6. Kapitulua

Aldagai erreal anitzeko funtzio errealak

irudia agertzen den problemetan komenigarria da programa informatiko bat erabiltzea funtzioen adierazpen grafikoak egiteko, adibidez Winplot.

6.1. Ariketa

Ondorengo funtzioetarako, kalkulatu definizio eremua eta aztertu jarraitasuna emandako puntuetan:

a) $f(x,y) = \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}$ $(1,2)$ puntuan

e) $f(x,y) = 3x^2 + y$ $(2,1)$ puntuan

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $(0,0)$ puntuan

f) $f(x,y) = e^{xy}$ $(1,1)$ puntuan

d) $f(x,y) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ $(0,0,0)$ puntuan

g) $f(x,y) = \sin(xyz)$ $(\pi,1,1)$ puntuan

6.2. Ariketa

Izan bedi $f(u,v)$ ondorengo moduan definituriko funtzioa:

$$f(u,v) = \begin{cases} uv+1 & (u,v) \in (0,1)\times(0,1) \\ v+1.5 & (u,v)\in(0,1)\times(1,2) \end{cases}$$

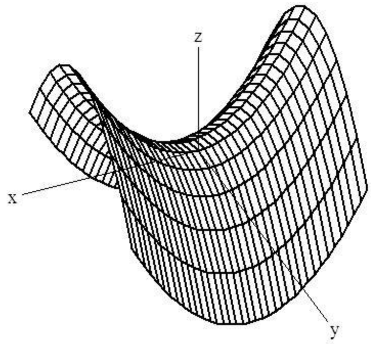
a) $f(u,v)$ funtzioaren adierazpen grafikoa egin.
b) Aztertu limitearen existentzia bere definizio eremuan.

6.3. Ariketa

a eta b aldetako paralelogramo baten azalera $A = ab\sin\theta$ da, θ bi aldeen arteko angelua izanik.
a) Kalkulatu A-ren aldaketa-erritmoak a-rekiko eta b-rekiko, $a = 10, b = 20$ eta $\theta = \pi/2$ direnean.
b) Demagun a, b eta θ denborarekin aldatzen direla $a = 2t, b = 4t$ eta $\theta = t\pi/10$ erlazioen bidez. Kalkulatu A-ren erritmo-aldaketa t-rekiko aurreko a, b eta θ balioetarako.

6.4. Ariketa

Marraztu hurrengo baldintzak betetzen dituzten $f(x,y)$ funtzioen grafikoak:
a) $f_x < 0, f_y > 0$
b) $f_x > 0, f_y > 0$



6.5. Ariketa
Izan bedi $z(x, y)$ hurrengo grafikoa duen funtzioa.

Kalkulatu hurrengo deribatu partzialen zeinuak:

a) $z_x(4, 1)$	f) $z_{xx}(4, 1)$
b) $z_y(4, 1)$	g) $z_{xx}(-4, 1)$
d) $z_x(-1, -1)$	h) $z_{yy}(-1, -2)$
e) $z_y(-1, -2)$	i) $z_{yy}(1, -2)$

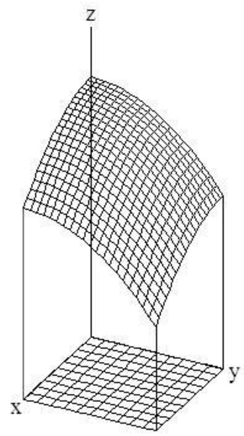
6.6. Ariketa
Pertsonek jasaten duten S sentsazio termikoa hurrengo erlazioaren bidez neur daiteke:

$$S(t, h) = 0.8885t - 22.4h + 1.2h - 0.544$$

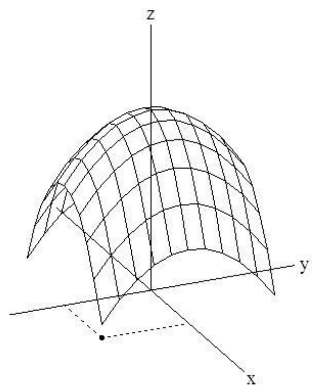
non t airearen tenperatura den (gradutan) eta h (forma dezimalean adierazita dagoen) hezetasun erlatiboa den.
a) Kalkulatu S-ren erritmo-aldaketak t-rekiko eta h-rekiko, $t = 30, h = 0.8$ direnean.
b) Zerk eragiten du gehiago S-rengan, airearen tenperaturak ala hezetasunak?

6.7. Ariketa
Metro bateko aldetako plaka karratu baten edozein (x, y) puntuko T tenperatura $T(x, y) = 500 - 0.6x^2 - 1.5y^2$ funtzioaren bidez adierazita dago (ikus irudia). Kalkulatu T-ren erritmo-aldaketa $P(0.5, 0.3)$ puntuan, ardatzen norabidetan plakaren gainean egindako ibilbidearekiko.

6.8. Ariketa
Plaka metaliko baten T tenperatura (gradu zentigradutan) ondorengo erlazioaren bidez neur



daiteke: $T(x, y) = 40 - 4x^2 - y^2$, non x eta y zentimetrotan adierazten diren (ikus irudia). Zein norabidetan hazten da azkarren tenperatura $(2, -3)$ puntutik abiatuta? Zein da hazkuntza-erritmo hori? Kalkulatu zein ibilbide jarraitu beharko den $(2, -3)$ puntutik, tenperatura igoera handiena lortzeko.



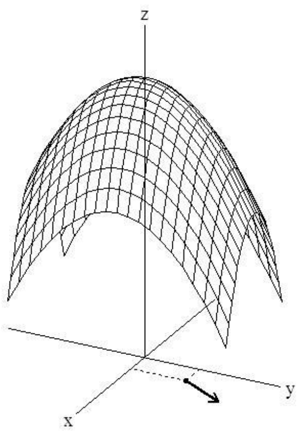
6.9. Ariketa
Gas idealen legeak dioenez $PV = nRT$ betetzen da, non P presioa, V bolumena, n gasaren mol kopurua , R gasaren menpekoa den konstantea eta T tenperatura diren. Frogatu

ondorengoa betetzen dela:

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = -1$$

6.10. Ariketa
Izan bedi $z(x, y)$ funtzioa. Egiazkoak al dira hurrengo baieztapenak?
a) $z_x = z$ bada, orduan $z = \mathrm{e}^x h(y)$.
b) $z(x, y) = f(x)g(y)$ bada, orduan $z_x + z_y = f'(x)g(y) + f(x)g'(y)$.
d) $z_{xy} = 1$ bada, orduan $z(x, y) = xy$.

6.11. Ariketa
Izan bedi $z(x, y) = 4 - x^2 - 0.25y^2$ funtzioa.
a) Kalkulatu $(1, 2)$ puntuko deribatu direkzionala $u = (\cos\pi/3, \sin\pi/3)$ norabidean. Ikusi irudia.
b) Kalkulatu deribatu direkzionala $(1, 2)$ puntuan maximoa duen v norabidea. Interpretatu emaitza $z(x, y)$ funtzioaren grafikoa erabiliz.



6.12. Ariketa
Kalkulatu $z(x, y) = x^2 \sin 2y$ funtzioaren deribatu direkzionala $(1, \pi/2)$ puntuan eta $u = (3, -4)$ norabidean.

6.13. Ariketa
Kalkulatu $z(x, y) = y \ln x + xy^2$ funtzioaren gradientea $(1, 2)$ puntuan.

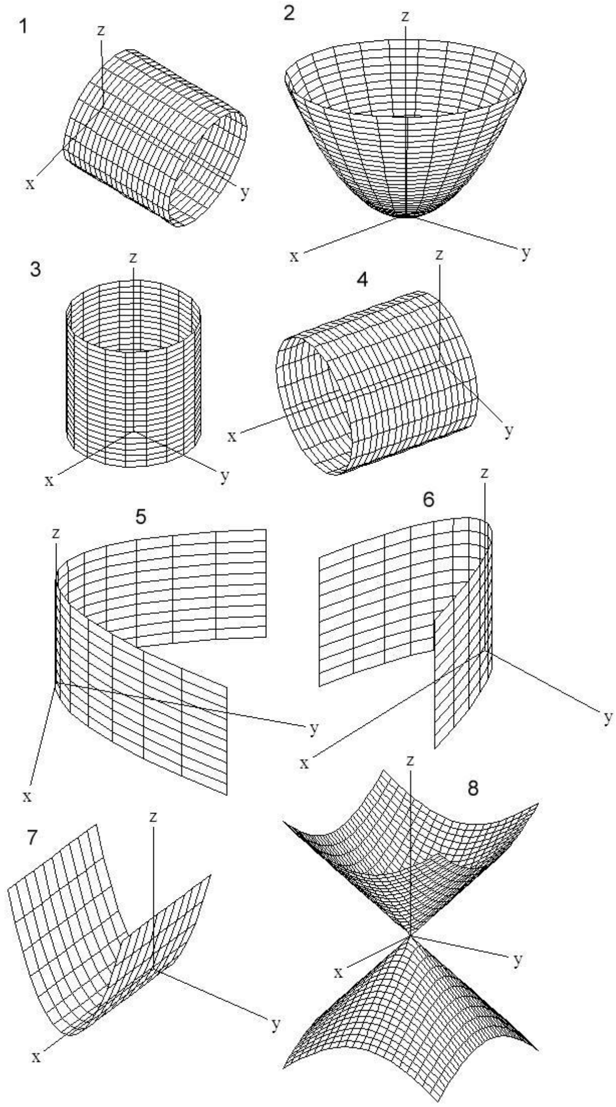
6.14. Ariketa
Frogatu $u(x,t) = 0.5(y(x-ct) - y(x+ct))$ funtzio-familia, $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ uhin dimentsiobakarren ekuazioaren soluzioa dela. Ekuazio horrek soka elastiko baten bibrazioak deskribatzen ditu.

6.15. Ariketa
Ebatzi ondorengo ekuazio diferentzialak:

a) $z_y = 0$	b) $z_x = 0$	d) $z_{xy} = 0$
e) $z_{yx} = 0$	f) $z_x = z$	g) $z_y = z$

6.16. Ariketa
Erlazionatu ondorengo ekuazio bakoitza dagokion adierazpen grafikoarekin:

a) $z = x^2 + y^2$	f) $x^2 + z^2 = 1$
b) $z^2 + y^2 = 1$	g) $x = y^2$
d) $x^2 + y^2 = 1$	h) $x^2 + y^2 = z^2$
e) $y = x^2$	i) $z = y^2$


1
2
3
4
5
6
7
8
x
y
z

6.17. Ariketa
Definizioa aplikatuz, kalkulatu hurrengo funtzioen lehen ordenako deribatu partzialak, emandako puntuetan:

a) $f(x,y) = ye^x$ $(1,2)$ puntuan
b) $f(u,v) = 3u^2 - 2v + 5u$ $(-1,2)$ puntuan
d) $f(x,y,z) = \cos(2x - yz)$ $(0,0,0)$ puntuan
e) $f(p,q) = 3q^2 + p$ $(2,1)$ puntuan
f) $f(x,y) = e^{xy}$ $(1,1)$ puntuan
g) $f(x,y,z) = \sin(xyz)$ $(\pi,1,1)$ puntuan

6.18. Ariketa
Kalkulatu aurreko ariketako funtzioen bigarren ordenako deribatu partzialak, emandako puntuetan.

6.19. Ariketa
Aplikatu emandako aldagai aldaketa hurrengo ekuazio diferentzialetan:

a) $xz_x + yz_y = z$
$u = x$
$v = y/x$

b) $z_{xx} - a^2 z_{yy} = 0$
$u = y - ax$
$v = y + ax$

d) $e^{-2x}(z_{xx} - z_{xy}) = 1$
$u + v = e^{x+y}$
$u - v = e^{x-y}$

e) $2z_{xx} + z_{xy} - z_{yy} + z_y = 0$
$u = x + 2y + 2$
$v = x - y - 1$

6.20. Ariketa
Hurrengo ekuazioetan koordenatu polarretara aldagai aldaketa egin:

a) $xz_y - yz_x = 0$ b) $(x-y)z_x + (x+y)z_y = 0$

6.21. Ariketa
Kalkulatu hurrengo funtzioen bigarren ordenako deribatuak:

a) $f(x,y) = \int_x^y \sin t dt$ $(1,2)$ puntuan
b) $z = f(x, x/y)$
d) $z = f(2x, y^2)$
e) $z = f(x^2 + y^2)$
f) $z = f(2x, 3x, 4x)$
g) $f(u,v) = \int_u^v e^{t^2} dt$ $(1,1)$ puntuan
h) $z = f(x+y, xy)$
i) $z = f(x^2 + x, 2y + 1)$
j) $z = f(e^x, 2y + \ln y)$
k) $z = f(x, 2+y)$ non $x = t+1, y = 2t^2$

6.22. Ariketa
$z_{xx} - 3z_{xy} + 2z_{yy} = 0$ ekuazio diferentziala ebazteko $u = x + Ay, v = x + By$ aldagai aldaketa erabiltzen da, A eta B konstante errealak izanik. Aukeratu A eta B, aldagai aldaketa egitean lortzen den ekuazioa ahalik eta sinpleena izan dadin. Ondoren ebatzi lortutako ekuazioa.