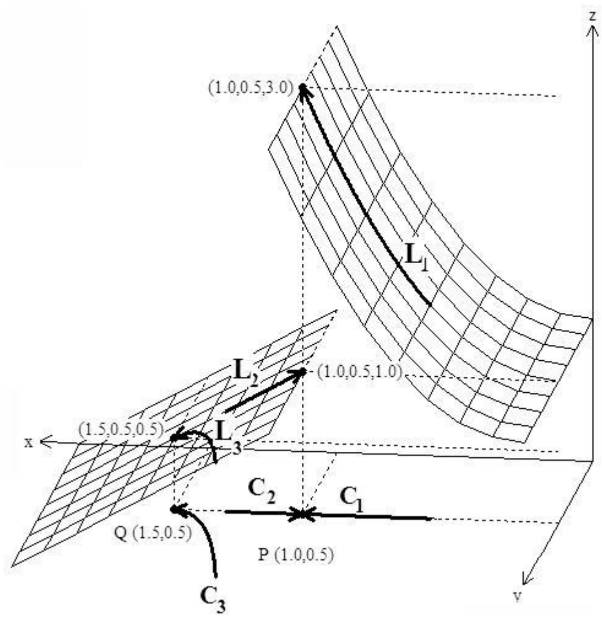
6.25 Irudia: Kanpo-puntua eta muga-puntua

6.9. Ariketa Izan bedi $D \subset \mathbb{R}^2$ eremua. Defini itzazu ondorengo kontzeptuak formalki: D-ren barne-puntua, muga-puntua eta kanpo-puntua. Adibideak eman. Azaldu zeintzuk diren (a, b) puntuak bete behar dituen baldintzak, $z = f(x, y)$-ren limiteak $(x, y) \to (a, b)$ denean existitzeko.

6.4. Adibidea Har dezagun berriro (6.1) funtzioa eta azter dezagun limitearen existentzia $P(1, 0.5)$ eta $Q(1.5, 0.5)$ puntuetan. Ikus 6.26 irudia. Har dezagun $P(1, 0.5)$ puntua: aukitu ditugu P punturantz jotzen duten C1 eta C2 kurbak; dagozkien irudi kurbek, L1 eta L2,

$(1, 0.5, 3)$ eta $(1, 0.5, 1)$ puntuetarantz jotzen dute hurrenez-hurren. Beraz, $z = f(x,y)$-ren limitea $(x,y) \to (1, 0.5)$ denean (x,y) puntuaren ibilbidearen menpe dagoenez, $(1, 0.5)$ puntuan ez dago limiterik.

Izan bedi C3, $Q(1.5, 0.5)$ punturantz jotzen duen hautazko kurba; L3 gainazalan lortzen den irudiaren limitea berbera da beti eta $(1.5, 0.5, 0.5)$ puntuaren berdina da. Beraz, limitea existitzen da eta 0.5 balio du. $f(1.5, 0.5) = 0.5$ denez, funtzioa $Q(1.5, 0.5)$ puntuan jarraia da.



6.26 Irudia: $z = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ funtzioa

6.5. Adibidea Azter dezagun $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$ funtzioaren limitea $(0,0)$ puntuan.

- (x,y) puntua $(0,0)$ punturantz hurbiltzeko ardatz koordenatuekiko paraleloak diren ibilbideak erabiliko ditugu. Hau da:

  Egin dezagun $y = 0$, $x \to 0$, orduan:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

$x = 0$, $y \to 0$, eginez:

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ x = 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

Emaitza honekin ez dugu ezer frogatzen, zergatik?. Bi limite hauei limite iteratuak deritze. Limite hauek desberdinak direnean limiterik ez dagoela frogatzeko, erabil daitezke. Limite iteratuak berdinak badira ez dago ezer zehazterik.

- Demagun (x, y) puntua $(0, 0)$-rantz hurbiltzen dela $y = mx$ kurbak jarraituz, non m hautazko konstante erreala den. Orduan:

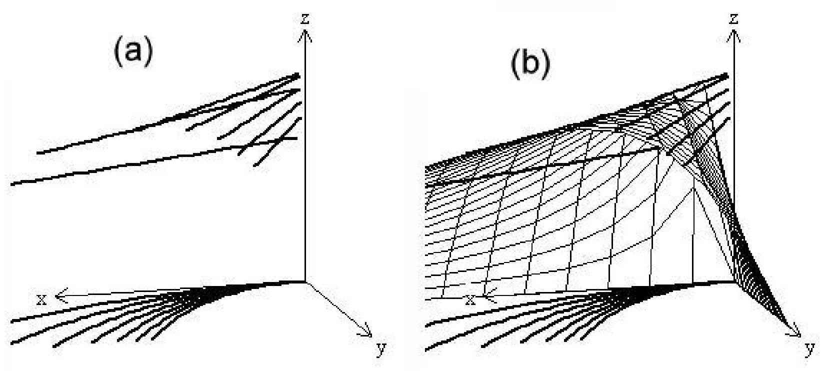
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = mx}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y \to 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

Beraz, $z = f(x, y)$-ren limitea $(x, y) \to (0, 0)$ puntuaren ibilbidearen menpe dago. Beraz, ez dago limiterik $(0, 0)$ puntuan. Emaitza bera lortzen da (x, y) puntua $(0, 0)$ punturantz doanean, $y = mx^2$ parabolak erabitzen baditugu. 6.27(a) irudian famili honetako kurba batzuk eta dagozkien irudu kurbak azaltzen dira. Ohartu zaitez irudi kurben limiteak desberdinak direla, hau da, $z = f(x, y)$-ren limitea, $(x, y) \to (0, 0)$ puntuaren ibilbidearen menpe dago. 6.27(b) irudian $z = f(x, y)$ gainazala agertzen da.

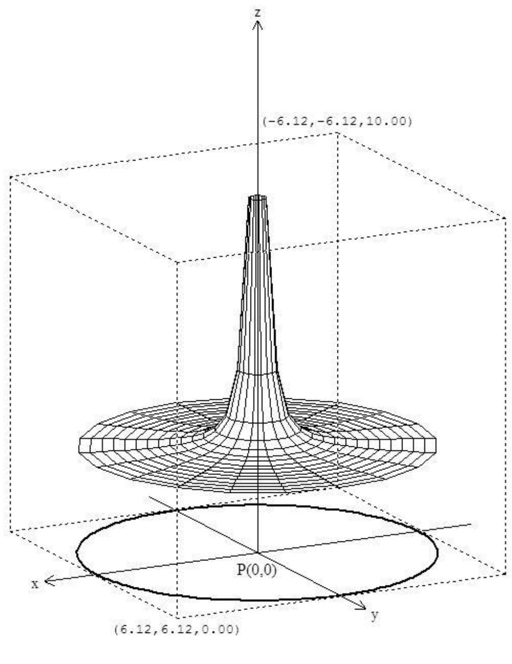
6.10. Ariketa Frogatu $z = \dfrac{xy}{x + y}$ ez duela limiterik onartzen $(0, 0)$ puntuan. LAGUNTZA: limite iteratuak eta $y = x^3 - x$, $y = x^2 - x$ kurbak erabili.

6.11. Ariketa Frogatu $z = \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2}$ funtzioak limitea onatzen duela $(0, 0)$ puntuan. LAGUNTZA: Hasteko frogatu limitea existitzekotan 0 izan behar duela. Ondoren, $y \to 0$ $x \to 0$ betetzen duen hautazko $y(x)$ funtzioa hartu eta aztertu zer ordenarekin izendatzailea eta zenbakitzailearen limitea 0 den.

6.12. Ariketa 6.28 irudian agertzen den $z = 3 + \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ funtzioaren limitea $(0, 0)$ puntuan aztertu. Adibide hau erabiliz, $z = f(x, y)$ funtzioaren limite infinituaren kontzeptua (a, b) puntuan formalki definitu.



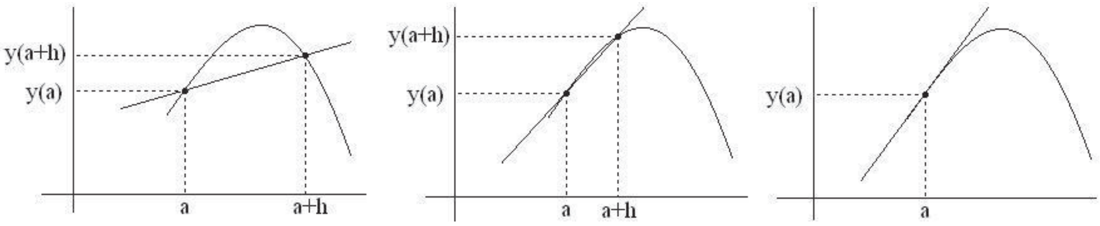
6.27 Irudia: Bideak eta irudiak



6.28 Irudia: $z = 3 + \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ funtzioa

6.9 $z = F(x, y)$ gainazal baten plano ukitzailea: deribatu partzialak

Gogoratu, aldagai erreal bateko $y(x)$ funtzio baten hurbilketa lortzeko, $x = a$ puntuaren ingurune batetan, $x = a$ puntuan zuzen ukitzailearen ekuazioa erabil daitekeela. Zuzen ukitzailea lortzeko prozesua (6.29) irudian azaltzen da.



6.29 Irudia: Zuzen ukitzailearen hurbilketa

Prozesu hori horrelakoa zen:

1. $(a, y(a))$ eta $(a + h, y(a + h))$ puntuetatik pasatzen den zuzen ebakitzailea marraztu. Zuzen honen malda m da:

$$m = \frac{y(a + h) - y(a)}{h}$$

2. $h \to 0$ egiten badugu, zuzen ebakitzaileak zuzen ukitzailerantz jotzen du. Zuzen ukitzailearen malda m, ondorengo limitea izango da, existitzen bada. Limite honi $y(x)$ funtzioaren deribatua $x = a$ puntuan deitzen diogu:

$$y'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{y(a + h) - y(a)}{h}$$

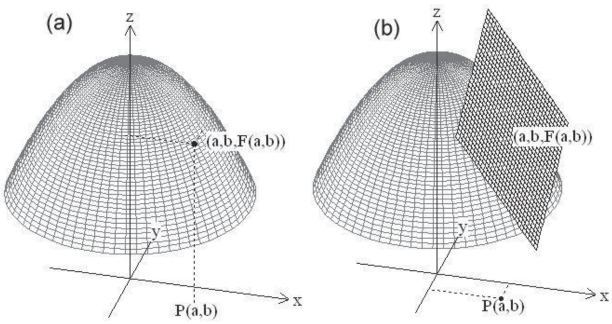
3. $y(x)$ funtzioaren $x = a$ puntuan zuzen ukitzalearen ekuazioa hau izango da:

$$y = y(a) + y'(a)(x - a)$$

4. $y(x)$ funtzioaren diferentziala $x = a$ puntuan $\mathrm{d}y(h) = hy(a)$ adierazpena da. Diferentziala $y(a + h)$-ren balion hurbildua lortzeko erabiltzen da:

$$y(a + h) \simeq y(a) + hy'(a) = y(a) + \mathrm{d}y(h)$$

Orain, ideia berdinak bi aldagaietako funtzioetan aplikatzen saiatuko dugu. Suposa dezagun $z = F(x,y)$ funtzioa $D \subset \mathbb{R}^2$ eremuan definiturik dagoela eta har dezagun (a,b) D-ren puntu bat. Ikusi (6.30) irudia. Kasu $(a,b,F(a,b))$ puntutik pasatzen den zuzen ukitzailea ez da bakarra, infinitu zuzen ukitzaile daude. oraingo asmoa zuzen ukitzaile guztiak dituen plano ukitzailea lortzea da (Ikusi (6.30)(b) irudia).



6.30 Irudia: Plano ukitzailea

Jarraitzen dugun prozesua aldagai bateko funtzioekin erabilitakoa da: gainazalaren zuzen ebakitzailea marrazten dugu eta, ondoren, plano ebakitzaile hori plano ukitzailerantz hurbiltzen dugu. Zehaztasun handiagoarekin:

1. Plano ebakitzailearen ekuazioa lortzeko, $(a,b,F(a,b))$, $(a+h,b,F(a+h,b))$ eta $(a,b+k,F(a,b+k))$ puntuak erabiliko ditugu, non h eta k aldagaien gehikuntza txikiak dira (Ikusi (6.31)(a) irudia).

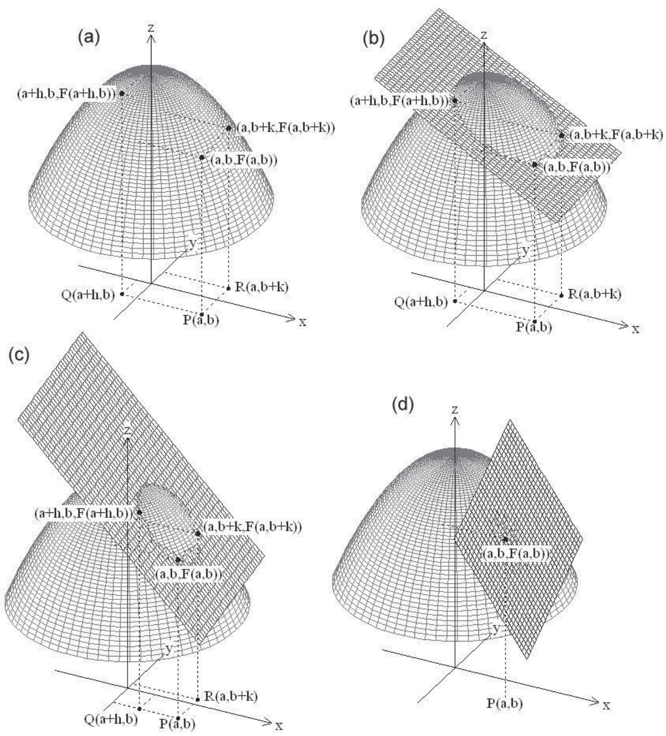
2. Plano ebakitzailea kalkulatzen dugu (Ikusi (6.31)(b) irudia).

3. $(h,k) \to (0,0)$ aldatzen dugu (Ikusi (6.31)(c) irudia).

4. $(a+h,b,F(a+h,b))$ eta $(a,b+k,F(a,b+k))$ puntuak $(a,b,F(a,b))$ puntuarekin nahasten direnean, lortzen den planoa (limitea existitzen bada) gainazalaren plano ukitzailea da (Ikusi 6.31 (d) irudia).

Egingo behar dugunaren esanahia garbi dugu. Has dezagun.
Hiru puntuak:

$$A(a,b,F(a,b)),\ B(a,b+k,F(a,b+k))\,\text{eta}\,C(a+h,b,F(a+h,b))$$



6.31 Irudia: Plano ukitzailearen hurbilketa

Planoaren bektore zuzentzaileak:

$$AB(0, k, F(a, b + k) - F(a, b))$$
$$AC(h, 0, F(a + h, b) - F(a, b))$$

Planoarekiko bektore perpendikularra ($AB \times AC$ biderkaketa bektoriala) hau izango da:

$$AB \times AC = \begin{vmatrix} i & j & w \\ 0 & k & F(a, b + k) - F(a, b) \\ h & 0 & F(a + h, b) - F(a, b) \end{vmatrix} =$$
$$= (k(F(a + h, b) - F(a, b)), h(F(a + k, b) - F(a, b)), -hk)$$

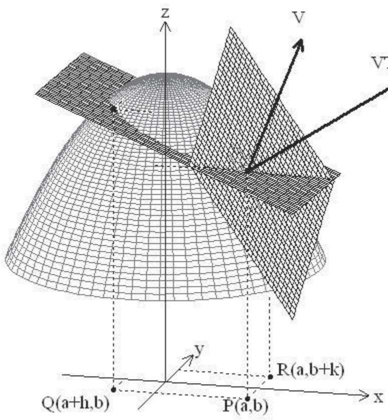
Orain, lortutako bektorea zati hk kalkulatzen, bilatzen genuen V bektorea lortzen da:

$$V\left(\frac{F(a + h, b) - F(a, b)}{h}, \frac{F(a, b + k) - F(a, b)}{k}, -1\right)$$

Orduan, V-ren osagaiak hauek dira:

$$V_x(h) = \frac{F(a+h,b) - F(a,b)}{h}$$
$$V_y(k) = \frac{F(a,b+dk) - F(a,b)}{k}$$
$$V_z = -1$$

Ikus dezakezunez, (a,b) puntu finko bakoitzarentzat, V_x soilik h-ren funtzioa da, V_y k-ren funtzioa eta V_z konstantea da. (6.32) irudian V plano ebakitzailearekiko bektore perpendikularra eta VT plano ukitzailearekiko bektore perpendikularra azaltzen dira. Limitea $(h,k) \to (0,0)$ denean existitzen bada, $V \to VT$ lortzen da.



6.32 Irudia: V bektoreak VT-rantz jotzen du

Izendatzen badugu:

$$VT = (F_x(a,b), F_y(a,b), -1)$$

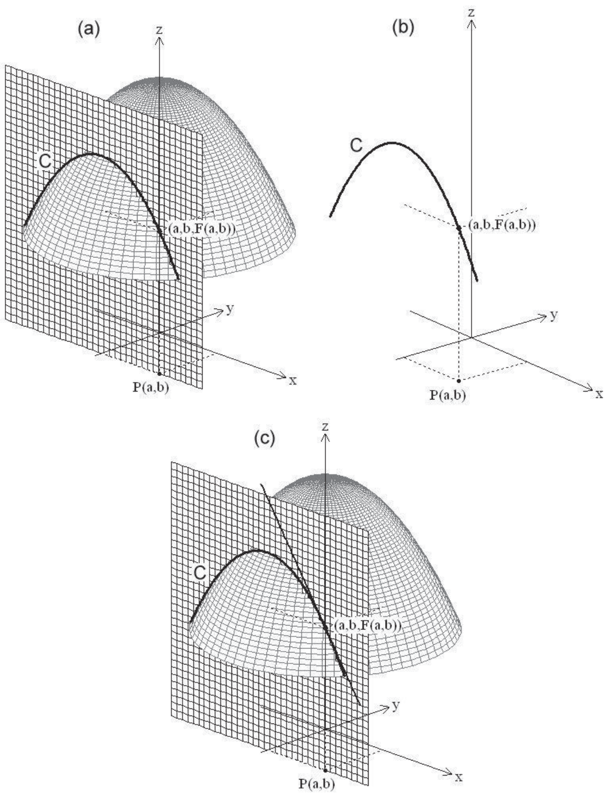
Orduan, limitea kalkulatzen:

$$F_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{F(a+h,b) - F(a,b)}{h} \tag{6.3}$$

$$F_y(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{F(a,b+k) - F(a,b)}{k} \tag{6.4}$$

VT bektore ukitzailea kalkulatzeko erabiltzen ditugun (6.3) eta (6.4) erlazioak eta aldagai bateko funtzio baten deribatuaren definizioa oso antzekoak dira. Ikus dezagun zein den (6.3) erlazioaren esanahia:

1. $F(x, y)$ funtzioan y koordenatua konstantea egiten dugu, $y = b$. Geometrikoki, C kurba, $z = F(x, y)$ eta $y = b$ planoaren arteko ebakigunea lortu dugu (Ikusi (6.33)(a,b) irudiak).



6.33 Irudia: x-rekiko deribatu partziala

2. $F_x(a, b)$ eta $F(x, b)$ funtzioaren x-rekiko deribatua berdinak dira. Geometrikoki, $F_x(a, b)$ C kurbaren $(a, b, F(a, b))$ puntuan zuzen ukitzailearen malda da (Ikusi (6.33 (c) irudia). $(t, b, F(t, b))$ adierazpena C kurbaren parametrizazio bat da eta puntu bakoitzean bektore ukitzailea $(1, 0, F_x(t, b))$ izango da.

3. Gogoratuko duzunez, $y(x)$ funtzio baten deribatua $x = a$ puntuan, puntu horretan y aldagaiaren x-rekiko aldatzeko aldiuneko abiadura bezela interpretatzen da. Era berean, $F_x(a, b)$ deribatuaren esanahia honela interpreta daiteke: $F_x(a, b)$ deribatuaren balioa $z = F(x, y)$ aldagaiaren x-rekiko aldatzeko abiadura da $y = b$ denean. $F_x(a, b)$ kalkulatzeko aldagai bateko funtzioen deribatuak kalkulatzeko ezagutzen ditugun erregelak aplika ditzakegu.

6.13. Ariketa Izan bedi $z = F(x, y) = x^2 + y^2$ funtzioak definituriko gainazala.

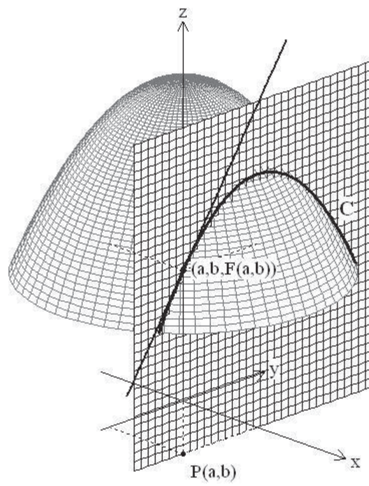
a) Kalkulatu $F_x(a, b)$.

b) Kalkulatu gaianzala eta $y = b$ planoaren arteko ebakigunea.

c) Kalkulatu $y = b$ planoan dagoen gainazalaren zuzen ukitzailea.

d) Aurreko elementu guztiak grafikoki adierazi.

Ikus dezagun orain zein den (6.4) deribatuaren esanahia, (ikusi 6.34 irudia).



6.34 Irudia: y-rekiko deribatu partziala

1. $F(x, y)$ funtzioan x koordenatua konstantea egiten dugu, $x = a$. Geometrikoki, C kurba, $z = F(x, y)$ eta $x = a$ planoaren arteko ebakigunea lortu dugu.

2. $F_y(a,b)$ eta $F(a,y)$ funtzioaren y-rekiko deribatua berdinak dira. Geometrikoki, $F_y(a,b)$ C kurbaren $(a,b,F(a,b))$ puntuan zuzen ukitzailearen malda da. $(a,t,F(a,t))$ adierazpena C kurbaren parametrizazio bat da eta puntu bakoitzean bektore ukitzailea $(0,1,F_y(a,t))$ izango da.

3. Hemen ere, $F_y(a,b)$ deribatuaren esanahia honela interpreta daiteke: $F_y(a,b)$ deribatuaren balioa $z = F(x,y)$ aldagaiaren y-rekiko aldatzeko abiadura da $x = a$ denean. Eta $F_y(a,b)$ kalkulatzeko aldagai bateko funtzioen deribatuak kalkulatzeko erregelak aplika ditzakegu.

6.14. Ariketa Izan bedi $z = F(x,y) = x^2 + y^2$ funtzioak definituriko gainazala.

a) Kalkulatu $F_y(a,b)$.

b) Kalkulatu gaianzala eta $x = a$ planoaren arteko ebakigunea.

c) Kalkulatu $x = a$ planoan dagoen gainazalaren zuzen ukitzailea.

d) Kalkulatu gainazalaren plano ukitzailea (a,b) puntuan.

e) Aurreko elementu guztiak grafikoki adierazi.

Orduan, ikusi dugunez, $z = F(x,y)$ funtzioaren deribatuak x eta y aldagaiekiko oso baliagarriak dira funtzioaren portaera aztertzeko. Orain kontzeptu hori definituko dugu eta izen bat jarriko diogu.

6.6. Definizioa *Ondorengo limiteari, existitzen bada, $z = F(x,y)$ funtzioaren x-rekiko deribatu partziala (a,b) puntuan deitzen diogu:*

$$F_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{F(a+h,b) - F(a,b)}{h}$$

6.7. Definizioa *Ondorengo limiteari, existitzen bada, $z = F(x,y)$ funtzioaren y-rekiko deribatu partziala (a,b) puntuan deitzen diogu:*

$$F_y(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{F(a,b+k) - F(a,b)}{k}$$

Nabaritu $F_x(x,y)$ eta $F_y(x,y)$ funtzio deribatu partzialak defini ditzakegula, eta hauek ere bi aldagaietako funtzioak izango dira. $F_x(x,y)$ kalkulatzeko y konstantea kontsideratuko dugu eta x-rekiko deribatu; $F_y(x,y)$ kalkulatzen da x finkatu ondoren y-rekiko deribatzen. Funtzio deribatu partzialak erabiltzen, kalkula ditzakegu (a,b) puntu bakoitzean deribatu partzialen balioak. Kontzeptu hau eta $y(x)$ aldagai bateko funtzio baten $y'(x)$ funtzio deribatuarena parekoak dira.

6.15. Ariketa Frogatu $F_x(a,b)$ eta $F_y(a,b)$ deribatu partzialen existentziak ez duela inplikatzen $F(x,y)$ funtzioaren jarraitasuna (a,b) puntuan. Frogatu $F(x,y)$ funtzioaren (a,b) puntuan jarraitasunak ez duela inplikatzen $F_x(a,b)$ eta $F_y(a,b)$ deribatu partzialen existentzia.

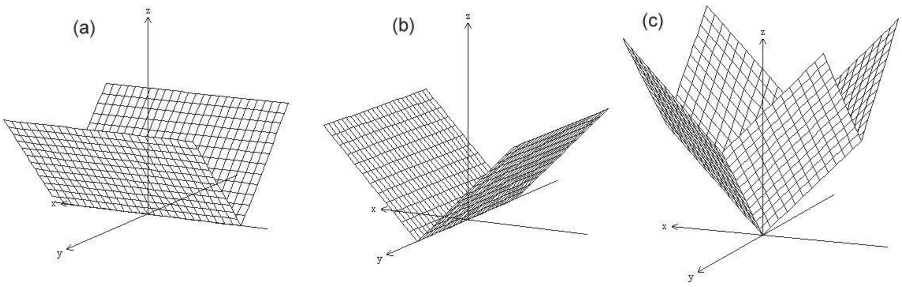
LAGUNTZA: Lehengo zatian ondorengo funtzioa erabili:

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & (x,y) \neq (0,0) \text{ bada} \\ 0 & (x,y) = (0,0) \text{ bada} \end{cases}$$

(6.6) eta (6.7) definizioak aplikatzen, frogatu $F_x(0,0) = F_y(0,0) = 0$ betetzen dela. Baina, ikusi genuenez, $F(x,y)$ funtzioaren limitea (0.0) puntuan ez da existitzen.
Bigarren zatia frogatzeko, erabili ondorengo funtzioak:

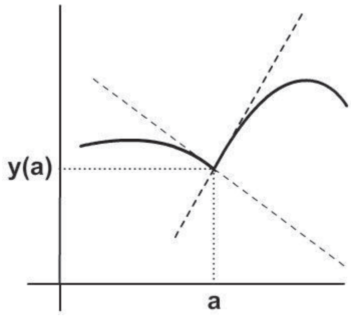
$$G(x,y) = |x|$$
$$H(x,y) = |y|$$
$$P(x,y) = |x| + |y|$$

Frogatu hiru funtzioak jarraituak direla, eta frogatu ere $G_y(0,0)$ existitzen dela, ez dela existitzen $G_x(0,0)$, $H_x(0,0)$ existitzen dela, ez dela existitzen $H_y(0,0)$ eta ez dela existitzen $P_x(0,0)$ ezta $P_y(0,0)$ ere. (6.35) irudian $G(x,y)$, $H(x,y)$ eta $P(x,y)$ funtzioen grafikoak azaltzen dira, esan dezakezu zein den bakoitzarena?



6.35 Irudia: $G(x,y)$, $H(x,y)$ eta $P(x,y)$

Aldagai bateko $y(x)$ funtzio baten grafikoak $x = a$ puntuan “angelu” bat duenean, hau da $x = a$ puntuan eskerretik eta eskuinetik maldaren balioak desberinak direnean, $y(x)$ puntu horretan ez da deribagarria (Ikusi adibide bat (6.36) irudian). Bi aldagaietako funtzioekin antzeko zerbait gertatzen da: bere grafikoetan ere “angelu” bat agertzen da.



6.36 Irudia: Funtzio jarraitua eta ez deribagarria

Ikusi dugunaren arabera, $z = F(x, y)$ gainazal baten plano ukitzailearen ekuazioa honako hau da:

$$z = (x-a)F_x(a,b) + (y-b)F_y(a,b) + F(a,b) \tag{6.5}$$

6.10 $z = F(x, y)$-ren hurbilketa diferentzialaren bidez

$z = F(x, y)$ gainazal baten $(a, b, F(a, b))$ puntuan plano ukitzailearen ekuazioa ikusi ondoren ((6.5) ekuazioa), plano hori erabiliko dugu funtzioaren hurbilketak (a, b) puntuaren ingurune batean kalkulatzeko. (a, b) puntutik, aldagaien desplazamendu txiki bat (h, k) hartzen dugu, $(a + h, b + k)$ pùntua lortzen. $z = F(x, y)$ funtzioaren balio zehatza $(a + h, b + k)$ puntuan $F(a + h, b + k)$ da. (6.5) ekuazioa erabiliz lortzen den $z = F(x, y)$-ren balio hurbildua $z = hFx(a, b) + kF(h, k) + F(a, b)$ izango da. Beraz, $F(a + h, b + k)$-ren balio hurbildua kalkulatzeko erlazioa lortu dugu:

$$F(a+h, b+k) \simeq F(a,b) + hF_x(a,b) + kF_y(a,b) \tag{6.6}$$

(6.9) atalako hasieran gogoratu genuen $y(x)$ aldagai bateko funtzio baten $x = a$ puntuan diferentzialaren adierazpena $\mathrm{d}y(h) = hy'(a)$ zela, eta $y(a + h)$-ren balio hurbildua kalkulatzeko ondorengo adierazpena erabiltzen genuela:

$$y(a+h) \simeq y(a) + hy'(a) = y(a) + \mathrm{d}y(h)$$

Gauza bera gertatzen da bi aldagaietako funtzioekin. Kasu honetan diferentziala $\mathrm{d}F(h, k) = hFx(a, b) + kFy(a, b)$ izango da eta, beraz, (6.6) honela transformatzen da:

$$F(a+h, b+k) \simeq F(a,b) + \mathrm{d}F(h,k) \tag{6.7}$$

6.16. Ariketa Kontsidera dezagun $z = F(x, y) = x^2 + y^2$ adierazpenaz definituriko gainazala eta $(1, 2)$ puntua. () diferentziala erabiliz, $F(1+h, 2+k)$-ren balio hurbildua kalkulatu $(h, k) = (0.5, 0.6)$ eta $(h, k) = (0.01, 0.005)$ deneko kasuetan. Bi kasuetan kalkulatu ere funtzioaren balio zehatza, lortutako zehaztasuna konparatu eta interpretatu emaitzak.

6.11 Funtzio konposatuaren deribatua: katearen erregela

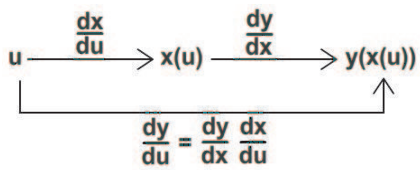
Suposa dezagun interesatzen zaigun magnitude fisiko bat $z = F(x, y)$ funtzioaren bidez adierazten dela. Adibidez, z izan daiteke:

- Xafla metaliko baten tenperatura (x, y) puntu bakoitzean.
- Zirkuitu batetik zirkulatzen den korronteko intentsitatea, non x eta y zirkuituaren parametroak diren (tentsioa, erresistentzia, induktantzia, kapazitatea, e.a.).

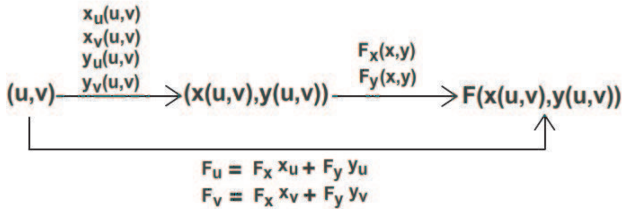
Ikusi dugunez, puntu bakoitzean $F_x(a, b)$ eta $F_y(a, b)$ deribatu partzialek z-ren adatz koordenatuen norabideekiko aldaketa-abiadura azaltzen dute. Batzuetan, x eta y aldagaiak beste aldagaiekiko dependenteak izan daitezke. Adibidez:

- $z = F(x, y)$ xafla metaliko baten tenperatura (a, b) puntuan bada eta aztertu nahi badugu nola aldatzen den tenperatura denborarekiko $(x(t), y(t))$ ibilbidea jarraituz mugitzen garenean. Kasu honetan, lortzen den funtzio konposatua $z(t) = F(x(t), y(t))$ da, eta z-ren aldaketa-abiadura denborarekiko ezagutu nahi dugu, hau da, $z'(t)$.
- $z = F(x, y)$ zirkuitu batetik zirkulatzen den korronteko intentsitatea bada, non x eta y zirkuituaren parametroak diren (tentsioa, erresistentzia, induktantzia, kapazitatea, e.a.). Parametroak beste parametroekiko dependenteak izan daitezke, zirkuituan konektaturiko karga (c), temperatura (s), e.a. Orduan, agian lortzen den funtzio konposatua horrelakoa da $z(c, s) = F(x(c, s), y(c, s))$. Kasu honetan, interesatzen zaizkigun z-ren aldaketa-abiadurak c eta s-rekikoak dira, hau da, F_c et F_s.

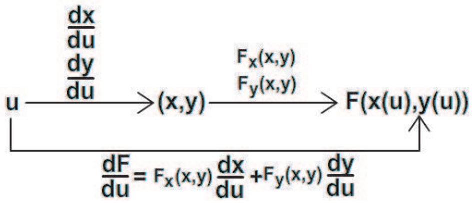
Gogoratu nola kalkulatzen genuen aldagai bateko funtzioen konposaketaren deribatua. y aldagai x-rekiko dependentea bada ($y = y(x)$), eta x u-rekiko dependentea ($x = x(u)$), funtzio konposatuak $y = y(x(u))$ itxura du eta $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$ beharko dugu. Orduan, y-ren u-rekiko aldaketa-abiadura konposaketako bi etapeko aldaketa-abiaduren biderkadura izango da:



Ba, horrelako zerbait gertatzen da bi aldagaietako $z = F(x, y)$ funtzioekin. x eta y aldagaiak beste u eta v bi aldagaiekiko dependenteak badira, Fu eta Fv deribatu partzialak horrela kalkulatzen dira:



x eta y aldagaiak u aldagaiarekiko dependenteak badira, lortutako funtzioa $z(u) = F(x(u), y(u))$ horrela deribatzen da u-rekiko:



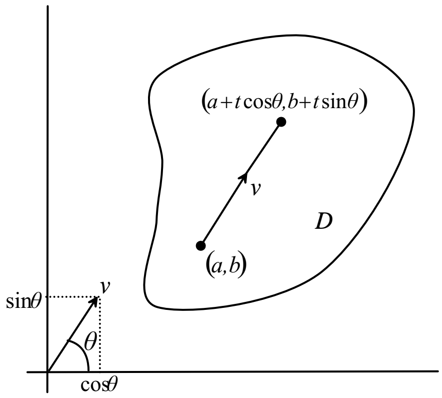
6.12 Norabide deribatua

Ikusi dugunez, $z = F(x, y)$ funtzio baten deribatu partzialek abiadura adierazten dute. $F_x(a, b)$ $z = F(x, y)$ aldagaiaren aldaketa-abiadura da (x, y) puntua (a, b) puntutik mugitzen denean OX ardatzaren norabidea jarraituz (norantza gorakorran). Era berean, $F_y(a, b)$ $z = F(x, y)$ aldagaiaren aldaketa-abiadura da (x, y) puntua (a, b) puntutik mugitzen denean Oy ardatzaren norabidea jarraituz (norantza gorakorran).

Orain, jakin nahi dugu zein izango den $z = F(x, y)$ aldagaiaren aldaketa-abiadura (x, y) puntua (a, b) puntutik V edozein norabide jarraituz mugitzen denean . Adibidez, $F(x, y)$ funtzioak xafla metaliko baten tenperatura (x, y) puntuan adierazten badu, jakin nahi dugu zein abiadurarekin aldatzen den tenperatura hori hartzen dugun V norabidearen arabera.

Ikusi (6.37) irudia. Norabide bat $v(\cos\theta, \sin\theta)$ bektore unitario batek finkatuta dago. Orain, norabide hori jarraituz, (a, b) puntutik $(a, b) + t(\cos\theta, \sin\theta) = (a + t\cos\theta, b + t\sin\theta)$ puntura mugitzen gara.

$z = F(x, y)$ funtzioaren gehikuntza, (a, b) puntutik $(a + t\cos\theta, b + t\sin\theta)$ puntura pasatzerakoan, $F(a + t\cos\theta, b + t\sin\theta) - F(a, b)$ izango da. Ondorioz, $z = F(x, y)$-ren abiadura



6.37 Irudia: Norabide batekiko desplazamendua

(a, b) puntuan eta $v(\cos\theta, \sin\theta)$ norabidean hau izango da:

$$F_v(a, b) = \lim_{t\to 0} \frac{F(a + t\cos\theta, b + t\sin\theta) - F(a, b)}{t} \tag{6.8}$$

Lortu dugun kontzeptu berria definituko dugu.

6.8. Definizioa *(6.8) adierazpenan agertzen den limitea, existitzen bada, $z = F(x, y)$ funtzioaren norabide deribatua (a, b) puntuan, $v(\cos\theta, \sin\theta)$ norabidea jarraituz, deitzen da.*

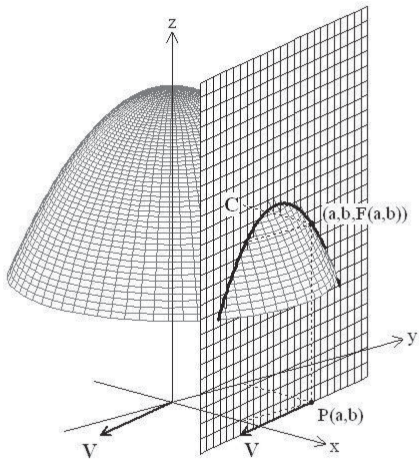
Ikus dezagun nola kalkulatzen den norabide deribatua. Begiratu (6.38) irudia.

1. $z = F(x, y)$ gainazala eta $(x - a)\sin\theta = (y - b)\cos\theta$ planoaren arteko ebakigunea, C kurba, lortzen dugu.

2. $F_V(a, b)$ norabide deribatua C kurbaren $(a, b, F(a, b))$ puntuan zuzen ukitzailearen malda da

Baina (6.9) adierazpenaren erabilpena $F_V(a, b)$ norabide deribatua kalkulatzeko zaila da. Saiatuko dugu errezagoa den beste adierazpen bat lortzen. Horretarako, (6.16) diferentzialaren bidezko hurbilketa erabiliko dugu (6.9) erlazioaren zenbakitzailearen kalkulua errezagoa egiteko. (6.16) adierazpena (h, k) edozein gehikuntzekin betetzen denez, guk erbiliko duguna $h = t\cos\theta$ eta $k = t\sin\theta$ izango da. (6.16) adierazpenan ordezkatuz honako hau lortzen da:

$$F(a + t\cos\theta, b + t\sin\theta) - F(a, b) \simeq t\cos\theta F_x(a, b) + t\sin\theta F_y(a, b) \tag{6.9}$$



6.38 Irudia: Norabide batekiko deribatua kurbaren malda da

Orain (6.8) erlazioaren zenbakitzailea (6.9) adierazpenaz ordezkatzen:

$$F_V(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cos\theta F_x(a,b) + t\sin\theta F_y(a,b)}{t} = \cos\theta F_x(a,b) + \sin\theta F_y(a,b) \tag{6.10}$$

Orduan, aplikatzeko errezagoa den norabide deribatua kalkulatzeko beste adierazpen bat lortu dugu.

6.17. Ariketa (6.10) erlazioan, kontsideratu $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$ eta $\theta = 3\pi/2$. Zer emaitzak lortzen dira? Nola interpreta ditzakezu?

OHARRA. Norabide deribatuaren (6.10) adierazpena lortzeko, suposatu dugu (6.8) limitea ez dela aldatzen zenbakitzailean (6.9) erlazioa ordezkatzen badugu. Baina, orokorrean, limite batetan horrelako ordezkapenak egiten baditugu, limitea aldatu egingo da. Adibidez, $h(t) = t^2/t$ funtzioaren limitea $t \to 0$ doanean 0 da. Baina t^2 gaia t adierazpenaz ordezkatuz, lortuko den $g(t) = t/t$ funtzioaren limitea $t \to 0$ doanean 1 izango da. Limitearen balioa aldatu egin da. Orduan, zergatik suposa dezakegu ondorengo limiteak berdinak izango direla?

$$\lim_{t\to 0} \frac{t\cos\theta F_x(a,b) + t\sin\theta F_y(a,b)}{t} \overset{?}{=} \lim_{t\to 0} \frac{F(a+t\cos\theta, b+t\sin\theta) - F(a,b)}{t}$$

Berdinketa ez da kasu guztietan betetzen, beraz $z = F(x, y)$ funtzio baten (a, b) puntuan norabide deribatua kalkulatzeko ezin da beti aplikatu (6.10) adierazpena. Berri ona da bai aplika daitekeela praktikan agertzen diren $z = F(x, y)$ funtzio askorekin. Egin daiteke $z = F(x, y)$ funtzioa (a, b) puntuan jarraitua eta deribagarria denean eta bere deribatu partzialak, $F_x(x, y)$ eta $F_y(x, y)$ ere (a, b) puntuan jarraituak direnean.

6.18. Ariketa $z = x^2y$ funtzioaren norabide deribatua kalkulatu $P(1.2, 2.4)$ puntuan eta $v(-1.4, 3.6)$ norabidea jarraituz.

LAGUNTZA: $(\cos\theta, \sin\theta)$ norabidearekiko F funtzioaren deribatua

$$F_v(a, b) = \cos\theta F_x(a, b) + \sin\theta F_y(a, b)$$

kalkula daiteke angelua lortu gabe. Hasteko v bektorea normalizatu egiten dugu (hau da, bere osagaiak moduluaz zatitzen ditugu), eta $u = (U_x, U_y)$ bektore unitario bat lortzen da. Orduan, $\cos\theta = U_x$, $\sin\theta = U_y$, eta beraz

$$F_v(a, b) = U_xF_x(a, b) + U_yF_y(a, b)$$

6.13 Gradiente bektorea

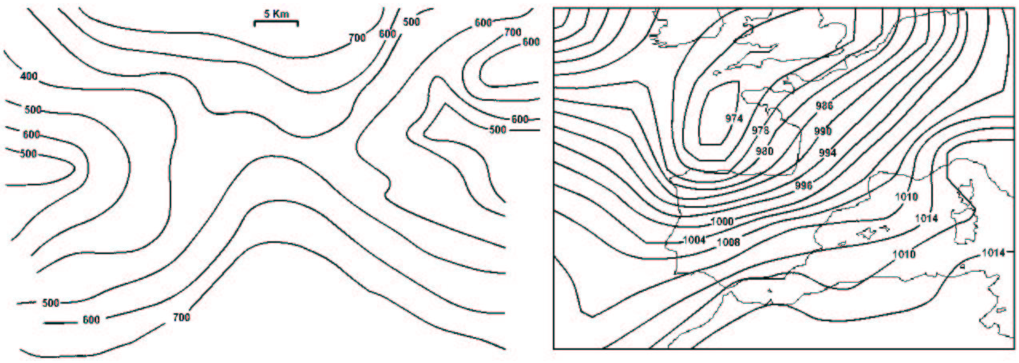
Ikusi dugunez, $z = F(x, y)$ funtzioaren norabide-deribatua, $F_v(a, b)$, (a, b) puntuan, $V(\cos(\theta), \sin(\theta))$ norabideari jarraituz, z aldagaiaren aldaketaren abiadura neurtzeko bide bat da, (x, y) puntua (a, b) puntutik abiatuz eta V norabidean mugitzen denean. Gainera, $z = F(x, y)$ funtzioa (a, b)-n jarraitua, diferentziagarria eta deribatu partzialak, $F_x(x, y)$, $F_y(x, y)$, (a, b)-n jarraituak badira, $F_v(a, b)$ balioa erraz lor dezakegu honen bidez:

$$F_v(a, b) = \cos\theta F_x(a, b) + \sin\theta F_y(a, b)$$

Batzutan, (a, b) puntutik abiatuz gehikuntza hori maximoa edo minimoa zer nolako norabide, $v(\cos\theta, \sin\theta)$, hartuz lortzen dugun jakitea interesatzen zaigu.

(6.3) atalean, $z = F(x, y)$ funtzioaren maila-lerroak aipatu genituenean, aztertu genuen bi adibide gogoratuko ditugu. (ikus (6.39 irudia) (a, b) puntua, maparen maila-lerroak oso gertu dauden ingurune baten kokatuta baldin badago puntu horretatik gutxi mugituz, z-n aldaketa handiak lor daitezke. Mapa topografikoak direnean altitude aldaketa handiak edo isobara mapak direnean presio aldaketa handiak (haize bolada handiak sortzen dira) ditugu gertu dauden bi punturen artean.

Maila-lerroak aztertuz lor dezakegun informazioaren aplikazioak hauek izan daitezke. Mapa kartografiakoak aztertuz mendizale batek



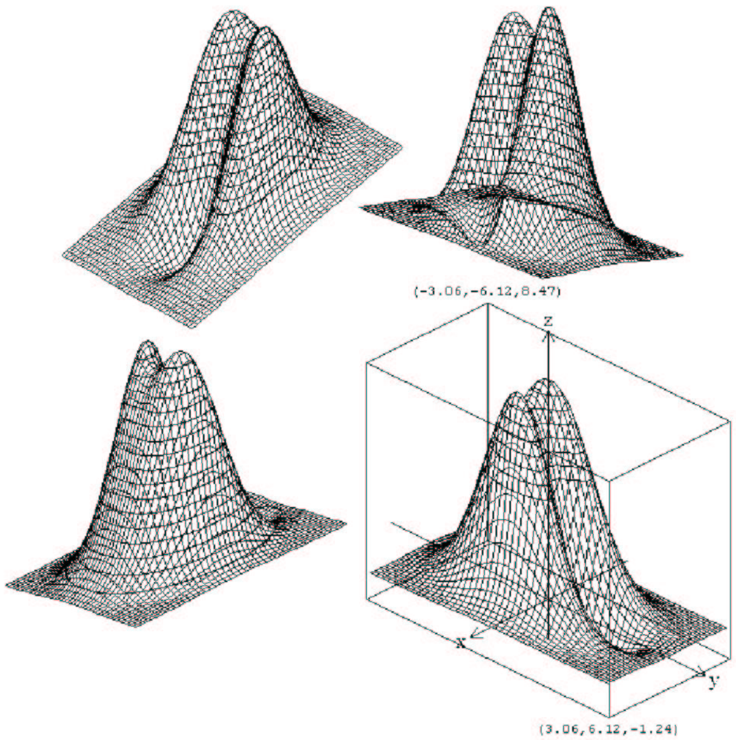
6.39 Irudia: Mapa topografikoa eta isobara-mapa

Maila-lerroak aztertuz lortzen dugun informazioa oso erabilgarria da. Adibidez, mapa topografikoa aztertuz bide baten maldak aukera ditzakegu, handienak edo txikienak aukeratuz. Isobara mapa aztertuz hegazkin baten pilotuak haize bolada handiak saihestu ditzake. Orokorrean, $z = F(x, y)$ funtzioa eta (a, b) puntua harturik, zein v norabideekin lortzen dugu (a, b)-tik abiatuz z-ren gehikuntza handiena edo txikiena?

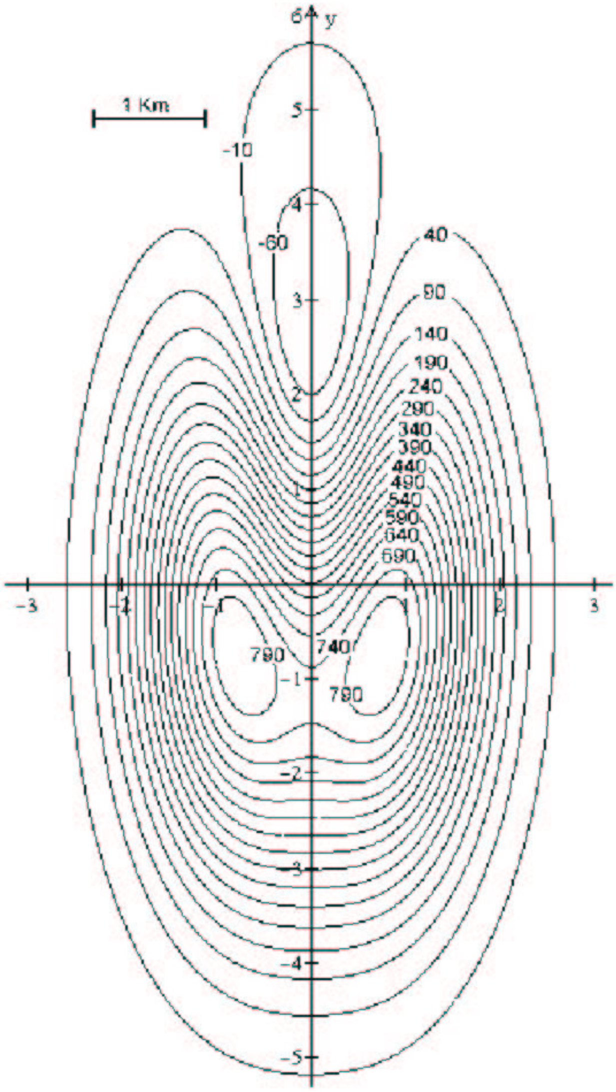
Azter dezagun beste adibide bat. Mendi baten 3 dimentsiotako mapa dugu eta (6.40) irudian ikuspuntu ezberdinetik adierazita dugu. Aztertu azkenengoan ditugun dimentsioak eta ardatzen kokapena.

(6.41) irudian, 2 dimentsiotako mapa topografiko arrunta dugu, maila kurbak adierazita ditugu eta lur-kota eta ardatz koordenatuak gehitu ditugu. Maila-lerroak altueran 50-naka aldatzen doaz $z = -60$.an hasita eta $z = 790$-raino helduz. (3 dimentsiotako adierazpenean $z = -6$-tik $z = 7.9$-raino)

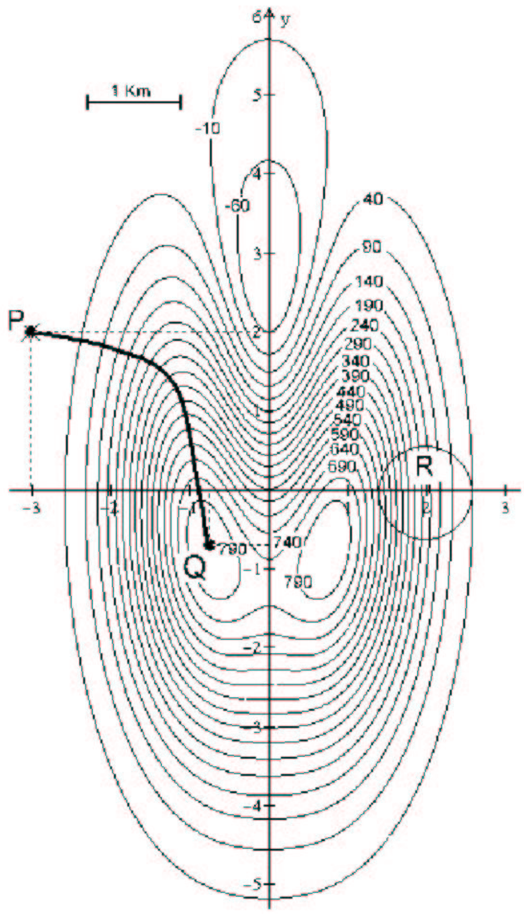
Azter dezagun (6.41) irudia, $R(2, 0)$ puntua 190 unitateko altitudean dagoena finkatzen dugu. OX ardatzean eskumarantz mugitzen garenean maila kurbak elkar bananduak daude baina ezkerrerantz mugitzen bagara maila-lerroak bata bestearekiko hurbil daude. Horrek zera adierazten dugu ezkerrerantz mugitzen garenean eskumarantz joaten garenean baino maldak handiagoak direla. Hori 3 dimentsiotako irudian ere ikus dezakegu, mendian gorantz goazenean malda oinean baino handiagoak dira. Adibidez x aldagaia handizen den norantzean Km bat mugitzen garenean mendi-kota 190-tik 40-ra pasatzen da, hau da -150ko gehikuntza dugu. Bestalde, Q puntutik x txikiagotzen den norantzean mugitzen garenean mendiaren kota 190-tik 590-ren pasatzen da, hau da, 400-ko gehikuntza. $R(2, 0)$ puntutik OY ardatzaren paraleloa den norabidea hartzen badugu mendi-kota oso gutxi aldatzen da maila-lerro berdinean gaudelako.



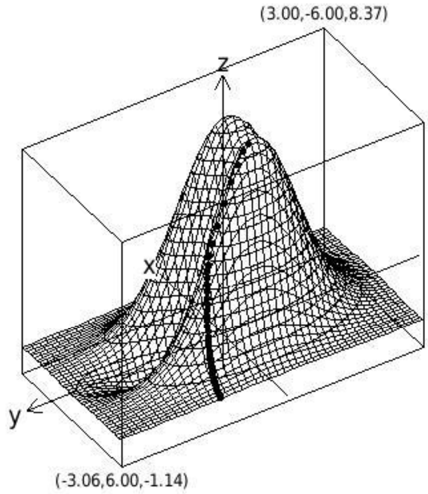
6.40 Irudia: Mendiaren adierazpenak



6.41 Irudia: Mendiaren mapa topografikoa



6.42 Irudia: Mendiaren maila-lerroak eta malda handieneko bidea



6.43 Irudia: Mendiaren adierazpena: maila handiko ibilbidea

(6.42) irudian mendiaren oinean dagoen P puntutik mendi tontorrean dagoen Q puntura doan malda handieneko ibilbidea adierazita dugu. Maila-lerroak elkar gertuen daudenak aukeratuz mugitzen gara, hau da, malda handienena bilatuz. Dirudienez, maila-kurbekin elkarzut dagoen norabidea aukeratu behar dugu norabide-deribatu maximoa lortzeko. (6.43) irudian bide hori adierazita dugu mendiaren adierazpenean. Eski-pista batentzat bide egokia da malda handiena duelako.

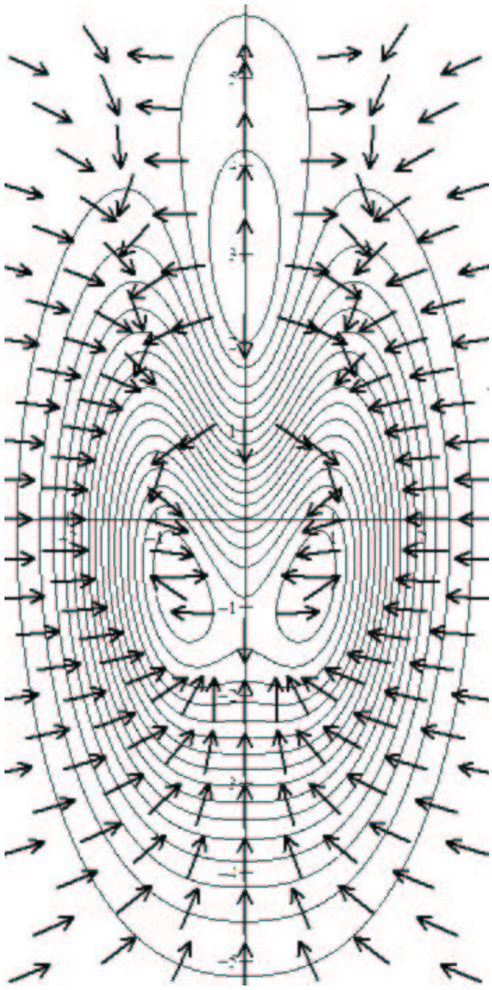
Beraz, badirudi gehikuntza maximoa (norabide deribatu maximoa) lortzeko jarraitu behar den ibilbidea maila-kubekin elkarzut dagoela. Ideia horri jarraituz (6.44) irudian (a, b) puntu bakoitzetik abiatuz norabide.deribatu maximoa lortzeko hartu behar den norabide eya norantzak adierazi ditugu. Bektoreen norantzen zergatia uler al dezakezu?

Eragiketak egiteko $z = F(x, y)$ funtzio erraz batez egiaztatuko dugu.

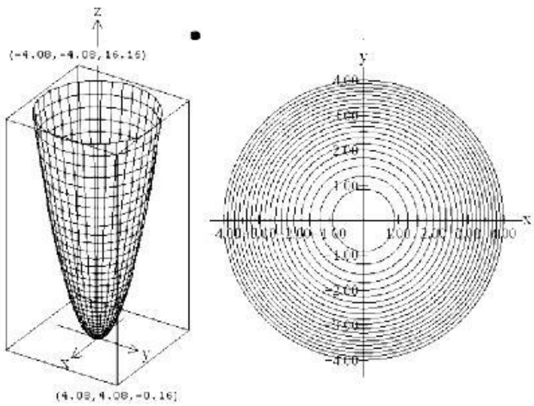
Har dezagun $z = x^2 + y^2$ funtzioa. (6.45) irudian funtzioa eta maila-lerrok adierazita ditugu. Maila-lerroak $x^2 + y^2 = k$ erakoak dira. $P(a, b)$ puntutik abiatuz, nabaria da z handitzen dela koordenatu jatorritik urruntzen garenean Maila-lerroaren malda lortzeko deribatua lortzen dugu,

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -x/y \tag{6.11}$$

(6.11) ekuazioa maila-lerroen ekuazio diferentziala da. Maila-lerroekin elkarzut dauden



6.44 Irudia: Maila-lerroak eta norabide-deribatuen maximoen norabideak



6.45 Irudia: Paraboloidea eta maila kurbak

kurben malda hau izango da:

$$y'(x) = y/x \tag{6.12}$$

$y(x)$ lortzeko (6.12) ebazten dugu:

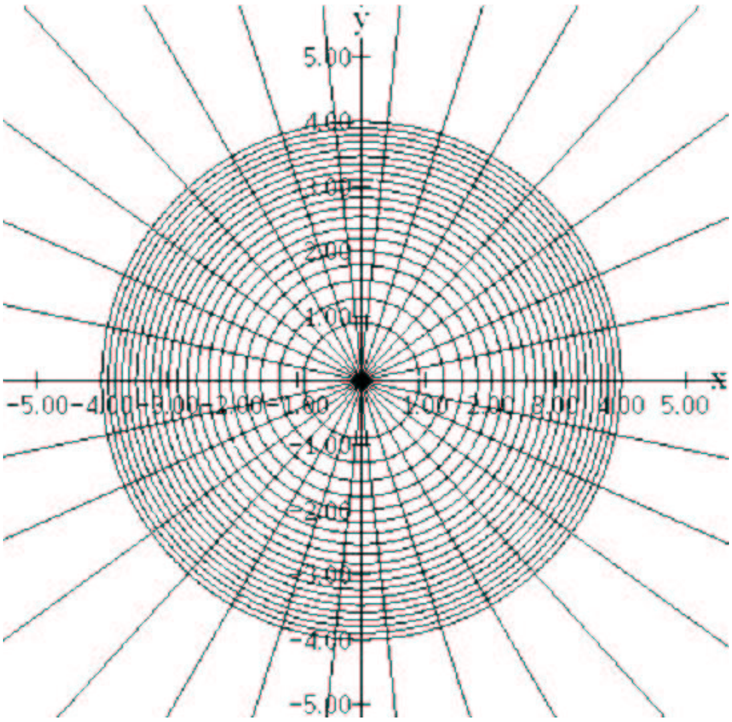
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x} \Rightarrow$$
$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(\ln x) \Rightarrow \ln y = \ln x + k$$
$$\Rightarrow y = x\mathrm{e}^k$$

k finkatu gabeko konstantea denez, $e^k = K$ egiten dugu, eta (6.12) ekuazioaren soluzioa honako hau izango da:

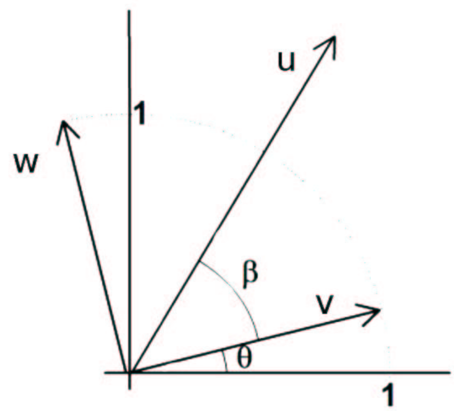
$$y = Kx \tag{6.13}$$

Lehen aurkitutako emaitza egiaztatu dugu. $z = x^2 + y^2$ aldagaiaren gehikuntza maximoa lortzeko ibilbidea, (a, b) puntutik eta koordenatu jatorritik pasatzen den (6.13) zuzena da. (6.46) irudian maila-lerroak eta lerro horiek adierazita ditugu.

Emaitza hori edozein funtzioentzak egiaztatuko dugu. Horretarako $F_v(\theta)$ norabide- deribatuaren maximoa aurkituko dugu eta $z = F(x, y)$-ren gehikuntza maximoa maila-lerrorekin elkarzut dagoen norabidean lortzen dugula egiaztatuko dugu.



6.46 Irudia: Maila-lerrok eta ibilbideak



6.47 Irudia: Norabide-deribatua: biderketa-eskalarra

$$F_v(\theta) = \cos\theta F_x(a,b) + \sin\theta F_y(a,b) \tag{6.14}$$

Lehendabizi, (6.14) ekuazioa planoko bi bektoreen biderketa eskalar bezala adierazten dugu:

$$F_v(\theta) = (F_x(a,b), F_y(a,b))(\cos\theta, \sin\theta) \tag{6.15}$$

$F_v(\theta)$ $u = (F_x(a,b), F_y(a,b))$ eta $v = (cos\theta, \sin\theta)$. bektoreen biderkaketa eskalarra da. u bektoreen koordenatuak funtzioaren (a,b) puntuan deribatu partzialen balioak dira. (Ikus (6.47) irudia) v-ren moludula 1 da, $u \cdot v$ biderketa eskalarra era honetan adieraz dezakegu

$$F_v(\theta) = u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\beta = \|(F_x(a,b), F_y(a,b))\| \cos\beta \tag{6.16}$$

β, u eta v-k eratzen duten angelua da.

$F_v(\theta)$-ren maximoa lortzeko, (6.14) ekuazioa deribatzen dugu θ-rekiko,

$$\begin{aligned}\frac{dF_v}{d\theta} &= -\sin\theta F_x(a,b) + \cos\theta F_y(a,b)\\ &= (F_x(a,b), F_y(a,b)) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) =\\ &= (F_x(a,b), F_y(a,b)) \cdot w\end{aligned}$$

$w = (-\sin\theta, \cos\theta)$ bektorea v-rekin elkarzut dagoen bektora da. (Ikus (6.47) irudia) Deribatua zero izango da u eta w elkarzut daudenean. (biderketa eskalarra 0):

$$\frac{dF_v}{d\theta} = 0 \Rightarrow (F_x(a,b), F_y(a,b)) \perp w$$

hau bete dadin $\beta = 0$ edo i $\beta = \pi$ izan behar da. Bigarren deribatua lortuko dugu maximoa ala minimoa den jakiteko.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2F_v}{d\theta^2} &= -\cos\theta F_x(a,b) - \sin\theta F_y(a,b) \\
&= -(F_x(a,b), F_y(a,b)) \cdot (-\cos\theta, \sin\theta) = \\
&= -\|(F_x(a,b), F_y(a,b))\| \cos\beta
\end{aligned}$$

$$\beta = 0 \Rightarrow \frac{d^2F_v}{d\theta^2} = -\|(F_x(a,b), F_y(a,b))\| < 0$$

$$\beta = \pi \Rightarrow \frac{d^2F_v}{d\theta^2} = \|(F_x(a,b), F_y(a,b))\| > 0$$

Beraz, jarraitu behar den v norabidea, (a,b) puntutik abiatuz, $F_v(\theta)$ maximoa lortzeko, osagaiak $F(x,y)$-ren deribatu partzialen balioak (a,b) puntuan dituen bektorea da. $v = (F_x(a,b), F_y(a,b))$, norantzan (a,b)-n norabide-deribatu handiena lortzen dugu $-v = (-F_x(a,b), -F_y(a,b))$ norantzan txikiena.

Lor ditzagun $F_v(\theta)$-ren balio maximo eta minimo horiek. (6.16) adierazpena hartzen dugu:

$$\beta = 0 \Rightarrow u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\beta = \|(F_x(a,b), F_y(a,b))\|$$

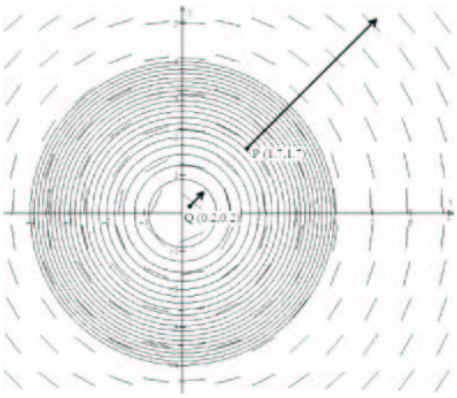
$$\beta = \pi \Rightarrow u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\beta = -\|(F_x(a,b), F_y(a,b))\|$$

Hau da, norabide-deribatuaren balio maximoa $(F_x(a,b), F_y(a,b))$ bektorearen modulua da, eta balio minimoa horren aurkakoa.

Beraz, $v = (F_x(a,b), F_y(a,b))$ bektoreak $z = F(x,y)$ funtzioaren gehikuntza aztertzeko garrantzi handiko norabidea adierazten du.

6.9. Definizioa *$z = F(x,y)$ funtzioak (a,b) puntuan deribatu partzialak onartzen baditu, $F(x,y)$-ren gradiente-bektorea (a,b) puntuan honako bektore hau da*

$$\operatorname{grad} F(a,b) = (F_x(a,b), F_y(a,b))$$



6.48 Irudia: Paraboliodearen maila-lerroak eta gradienteak

6.1. Teorema *$z = F(x, y)$ funtzioa jarraitua (a, b) puntuan baldin bada eta $F_x(x, y)$, $F_y(x, y)$ deribatu partzialak jarraituak baldin badira (a, b) puntuan, orduan*

1. *$F_v(\theta)$ norabide deribaruaten balio maximoa (a, b) puntuan,* $\operatorname{grad} F(a, b)$ *bektorearen norabidean eta norantzan lortzen da eta balio hori gradientearen modulua da.*

$$\|\operatorname{grad} F(a, b)\| = \sqrt{F_x(a, b)^2 + F_y(a, b)^2}$$

2. *$F_v(\theta)$ norabide deribaruaten balio maximoa (a, b) puntuan,* $\operatorname{grad} F(a, b)$ *bektorearen norabidean eta aurkako norantzan lortzen da eta balio hori gradientearen moduluaren aurkakoa da.*

$$-\|\operatorname{grad} F(a, b)\| = -\sqrt{F_x(a, b)^2 + F_y(a, b)^2}$$

(6.48) irudian $z = x^2 + y^2$ paraboloidearen maila-lerrok adierazita daude. Maila-lerro horiei zuzenki ukitzaile batzuk eta $P(1.7, 1.7)$ eta $Q(0.2, 0.2)$ puntuei dagozkien gradiente bektoreak. Gradiente bektoreak eta maila- kurbak elkarzut daudela ikudi daiteke. P puntuaren ingurunean maila-lerrok Q puntuaren ingurunean baino gertuago daude, horregatik $\operatorname{grad} F(P)$ bektorearen modulua $\operatorname{grad} F(Q)$-rena baino handiagoa da. Lortu modulu horien balioak ariketa bezala.

Ikus dezagun (a, b) puntuaren gradiente-bektorea $y = y(x)$ puntua barne duen maila-lerroarekin elkarzut dagoela

Demagun (a, b) puntua $F(x, y(x)) = k.$ maila-lerroan dagoela. Puntu horretan gradiente-bektorea grad $F(a, b) = (F_x(a, b), F_y(a, b))$ denez, norabidearen malda $m = F_y(a, b)/F_x(a, b))$ izango da. elkarzut dagoen norabidearen malda era honetan lortzen dugu,

$$1/m = -Fx(a, b)/Fy(a, b))$$

Beraz (6.17) betetzen dela ikusi behar dugu.

$$y'(a) = -\frac{F_x(a, b)}{F_y(a, b)} \tag{6.17}$$

$F(x, y(x)) = k$ x-rekiko deribatuz, dy/dx lortuko dugu.(6.11) atalean ikusitako katearen erregela aplikatuz,

$$\frac{dF}{dx} = F_x \frac{dx}{dx} + F_y \frac{dy}{dx} = F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0$$

dy/dx bakanduz eta $x = a$, $y = b$, ordezkatuz (6.17) lortzen dugu.

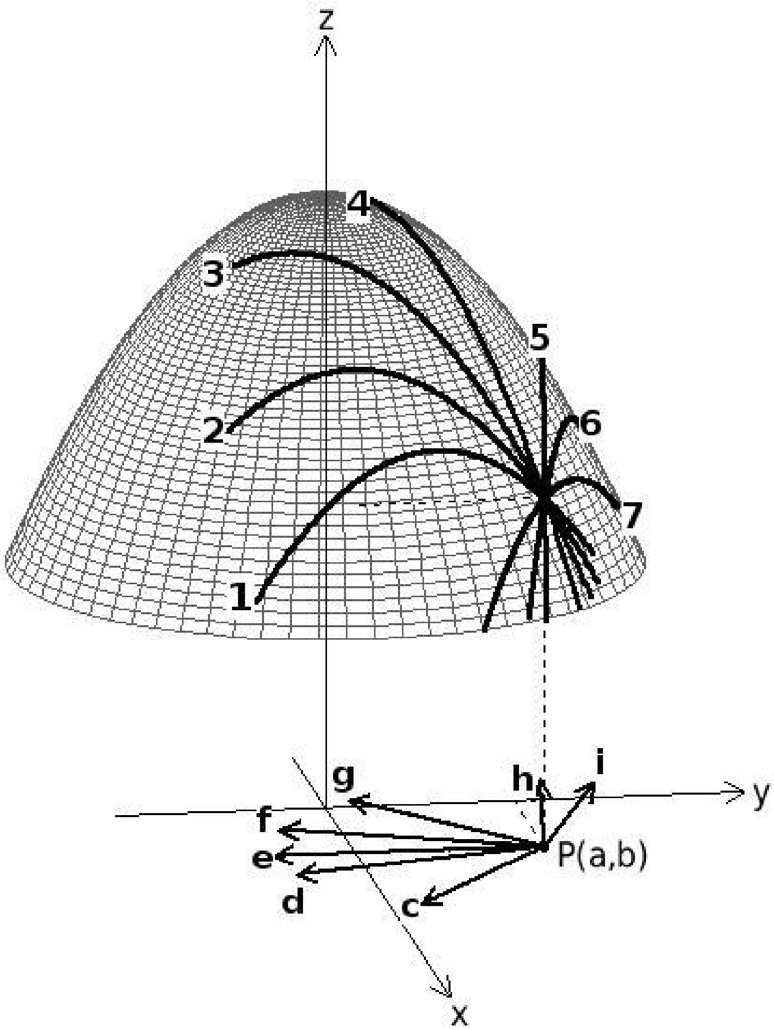
6.19. Ariketa (6.49) irudia aztertu. $P(a, b)$ puntuan (c-i) norabideak adierazita daude, eta dagozkien (1-7) $z = F(x, y)$ gainazaleko kurbak.Adierazitako bektore horietatik bat grad $F(a, b)$ da. Zein? Zergatik?

6.14 Ordena handiagoko deribatu partzialak. Schwartz-en teorema

Aldagai erreal bakarreko funtzioak aztertzeraskoan bigarren, hirugarren, ... ordenako deribatuak definitu genituen eta haien erabilpenak. Adibidez, funtzioen muturrak, ahurtasun tarteak bilatzeko, polinomioen bidez hurbiltzeko eta abar, erabili genituen. Bi aldagai errealeko $z = F(x, y)$ funtzioentzak ere ordena handiagoko deribatu partzialak definituko dugu. $z = F(x, y)$ funtzioa baldin baditu funtzio horiek $F_{xx}(x, y), F_{yx}(x, y), F_{xyx}(x, y), \ldots$ eran adieraziko ditugu

Ordena handiagoko deribatu partzial lortzerakoan egindako deribatuen ordena emaitza aldatzen ez badu, hau da, $F_{xy}(x, y) = F_{yx}(x, y)$ edo $F_{yyx}(x, y) = F_{yxy}(x, y)$ eta antzerakoak berdinak baldin badira lana errazten zaigu. Schawrt-en teoremak ordenaren arabera deribatua aldatzen den ala ez jakiteko erizpidea ematen digu.

6.2. Teorema *Schwartz $z = F(x, y)$ funtzio jarraitua izanik, bigarren ordenako deribatu partzialak jarraituak baldin badira, $F_{xy}(x, y)) = F_{yx}(x, y)$ betetzen da.*



6.49 Irudia: Norabideak eta dagozkien kurbak

6.20. Ariketa Schwartz-en teorema erabiliz, frogatu $F(x, y)$ funtzioa jarraitua baldin bada eta bigarren eta hirugarren odenako deribatu partzialak jarraituak baldin badira orduan e $F_{xxy}(x, y) = F_{xyx}(x, y) = F_{yxx}(x, y)$, eta abar betetzen dela.

6.15 Hiru aldagai erreleko funtzioak

$D \subset \mathbb{R}^2$ eremuan definitutako $z = F(x, y)$ funtzioentzat lortutako emaitzen antzerakoak betetzen dira hiru aldagietako $D \subset \mathbb{R}^3$ eremuan definitutako $w = F(x, y, z)$ funtzioentzak.

Limitea eta jarraitutasuna

$w = F(x, y, z)$ funtzioak $P(a, b, c)$ puntua L limitea du, $(x, y, z) \in D$ puntua (a, b, c) jotzen duenean edozein ibilbide erabiliz, $w = F(x, y, z)$ balioa L-ra jotzen duenean. $L = F(a, b, c)$ denean, $F(x, y, z)$ funtzioa jarraitua da (a, b, c) puntuan. (6.50(a)) irudian $(x, y, z) \to (a, b, c)$ jotzen du ibilbide ezsberdinak erabiliz.

6.21. Ariketa $w = (x + y + z)/(x + y - z)$ funtzioak $(0, 0, 0)$ puntuak limiterik ez duela egiaztatu.

6.15.1 Deribatu partzialak

$F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$, $F_z(x, y, z)$ deribatu partzialak $w = F(x, y, z)$ funtzioaren aldaketa abiadurak neurtzen dituzte OX, OY, OZ ardatz koordenaruen norabidetan. (6.50(b)) irudian ditugu hiru norabide horiek adierazita.

Gradientea

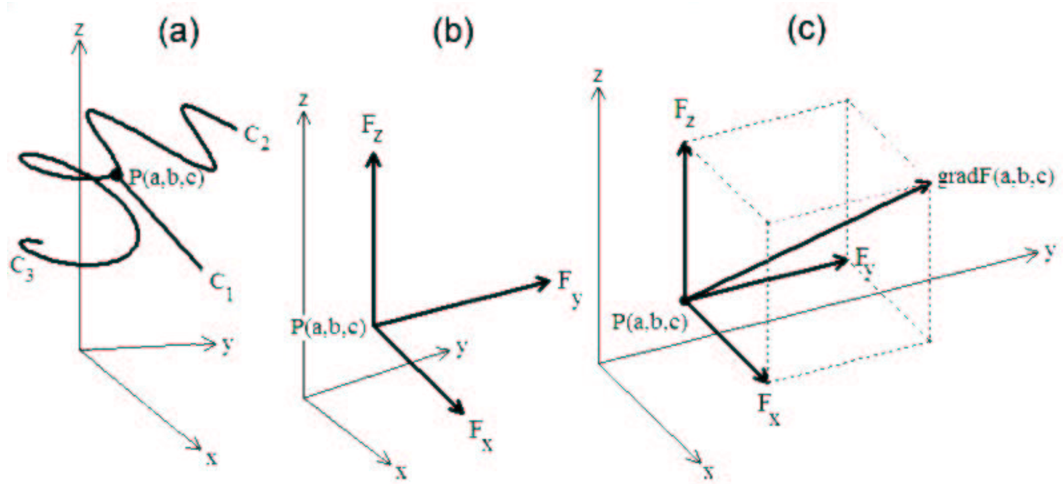
Era berdinean definitzen da, $\text{grad}\, F(a, b, c) = (F_x(a, b, c), F_y(a, b, c), F_z(a, b, c))$. (6.50(c)) irudian adierazita dago.

Norabide deribatua

$w = F(x, y, z)$ aldagaiaren aldaketaren abiadura neurtzen du (a, b, c) puntuan eta $V = (V_x, V_y, V_z)$ modulu bateko bektoreak finkatzen duen norabideari jarraituz. Era honetan kalkulatuko dugu

$$F_v(a, b, c) = F_x(a, b, c)V_x + F_y(a, b, c)V_y + F_z(a, b, c)V_z$$

Gradientearen propietateak honako jauek dira:



6.50 Irudia: Hiru aldagiako funtzioa, norabideak eta gradientea

1. Gradiente bektorearen norabide eta norantzan (a, b, c) puntuko norabide-deribatu handiena lortzen da.

$$\operatorname{grad} F(a, b, c) = (F_x(a, b, c), F_y(a, b, z), F_z(a, b, c))$$

   Balio maximo hori $\operatorname{grad} F(a, b, c)$-ren modulua da.

2. Gradientearen norabidean bain aurkako norantzan (a, b, c) puntuko norabide-deribatu txikiena lortzen da.

$$-\operatorname{grad} F(a, b, c) = (-F_x(a, b, c), -F_y(a, b, z), -F_z(a, b, c))$$

   Balio maximo hori $\operatorname{grad} F(a, b, c)$-ren modulua zeinuz aldatuta da.

3. $\operatorname{grad} F(a, b, c)$ bektorea maila gainazalekin, $F(x, y, z) = k$, elkarzut dago.

6.22. Ariketa (6.1) adibideko $w = C(x, y, z)$ funtzioaren gradientea lortu (x, y, z) puntuetan. Esanahia adierazi.

Deribatuen ordenarekiko independentzia

Schwartz-en teorema antzerako bidean enuntziatzen da. $w = F(x, y, z)$ jarraitua baldin bada eta bigarren ordenako deribatu partzialak baldin baditu, orduan

$$F_{xy}(x, y, z) = F_{yx}(x, y, z), F_{xz}(x, y, z) = F_{zx}(x, y, z), F_{yz}(x, y, z) = F_{zy}(x, y, z).$$

betetzen dira.

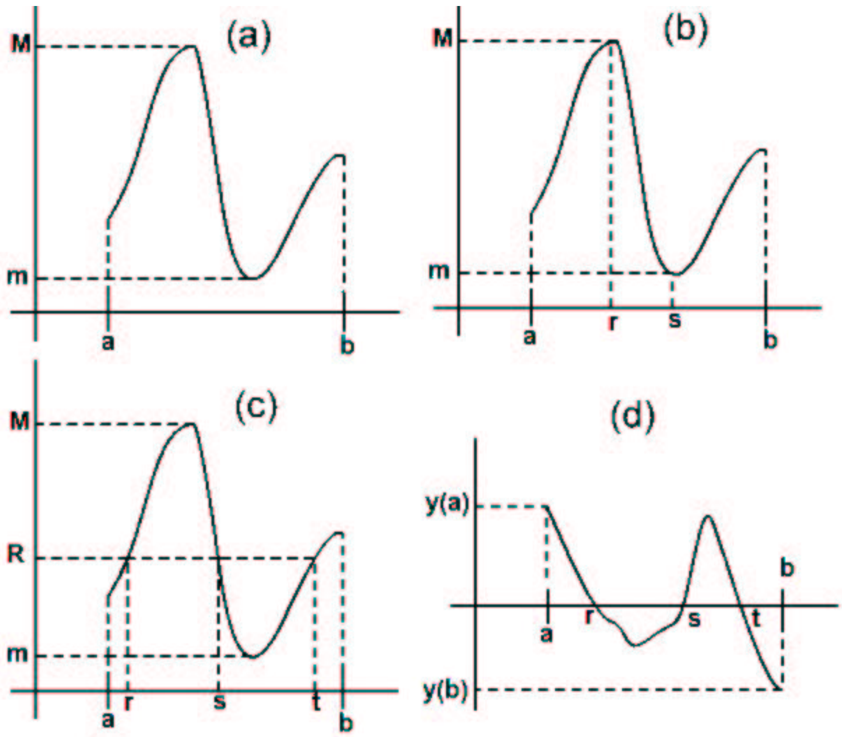
6.16 Beste propietate

Aldagai bateko funtzioak aztertzerakoan beste propietate ikusi genituen, adibidez bornatua izatea, anulatzen den ala ez, maximo edo minimo absolutuak dituen ala ez. En el siguiente ejercicio te proponemos que investigues acerca de estas cuestiones. Hurrengo ariketan propieate hauek aztertzea eskatzen da.

6.23. Ariketa $y(x)$ $[a, b]$ tartean funtzio jarraituen propietate hauek aztertu genituen

1. Bornatze propietatea: $y(x)$ funtzioa bornatua dago $[a, b]$ tartean (6.51)(a) irudia).
2. Weierstrass teorema: $y(x)$ funtzioak $[a, b]$ tartean balio maximoa M eta minimoa m ditu. (6.51)(b) irudia)
3. Tarteko balioak: $m \leq R \leq M$ izanik, orduan, bada $z \in [a, b]$ non $y(z) = R$ betetzen den (6.51)(c) irudia).
4. Bolzano-ren teorema: $y(a)y(b) < 0$ betetzen baldin bada, orduan bada $z \in (a, b)$ non $y(z) = 0$ betetzen den. (6.51)(d) irudia)

Emaitza guzti hauen antzerakoak $z = F(x, y)$ funtzioak betetzen ditu. Emaitza hauen esanahi geometrikoak aztertu eta formalki enuntziatu. $[a, b]$ tartea $\mathbb{R}$-n definituta zegoena aldagai bakarreko funtzioentzak ordezkatu egin behar da $z = F(x, y)$ funtzioarentzat eta $D \subset \mathbb{R}^2$ nolakoa den erabaki behar duzu. (**??**) irudia eta (**??**) ariketak lagungarriak dira.



6.51 Irudia: (6.23) ariketaren irudia