5. Kapitulua

Integrazioa

5.1 Problemaren azalpena

Azter dezagun (5.1) taula. Hiri baten egun baten zehar izan diren tenperaturak adierazita ditugu. Eguraldien albisteak ematen digutenean, “batezbesteko tenperatura” aipatzen dute, hau da, egunaren zehar izan diren tenperaturen banaketa gutxi gora bera adierazten duen balio bat.

t(o)	0	4	8	12	16	20	24
T(°C)	14.9	13.3	12.3	20.8	24.3	19.2	16

5.1 Taula: Tenperaturaren banaketa

Nola lor dezakegu batezbesteko balio hori? Ditugun datuen kopurua finitua denean erraz lor dezakegu balio hori, gure kasuan

$$\bar{T} = \frac{14.9 + 13.3 + 12.3 + 20.8 + 24.3 + 19.2 + 16}{7} = 17.2°C$$

eragiketen bidez.

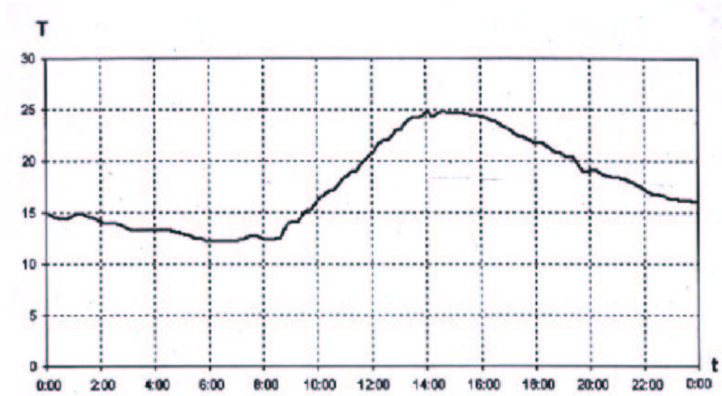
Balioen kopurua handiagoa baldin bada, (5.1) taulan ditugunak adibidez, batezbesteko balioa zehatzagoa lor dezakegu

t(o)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
T(°C)	14.9	14.1	13.3	12.2	12.3	16.4	20.8	24.9	24.3	21.8	19.2	17.1	16

5.2 Taula: Tenperaturaren banaketa

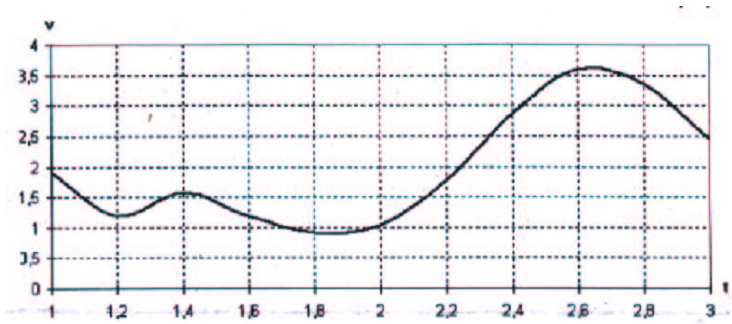
$$\bar{T} = \frac{14.9 + 14.1 + 13.3 + 12.2 + 12.3 + 16.4 + 20.8 + +24.9 + 24.3 + 21.8 + 19.2 + +17.116}{7} = 15.5°C$$

Tenperaturaren aldaketa jarraitua baldin badugu, (5.1) irudian adierazita duguna adibidez, batezbesteko balioa lortzea ez da hain erraza.



5.1 Irudia: Tenperaturen adierazpena

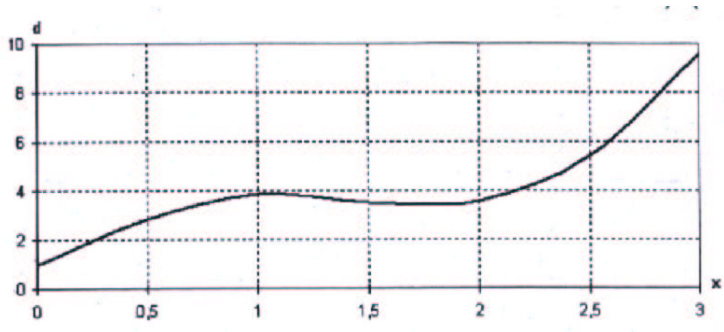
Azter dezagun orain (5.2) adierazpena. Ibilgailu baten abiadura $v(m/s)$ 2 s-ko tartean adierazita dugu. Aurreko kasuan bezala, nola lor dezakegu v-ren batezbesteko abiadura $[1,3]$ tarteko une desberdinetako abiadura erabili beharrean v-ren aldaketa jarraitua t-rekiko erabiliz?



5.2 Irudia: Ibilgailuaren abiadura

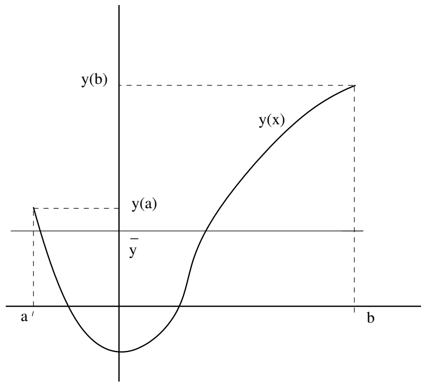
Hirugarren kasuan metalezko barra baten dentsitatea, $d\ g/cm^3$, neurtu da x puntu bakoitzean eta (5.3) adierazpen grafikoan ikus daiteke dentsitatea konstantea ez dela. Nola lor dezakegu dentsitatearen batezbesteko balioa?

Orokorrean, problema era honetakoa da: $y(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean definituta eta ja-



5.3 Irudia: Barraren dentsitatea

rraitua izanik funtzioaren batezbesteko balioa kalkulatzea $[a, b]$ tartean, $y(x)$ funtzioaren aldaketa jarraitua erabiliz. Hau da, nola lortu $\bar{y}$ (5.4) irudian adierazitako $y(x)$ funtzioaren batezbestekoa $[a, b]$ tartean.



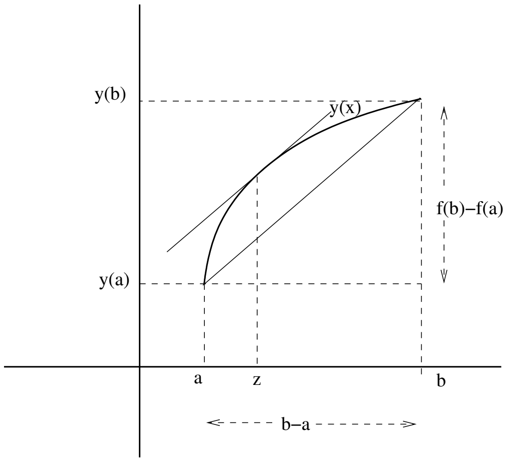
5.4 Irudia: Batezbesteko balioa

X,X atalean, $[a, b]$ tartean definitutako $y(x)$ funtzioari elkartutako batezbesteko balioa lortzeko bide bat aurkitu genuen

$$\tilde{y} = \frac{y(b) - y(a)}{b - a} \tag{5.1}$$

$y(x)$ funtzioa jarraitua bada $[a, b]$ tartean eta deribagarria (a, b) tartean batezbesteko balioaren teoremaren arabera $\tilde{y}$ balio hori $y'(x)$ funtzioak hartzen du (ikus (5.5) irudia) $z \in (a, b)$ punturen baten, hau da,

$$\exists z \in (a,b) \mid y'(z) = \tilde{y} = \frac{y(b) - y(a)}{b - a}$$



5.5 Irudia: Batezbesteko balioa

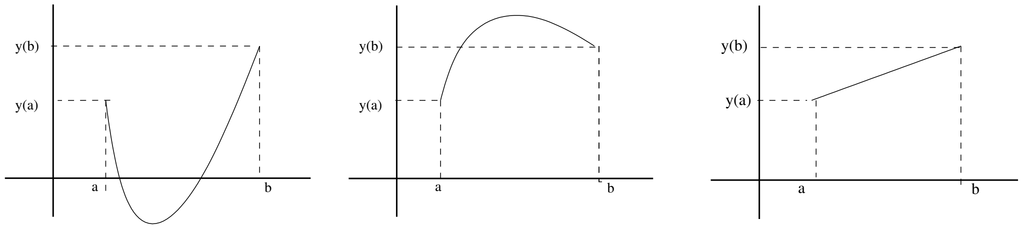
y funtzioaren aldaketaren abiadura x-rekiko $\tilde{y}$-rekin bat dator (a, b) tartearen punturen baten. (5.1) ekuazioan y-ren batezbesteko abiadura lortzen da, eta atal honetan y aldagaiaren batezbestekoa lortzea nahi dugu.

Bestalde, $[a, b]$ tartean $y(x)$-ren "batesbezteko abiadura" kontzeptu horrek arazo bat du, $y(x)$ funtzioaren $[a, b]$ tartearen muturretako balioak besterik ez ditu hartzen, beraz funtzioaren aldakuntza tartean ez du erabiltzen eta aldakuntza ezberdineko funtzioentzat batesbezteko balio berdina lor dezakegu. Adibidez, (5.6) irudian ikus daitezken adierazpenak funtzio ezberdinen adierazpenak dira baina $[a, b]$ tartean batesbezteko berdina dute.

5.1. Ariketa $y(x)$ funtzioa era honetan definitzen dugu

$$y(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0, 1] \\ 1 & x \in (1, 4] \end{cases}$$

Lortu, ikusi ditugun batezbesteko balioak $y(x)$ funtzio horrentzat.



5.6 Irudia: Batezbeste balio berdina, aldakuntza ezberdinak

1. $\tilde{y} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
2. $\bar{y} = \frac{y(x_1)+y(x_2)+\cdots+y(x_n)}{n}$

Ohartu $\bar{y}$ lortzerakoan, emaitza $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 4]$ laginaren arabera aldatzen dela. Zein iruditzen zaizu lagin adierazgarriena?

5.2 $y(x)$ funtzioaren batezbesteko balioa $[a, b]$ tartean

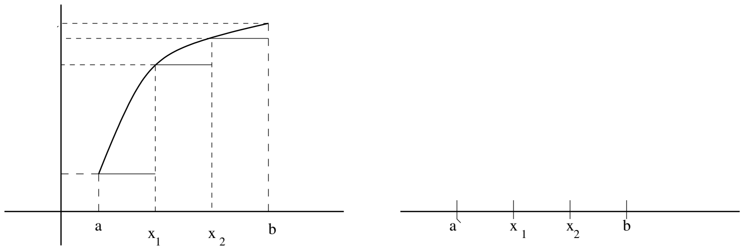
Aztertzen ari garen problema funtzio baten batezbesteko balioa lortzea da, hau da, $y(x)$ funtzioak $[a, b]$ tartean duen batezbesteko balioa, $\bar{y}$, definitzea funtzioaren aldakuntza jarraitua tartean zehar kontutan hartuz.

(**??**) atalean azaldu ziren ideiak erabiliko ditugu. Funtsean prozedura hau zen:

1. T kalkulatu nahi dugun magnitudea identifikatzea.
2. $R(h)$ funtzioa eraiki, h 0-ra hurbiltzen den heinean $R(H)$ Tri hurbil dadin.
3. Lortu, limitea existitzen bada, $T = \lim_{h\to 0} R(h)$

Prozedura hau gure problemara aplikatuko dugu:

1. Kalkulatu nahi dugun magnitudea identifikatzea: $\bar{y}$, $y(x)$ funtzioaren batesbezteko balioa $[a, b]$ tartean. Zein irizpide erabiliko dugu $\bar{y}$-ren hurbilketak lortzeko? Tenperaturaren banaketaren kasuan erabili genuen antzerako bidea hartuko dugu. $[a, b]$ tartearen azpitarteak definituko ditugu eta azpitarteen edozein puntu hartuko ditugu, adibidez, ezkerreko mugak. (ikus (5.7) irudia)



5.7 Irudia: Batezbesteko balioa bilatzen

(5.7) irudian $x_0 = a, x_1, x_2, x_3 = b$ puntuek definitzen dute azpitarteak, eta batezbestekoa era honetan definitzen dugu

$$\bar{y} \simeq \frac{y(x_0) + y(x_1) + y(x_2)}{3}$$

2. $R(h)$ funtzioa eraiki: h kasu honetan azpitarteen zabalera da, $x_0 = a, x_1 = a+h, x_2 = a + 2h, \ldots, x_n = a + nh = b$. Beraz,

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, \ldots, n \quad (n + 1 \text{ puntu ditugu})$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad n = \frac{b-a}{h}$$

eta hurbilketa era honetan definitzen dugu

$$\bar{y} \simeq R(h) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} y(x_k)}{n} = \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} hy(x_k)$$

Idatzi dugun adierazpide honek ez du zentzurik $h = 0$ denean, $h = \frac{b-a}{n} > 0$ betetzen delako.

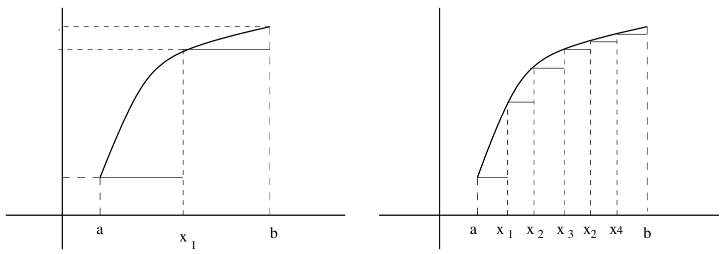
3. Lortu limitea, existitzen bada, $T = \lim_{h\to 0} R(h)$:

$$\lim_{h\to 0} R(h) \tag{5.2}$$

Limite hau ezin dugu ziurtatu existitzen dela, baina existitzen bada $y(x)$ funtzioaren $[a, b]$ tartean batezbesteko balioa izango da.

$$\bar{y} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} h y(x_k) \tag{5.3}$$

$h \to 0$ doanean $n \to \infty$ doa, hau da, gero eta puntu gehiago hartzen ditugu, azpitarteen zabalera h gero eta txikiago egiten dugun heinean. (ikus (5.8) irudia)



5.8 Irudia: Batezbesteko balioa bilatzen $h \to 0$

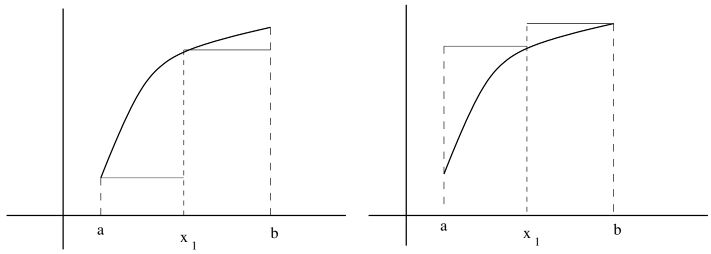
Hau egiterakoan, $y(x)$ funtzioa $[x_k, x_{k+1}] \mid k = 0, 1, \ldots, n-1$ azpitarteetan funtzio konstanteen bidez hurbiltzen ari gara. $h \to 0$ doanean (edo $n \to \infty$) hurbilketa hobeagoa izango da. Horregatik, (5.3) formulan definitzen dugun batezbesteko balioan y-ren aldakuntzak eragina du, (5.4) formulan gertatzen ez zena.

$$\bar{y} = \frac{y(b) - y(a)}{b-a} \tag{5.4}$$

(5.4) formulan $y(a)$ eta $y(b)$ besterik ez ditugu erabiltzen, hau da, ez ditugu erabiltzen $y(x) \mid x \in (a, b)$ balioak.

$R(h)$ definitzeko era alda dezakegu, hau da, $[x_k, x_{k+1}] \mid k = 0, 1, \ldots, n-1$ tarteen ezkerreko muturren balioak hartu beharrean eskuineko muturreko balioak erabil dezakegu (5.9) irudian ikusten den bezala

$$R_2(h) = \frac{\sum_{k=1}^{n} h\ y(x_k)}{n} = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{n} h\ y(x_k) \tag{5.5}$$

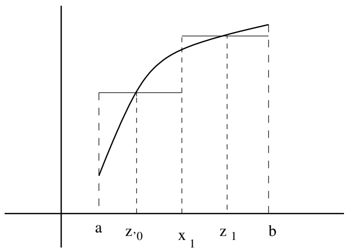


5.9 Irudia: $z_k = x_{k+1}, k = 0, 1, \ldots, n-1$

edo$[x_k, x_{k+1}] \mid k = 0, 1, \ldots, n-1$ tarteen erdiko puntuen balioak, (5.10) irudian ikusten den bezala, hartzen ditugunean (5.6) formula lortzen dugu.

$$R_3(h) = \frac{\sum_{k=1}^{n} h\ y\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)}{n} = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{n} h\ y\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \tag{5.6}$$

edo $[x_k, x_{k+1}] \mid k = 0, 1, \ldots, n-1$ tarteen edozein $z_k \in [x_k, x_{k+1}]$ puntuak erabiltzen

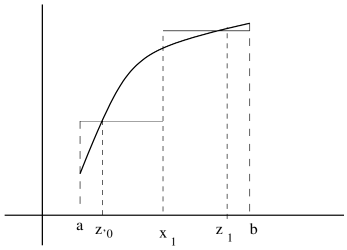


5.10 Irudia: $z_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, k = 0, 1, \ldots, n-1$

baditugu (5.11) irudian ikusten den bezala (5.7) formula lortzen dugu.

$$R_4(h) = \frac{\sum_{k=1}^{n} h\ y(z_k)}{n} = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{n} y(z_k) \tag{5.7}$$

$y(x)$ funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua denez, limiteak beti berdinak lortuko ditugu, nahiz eta z_k puntuak era ezberdinetan aukeratu, beraz lortu dugu $\bar{y}$-rentzat zalantzarik gabeko adierazpidea:



5.11 Irudia: $z_k \in [x_k, x_{k+1}], k = 0, 1, \ldots n-1$

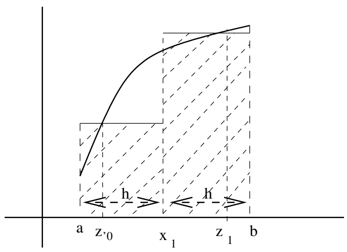
5.1. Definizioa *$y(x)$ funtzio jarraitua baldin bada $[a,b]$ tartean, eta $x_k = a + kh, k = 0, 1, \ldots n-1$ $h = \frac{b-a}{n}$ puntuak hartzen baditugu*

$$\bar{y} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} hy(z_k) \tag{5.8}$$

(5.8) ekuazioan azaltzen den gaia interes handiko gaia da. $y(x) \geq 0 \; \forall x \in [a,b]$ denean $h \cdot y(z_k)$ biderkadura lauki zuzen baten azalera da, lauki zuzen horren oinaren luzera h eta altuera $y(z_k)$ dira (ikus (5.12) irudia) Irudi horretan

$$\sum_{k=0}^{1} hy(z_k) = hy(z_0) + hy(z_1)$$

batura marraztu ditugun lauki zuzenen azaleren batura da.



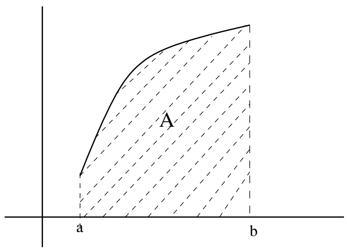
5.12 Irudia: Lauki zuzenen azalerak

Beraz, $y(x) \leq 0 \forall x \in [a,b]$ betetzen denean $\sum_{k=0}^{n-1} hy(z_k)$ batura, funtzioak eta OX ardatzak $x \in [a,b]$, mugatzen duten eremuaren azaleraren hurbilketa da, eta baturaren limitea azalera da.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} hy(z_k)$$

Batezbesteko balioa lortzeko bidea bilatzerakoan lerromakurrak eta OX ardatzak, $x \in [a, b]$ mugatzen duten eremuaren (ikus (5.13 irudia) azalera lortzeko bidea aurkitu dugu.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} hy(z_k)$$



5.13 Irudia: Lerromakurrak eta OX ardatzak mugatzen duten eremua

Kalkulu infinitesimalen garrantzi handiko kontzeptua dugu honako hau:

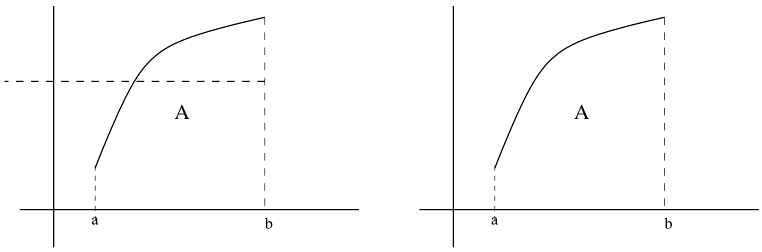
5.2. Definizioa *$y(x)$ funtzioa jarraitua da $[a, b]$ tartean, $y(x)$-ren integral mugatua $[a, b]$ tartean era honetan lortzen dugun balioa da.*

$$\int_a^b y(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} hy(z_k)$$

Kontzeptu honentzat bi erabilpen ikusi ditugu:

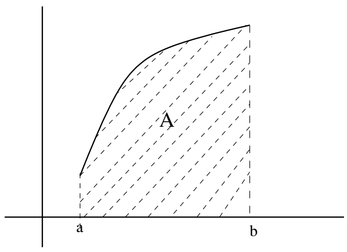
1. $y(x)$ funtzioaren $[a, b]$ tartean, batezbesteko balioa, $\bar{y}$, era honetan lortzen da

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b y(x)dx$$



5.14 Irudia: $\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)dx$

2. $y(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$ lerromakurrak eta OX ardatzak, $x \in [a, b]$, mugatzen duten eremuaren azalera
$$A = \int_a^b y(x)dx$$



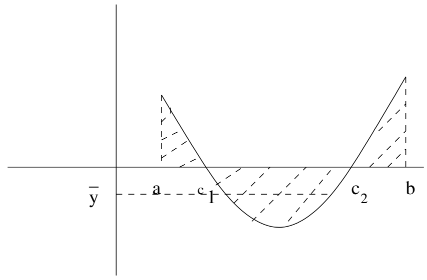
5.15 Irudia: $A = \int_a^b y(x)dx$

Oharra

$\int_a^b y(x)dx$-ren balioa ez da beti lerromakurrak eta OX ardatzen mugatzen duten eremuaren azalera, beharrezkoa da $y(x) \geq 0$ betetzea. Adibidez (5.16) irudian dugun lerro makurrak eta OX ardatzak mugatzen duten azalera

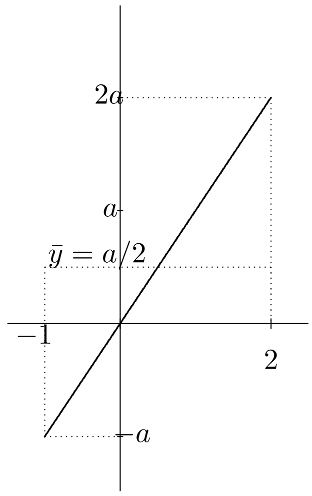
$$A = \int_a^{c_1} y(x)dx - \int_{c_1}^{c_2} y(x)dx - \int_{c_2}^{b} y(x)dx$$

formularen bidez lortzen da.



5.16 Irudia: $A = \int_a^b y(x)dx$ ez da mugatutako eremuaren azalera

5.1. Adibidea $y(x) = 2x, \quad x \in [-1, 2], a > 0$ funtzioaren, (ikus (5.17) irudia) batezbestekoa lortu



5.17 Irudia: Adibidea

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^2 axdx = \frac{1}{3}\left[-\frac{a}{2} + \frac{4a}{2}\right] = \frac{a}{2}$$

5.3 Integral mugatuaren propietateak

Gerta daiteke $y(x)$ funtzioa beste funtzioen bidez definituta izatea, funtzioen batuketaz edo biderketaz ... Adibidez

$$y(x) = y_1(x) \cdot y_2(x), \quad y(x) = y_1(x) + y_2(x), \quad y(x) = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$$

$y(x)$ funtzioaren integral mugatua beste funtzio horien integralen bidez lortzea oso baliogarria izan daiteke.

5.2. Ariketa Demagun $y_1(x)$ eta $y_2(x)$ funtzioa $[a, b]$ tartean jarraituak direla. Hauetako propietateetatik zeintzuk betetzen dira beti?

$\mathbf{P}_1$ $\int_a^b (y_1(x) \pm y_2(x))\,dx = \int_a^b y_1(x)dx \pm \int_a^b y_2(x)dx$

$\mathbf{P}_2$ $\int_a^b (y_1(x) \cdot y_2(x))\,dx = \int_a^b y_1(x)dx \cdot \int_a^b y_2(x)dx$

$\mathbf{P}_3$ $\int_a^b \frac{y_1(x)}{y_2(x)}dx = \frac{\int_a^b y_1(x)dx}{\int_a^b y_2(x)dx}$

$\mathbf{P}_4$ $\int_a^b py(x)dx = p\int_a^b y(x)dx, \quad \forall p \in \mathbb{R}$

5.3. Ariketa $y(x)$ funtzioa $[0, b]$, $b \geq 1$ tartean era honetan definitzen dugu:

$$y(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ 1 & x \in (1, b] \end{cases}$$

Lortu $\bar{y}$-ren balioa. Demagun b v abiadurarekin aldatzen dela. $\bar{y}$ ren balioa zer nolako abiadurarekin aldatzen da b-rekiko?

5.4 Batezbestekoaren teorema

Gogoratu berri dugu badela $z \in (a, b)$ punturen bat non $y(x)$-ren abiadura batezbesteko abiadura den. Batezbestekoaren teorema dena hain zuzen:

$$\left.\begin{array}{c} y(x) \text{ jarraitua } [a,b] \text{ tartean} \\ y(x) \text{ deribagarria}(a,b) \text{ tartean} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists z \in (a, b) \mid y'(z) = \tilde{y} = \frac{y(b)-y(a)}{b-a}$$

$\bar{y}$-rentzat antzerako propietatea betetzen den ala ez aztertuko dugu. Hau da: $y(x)$, $[a, b]$ tartean jarraitua baldin bada, ba al da $z \in [a, b]$, $y(z) = \bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)dx$ betetzen duenik?

Erantzuna baiezkoa bada, propietate honen erabilpen anitz lor ditzakegu. Adibidez lehenengo atalean ikusitako adibideetan, esan dezakegu egunaren zehar une baten tenperatura eta batezbesteko tenperatura berdinak izan direla? edo une baten ibilgailuaren abiadura eta batezbesteko abiadura berdinak izan direla? edo barraren punturen baten dentsitatea eta batesbezteko dentsitatea bat datozela?

Propietate hau egia da $[a, b]$ tartean jarraituak diren funtzioentzat.

5.1. Teorema *$y(x)$ funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua baldin bada, orduan $\exists z \in [a, b]$ honako hau betetzen duena*

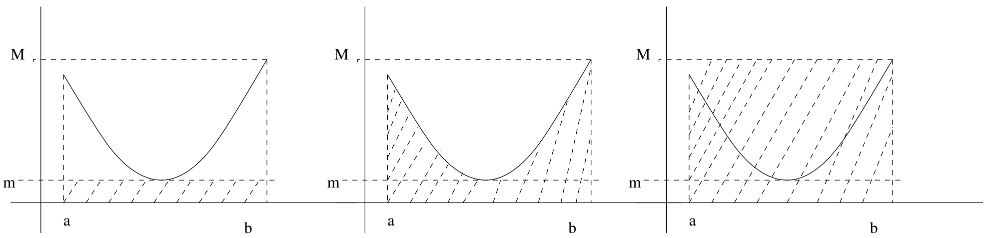
$$y(z) = \bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)dx$$

Frogapena

Berehalakoa da propietate hau erabiltzen badugu: m $[a, b]$ tartean $y(x)$-en balioen txikiena eta M handiena baldin badira, orduan

$$m(b-a) \leq \int_a^b y(x)dx \leq M(b-a) \tag{5.9}$$

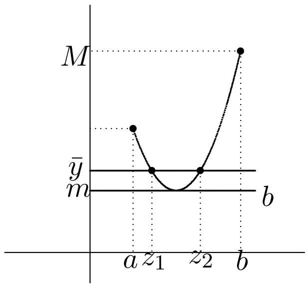
betetzen da. $y(x) \leq 0$ denean erraz egiaztatzen da propietate hau, (5.18) irudian marraz-



5.18 Irudia: Batezbesteko teorema

tutako eremuen azalerak ezkerreko irudian $m(b-a)$, erdikoan $\int_a^b y(x)da$ eta eskuinekoan $M(b-a)$ direla erabiliz. Gogoratzen al duzu zergatik ziurtatzen dugu maximo eta minimo horiek daudela? (5.9) formula era honetan berridatz dezakegu:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)dx \leq M$$



a

5.19 Irudia: Batezbesteko balioa $\bar{y} = y(z)$

hau da, $\bar{y}$ balioa m eta M-ren artean dauden balioa da. (**??**)-n ikusi genuen bitarteko balioen teoremaren arabera, bada $z \in [a, b] \mid y(z) = \bar{y}$ den.

Azter dezagun (5.19) irudian dugun adierazpen grafikoa, $y(x)$ funtzioaren batezbesteko balioa, $\bar{y}$, funtzioaren balio minimoa eta maximoaren artean dago eta gainera funtzioan balio hori hartzen du $z \in [a, b]$ punturen baten. Adibide horretan, $\bar{y} = y(z)$ baldintza betetzen duten bi z ditugu.

Batezbesteko balio honek batezbesteko aritmetikoak betetzen duen propietate hau betetzen du:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n \Rightarrow m = x_1 < \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} < x_n = M$$

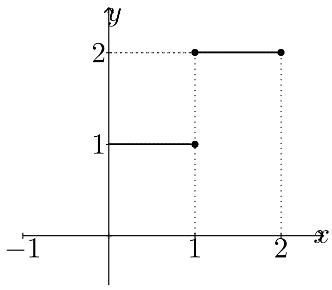
n balioen batezbesteko aritmetikoa balio horien txikiena eta handiarenaren tartean dago, baina batezbesteko aritmetikoa ez da $x_1, x_2, \ldots x_n$ balioren baten berdina izan behar. Adibidez

$$x_1 = 1, x_2 = 2 \Rightarrow \bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1.5, \;\; x_1 \neq \bar{x} \neq x_2$$

$$x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 0 = x_2$$

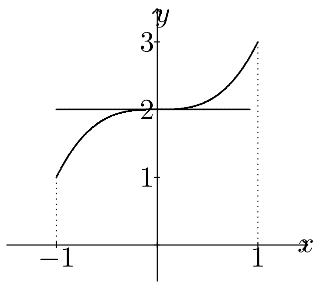
5.4. Ariketa $y(x)$ funtzioa jarraitua ez bada $[a, b]$ tartean, ziurta dezakegu batezbesteko balioa $\bar{y} = y(z), \;\; z \in [a, b]$ betetzen dela?

Azter ezazu (5.20) irudian agertzen den adierazpen grafikoa. Zein da $\bar{y}$-ren funtzioa? Ba al da $z \in [1, 2] \mid y(z) = \bar{y}$ betetzen duena? Hasteko era horretako jarraituak ez diren funtzioentzat integral mugatuaren balioa definitu behar duzu, orain arte beti jarraitutasunaren hipotesia erabili baitugu.



5.20 Irudia: Jarraitua ez den funtzioa

5.5 $y(x)$-en batezbesteko balioaren adierazpen grafikoa



5.21 Irudia: Batezbestekoaren esangura

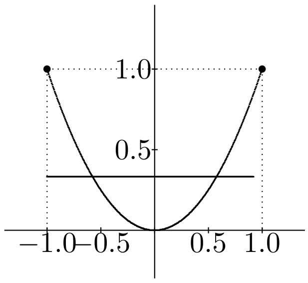
(5.21), (5.22) eta (5.23) irudiak aztertu. Hiruretan lerro horizontal bat dago $\bar{y}$-ren balioari dagokin altueran. $y = \bar{y}$ zuzenak eta $y(x)$ funtzioaren adierazpen grafikoak definitzen duten planoko bi eremuek azalera berdina dute. Propietate honek $\bar{y}$-ren balioa OY ardatzean kokatzen laguntzen gaitu $y(x)$-ren adierazpen grafikotik abiatuz.

5.5. Ariketa Kokatu, gutxi gora behera, (5.1) ataleko adierazpen grafikoetan (tenperatuta, abiadura, dentsitatea) $\bar{y}$-ren balioa.

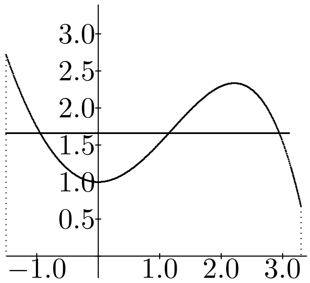
Zergatik betetzen da propietate hau? Adibide batek lagunduko gaitu.

Har dezagun $[a, b]$ tartean definituta eta jarraitua den $y(x)$ funtzioa, batezbestekoaren teoremaren arabera

$$\exists z \in [a, b] \mid y(z) = \bar{y} \Leftrightarrow \exists z \in [a, b] \mid y(z)(b - a) = \int_a^b y(x)dx$$



5.22 Irudia: Batezbestekoaren esangura



5.23 Irudia: Batezbestekoaren esangura

Beraz (5.24) irudian ditugun $\bar{y}$ altuera eta $b-a$ oina duen lauki zuzenaren azalera eta $y(x)$ funtzioak $[a,b]$ tartean mugatzen duen azalera berdinak dira, beraz,

$$1+3+4=2+3+5$$

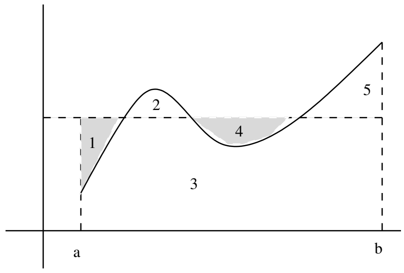
Eta hemendik

$$1+4=2+5$$

5.6 Kalkulu infinitesimalaren oinarrizko teorema

Demagun $T(t)$ funtzioak t unean meteorologia-estazio baten neurtutako tenperatura dela. T-ren batezbestekoa neurtzen ikasi dugu, adibidez 24 orduen zehar

$$\bar{T}=\frac{1}{24}\int_0^2 4T(t)dt$$



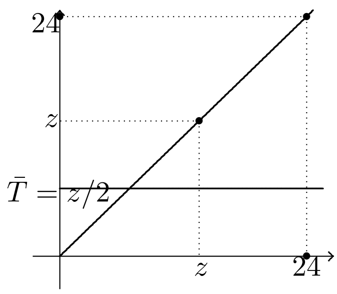
5.24 Irudia: Batezbestekoaren adierazpen grafikoa

$\bar{T}$ balioa $T(t)$ eta t-ren balioen tartea, gure kasuan $t \in [0, 24]$, ezagutzen direnean lor daiteken konstantea da. T-ren batezbestekoarekin batera, $\bar{T}$ denborarekiko nola aldatzen den ezagutzea interesatzen zaigu.

5.2. Adibidea Demagun $T(t) = t, t \in [0, 24]$ dela. Lor dezagun $\bar{T}$-ren balioa $[0, z]$ tartean $z \in [0, 24]$.

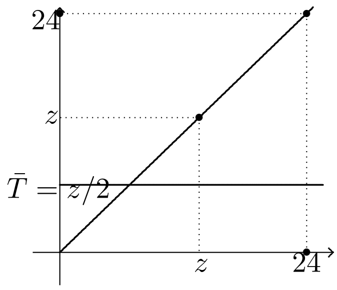
$$\bar{T}(z) = \frac{1}{z}\int_0^z t dt = \frac{1}{z}\frac{z^2}{2} = \frac{z}{2}$$

T-en batezbestekoa $[0, z]$ tartean z-ren funtzioa da. (ikus (5.25) eta (5.26) irudiak)



5.25 Irudia: Tenperaturen batezbestekoa

Garrantzia du y aldagaiaren batezbestekoaren aldakuntza $[a, b]$ tartean ezagutzea. Adibidez:



5.26 Irudia: $\bar{T(z)}$-ren adierazpen grafikoa

- $\bar{T}$ tenperaturen batezbestekoa, $[0, z]$ tartean, baldin bada batezbestekoa hori balioren bat baino txikiagoa (handiagoa) denean neurriren bat har dezakegu.
- $B(t)$ enpresa baten irabazia urtearen zehar baldin bada, irabazien batezbestekoa interesgarria da haien aldaketa aztertzeko.

Azter dezagun $\bar{y}$ funtzioa gorakortasun/beherakortasuna. Ikusi genuen

$$\begin{array}{ll} \bar{y}'(z) = \frac{d\bar{y}}{dz} > 0 & \Rightarrow \bar{y} \text{ gorakorra} \\ \bar{y}'(z) = \frac{d\bar{y}}{dz} < 0 & \Rightarrow \bar{y} \text{ beherakorra} \end{array}$$

$\bar{y}(z)$ funtzioa deribagarria baldin bada $z > a$ denean, deribatua era honetan lor daiteke:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}}{dz} &= \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-a}\int_a^z y(t)dt\right) = \\ &= \frac{-1}{(z-a)^2}\int_a^z y(t)dt + \frac{1}{z-a}\frac{d}{dz}\left(\int_a^z y(t)dt\right) \end{aligned}$$

Beraz, $H(z)$ funtzio hau deribagarria den aztertu behar dugu.

$$H(z) = \int_a^z y(t)dt$$

$z \in (a, b]$ balioentzat $H(z)$ funtzioak $y(t), t \in [a, z]$ funtzioaren adierazpenak mugatzen duen eremuaren azalera da. $y(t)$ funtzioari jarraitua izatea eskatu dugu eta $H(z)$ deribagarria dela ikusiko dugu. Aplika dezagun definizioa:

$$\begin{aligned} H'(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{H(z+h) - H(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{z+h} y(t)dt - \int_a^z y(t)dt}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_z^{z+h} y(t)dt}{h}. \end{aligned}$$

Batezbestekoaren teorema erabiliz, $y(t), t \in [z, z+h]$, funtzioarentzat $\exists u \in [z, z+h] \mid \frac{1}{h}\int_z^{z+h} y(t)dt = y(u)$ betetzen den, beraz

$$H'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{hy(u)}{h} = \lim_{h \to 0} y(u) = y(z)$$

$h \to 0$ doanean $u \to z$ doalako eta $y(t)$ funtzioa jarraitua delako $\lim_{h \to 0} y(u) = y(z)$ betetzen da. Esan dezakegu, beraz, $H(z)$ funtzioa deribagarria dela eta

$$\frac{dH(z)}{dz} = y(z) \tag{5.10}$$

(5.10) ekuazioan ordezkatuz

$$\frac{d\bar{y}}{dz} = \frac{-1}{(z-a)^2}\int_a^z y(t)dt + \frac{1}{b-a}y(z)$$

(5.10) emaitza kalkulu infinitesimalaren oinarrizko teorema da.

5.2. Teorema *[Kalkulu infinitesimalaren oinarrizko teorema] $y(t)$ funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua baldin bada, orduan*

$$H(z) = \int_a^z y(t)dt$$

funtzioa (a, b) tartean deribagarria da eta $H'(z) = y(z)$

Teorema hau oinarrizkoa dela esaten dugu teorema horren bidez beste hau lortzen dugulako.

5.3. Teorema *[Barrow-en Erregela] $F(t)$ funtzioak $F'(t) = y(t)$ betetzen baldin badu, orduan,*

$$\int_a^b y(t)dt = F(b) - F(a)$$

Berdintza hori Newton-Leibniz- formula bezala ere ezagutzen da.

Frogapena

Demagun $F(t)$ funtzioak $F'(t) = y(t)$ betetzen duela, orduan

$$H'(z) = y(z) = F'(z) \Rightarrow H'(z) = F'(z) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R} \mid F(z) = H(z) + K$$

$z = a$ denean

$$F(a) = H(a) + k \Leftrightarrow F(a) = \int_a^a y(t)dt + k \Rightarrow k = F(a)$$

$z = b$ denean

$$F(b) = H(b) + k \Leftrightarrow F(b) = H(b) + k = H(b) + F(a) \Leftrightarrow \int_a^b y(t)dt = F(b) - F(a)$$

Teorema hau erabiliz,

$$\int_a^b y(t)dt$$

balioa lortzeko, $F(t)$ $F'(t) = y(t)$ betetzen duen funtzioa aurkitu behar dugu, kalkulatzeko zaila den formula hau erabili beharrean.

$$\int_a^b y(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} hy(z_k),$$

$$z_k \in [x_k, x_{k+1}], k = 0, \ldots n-1, h = \frac{b-a}{n}, x_k = a + kh, k = 0, \ldots n$$

5.3. Adibidea $y(x) = x^2$ denean $\bar{y}(z), z \in [0,1]$ lortu.

$$H(z) = \int_0^z x^2 dx = F(z) - F(0)$$

lortzeko,

$$F(x) = \frac{x^3}{3}; F'(x) = x^2$$

betetzen dela erabiltzen dugu eta

$$H(z) = \int_0^z x^2 dx = F(z) - F(0) = \frac{1}{3}z^3$$

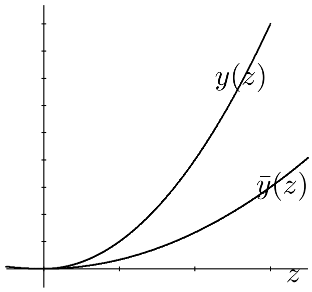
hemendik, batezbestekoa

$$\bar{y}(z) = \frac{1}{z}H(z) = \frac{1}{3}z^2$$

eta deribatuz

$$\frac{d\bar{y}}{dz} = \frac{2}{3}z$$

$z \in [0,1]$ delako deribatua positiboa, beraz gorakorra.



5.27 Irudia: $y(\bar{z})$-ren gorakortasuna

5.7 Integrazio-aldagaiaren aldaketa

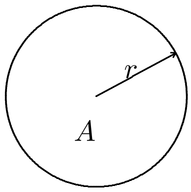
Demagun ura bare duen putzu baten harri bat botatzen dugula, Horren eraginez r erradioko zirkulu-formako uhinak sortzen dira. r baliorentzat uhinek $A(r)$ azalera dituzte, zein da $A(r)$-ren batezbestekoa $r \in [1,3]$ denean?

Batezbestekoa r-rekiko lortzen dugu:

$$\bar{A} = \frac{1}{3-1}\int_1^3 A(r)dr = \frac{\pi}{2}\int_1^3 r^2 dr \overset{F(r)=\frac{1}{3}r^3}{=} \frac{\pi}{6}\, r^3\Big|_{r=1}^{r=3} = \frac{\pi}{6}(3^3 - 1^3) = \frac{13\pi}{3}m$$

Baina, r aldagaia t denboraren menpe aldatzen da, eta $\bar{A}$ balioa denboraren arabera lortzea interesatzen zaigu. Demagun r-ren aldakuntza t-rekiko 1.5m/s dela. Aldaketak era honetan egiten baditugu:

$$\frac{dr}{dt} = 1.5 \Rightarrow r(t) = 1.5t + k$$



5.28 Irudia: Putzuan uhina

$r(0) = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow r(t) = 1.5t$

$A(t) = \pi(1.5t)^2 = 2.25\pi t^2$

$r = 3 \Rightarrow t = 3/1.5 = 2s$

$r = 1 \Rightarrow t = 1/1.5 = 0.67s$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{1}{2-0.67}\int_{0.67}^{2} A(t)dt = \frac{1}{0.33}\int_{0.67}^{2} 2.25\pi t^2 dt = \\ &= 7.5\pi \int_{0.67}^{2} t^2 dt = \frac{7.5\pi}{3} t^3 \Big|_{0.67}^{2} = 19.2\pi s \end{aligned}$$

lortzen dugun emaitza eta hasierakoa ez dira berdinak.

$$I_1 = \int_a^b y(x)dx$$

integralean $x(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ aldaketa era honetan egiten baditugu

$$I_2 = \int_\alpha^\beta y(x(t))dt,$$

orokorrean, emaitzak ez dira berdinak.

Sarritan aldagai aldaketak emaitza lortzeko kalkuluak errazten ditu eta teorema honek azaltzen digu nola egin behar den.

5.4. Teorema *$y(x)$ funtzioa jarraitua bada $[a,b]$ tartean eta aldagai aldaketa hau*

$$x = x(z), \quad z \in [\alpha, \beta], \qquad x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b$$

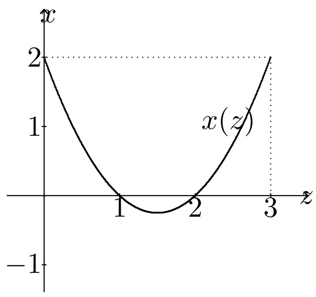
egiten dugunean $y(x(z))$ funtzioa $[\alpha,\beta]$ tartean jarraitua baldin bada, orduan

$$\int_a^b y(x)dx = \int_\alpha^\beta y(x(z))x'(z)dz$$

betetzen da.

Teoremak $x(z)$ funtzioak deribatu jarraitua edukitzea eskatzen du, bigarren integralean lortzen den funtzioa integragarria izan dadin. Integrakizunean sartzen dugun $x'(t)$ biderkagaia aurreko kasuan falta zen eta horregatik lortu ditugun emaitzak ez dira berdinak.

5.4. Adibidea Lortu $\int_0^2 xdx$ integralaren balioa $x(z) = (z-1)(z-2)$ aldagai aldaketa eta integrazio tarte ezberdinak erabiliz. (ikus (5.29) irudia)



5.29 Irudia: $x(z) = (z-1)(z-2)$

Kasu honetan integrala zuzenean erraz lor dezakegu

$$\int_0^2 xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_{x=0}^{x=2} = 2$$

Aldagai aldaketa egingo dugu orain

$$x(z) = (z-1)(z-2) = z^2 - 3z + 2, \quad x'(z) = 2z - 3, x(1) = 0, x(3) = 2$$

$$\begin{aligned}\int_1^3 (z^2-3z+2)(2z-3)dz &= \int_1^3 (2z^3-9z^2+13z-6)dz = \\ &= \left[\frac{1}{2}z^4-3z^3+\frac{13}{2}z^2-6z\right]_{z=1}^{z=3} = 2\end{aligned}$$

baina beste hau ere betetzen da $x(2)=0, x(3)=2$

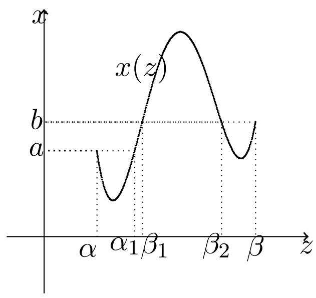
$$\int_2^3 (z^2-3z+2)(2z-3)dz = \left[\frac{1}{2}z^4-3z^3+\frac{13}{2}z^2-6z\right]_{z=2}^{z=3} = 2$$

eta beste hau $x(2)=0, x(0)=2$

$$\int_2^0 (z^2-3z+2)(2z-3)dz = \left[\frac{1}{2}z^4-3z^3+\frac{13}{2}z^2-6z\right]_{z=2}^{z=0} = 2$$

Adibide honek α eta β muga ezberdinak aukera ditzakegula adierazten digu.

(5.30) irudian adierazitako $x(z)$ aldagai aldaketa egiten dugu



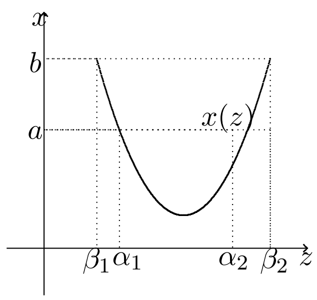
5.30 Irudia: $x(z)$ aldaketa

$$\int_a^b y(x)dx = \int_\alpha^\beta y(x(z))x'(z)dz = \int_\alpha^{\beta_1} y(x(z))x'(z)dz = \int_{\alpha_1}^{\beta_2} y(x(z))x'(z)dz = \dots$$

betetzen da.

(5.31) irudian adierazitako $x(z)$ aldagai aldaketarekin

$$\int_a^b y(x)dx = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} y(x(z))x'(z)dz$$



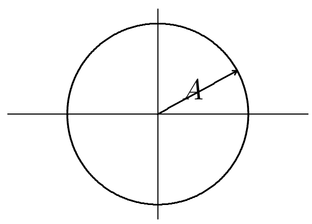
5.31 Irudia: $x(z)$ aldaketa

lortzen dugu. $\alpha_1 > \beta_1$ izanik

Beste hauek ere lortzen ditugu

$$\int_a^b y(x)dx = \int_{\alpha_1}^{\beta_2} y(x(z))x'(z)dz = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} y(x(z))x'(z)dz = \ldots$$

5.5. Adibidea (5.32) irudian dugun zirkuluaren azalera lortu.



5.32 Irudia: Zirkuluaren azalera

Zirkunferentziaren ekuazioa $x^2 + y^2 = R^2$ da, beraz $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. Azalera lortzeko

$$A = 4\int_0^R +\sqrt{R^2 - x^2}dx$$

egin behar dugu. Aldagai aldaketa hau eginez eta mugak era honetan aukeratzen badugu

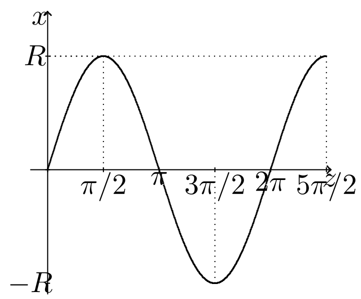
$$x = R\sin z; \quad dx = R\cos z dz, \quad \begin{array}{l} x = 0 = R\sin z \Rightarrow z = 0 \\ x = R = R\sin z \Rightarrow z = \pi/2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
A &= 4\int_0^R +\sqrt{R^2-x^2}dx = 4\int_0^{\pi/2} R^2(+\sqrt{1-\sin^2 z})\cos z dz = \\
&= 4R^2\int_0^{\pi/2} +\sqrt{\cos^2}\cos z dz = 4R^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 z dz = \\
&= 4R^2\int_0^{\pi/2}\frac{1+2\cos 2z}{2}dz = 2R^2\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2z)dz = \\
&= 2R^2\left(z+\frac{\sin 2z}{2}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=\pi/2} = 2R^2\frac{\pi}{2} = \pi R^2
\end{aligned}$$

Integrazio tartea aldatzen dugu $x = 0 \Rightarrow z = 0; x = R \Rightarrow z = \frac{5\pi}{2}$ tartea hartuz eta hau lortzen dugu:

$$\begin{aligned}
A &= 4\int_0^R +\sqrt{R^2-x^2}dx = 4\int_0^{5\pi/2} R^2(+\sqrt{1-\sin^2 z})\cos z dz = \\
&= 2R^2\left(z+\frac{\sin 2z}{2}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=5\pi/2} = \\
&= 2R^2\frac{5\pi}{2} = 5\pi R^2
\end{aligned}$$

Nola izan daiteke emaitza ez berdinak lortzea? Azkenengo integral hau azkarregi egin



5.33 Irudia: $x(z) = R\sin(z)$

dugulako. $[0\pi/2]$ tartean $\cos z \geq 0$ delako $+\sqrt{\cos^2 z} = \cos z$ betetzen da, baina $[0, 5\pi/2]$

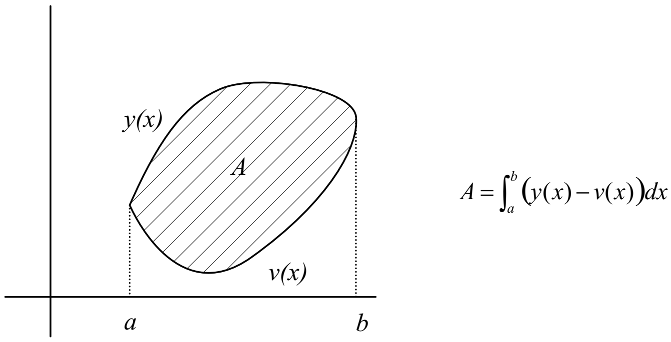
tartean $-1 \leq \cos z \leq 1$ betetzen da eta $+\sqrt{\cos^2 z} = |\cos z|$ erabili behar dugu.

$$\begin{aligned}
A &= 4\int_0^R +\sqrt{R^2-x^2}dx = 4\int_0^{\pi/2} R^2(+\sqrt{1-\sin^2 z})\cos z dz = \\
&= 4R^2\int_0^{5\pi/2} +\sqrt{\cos^2}\cos z dz \\
&= 4R^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 z dz + 4R^2\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(-\cos^2 z)dz + 4R^2\int_{3\pi/2}^{5\pi/2}\cos^2 z dz = \\
&= 4R^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 z dz - 4R^2\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(\cos^2 z)dz + 4R^2\int_{3\pi/2}^{5\pi/2}\cos^2 z dz = \\
&= 2R^2\left(z+\frac{\sin 2z}{2}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=\pi/2} + 2R^2\left(z+\frac{\sin 2z}{2}\right)\Bigg|_{z=\pi/2}^{z=3\pi/2} + 2R^2\left(z+\frac{\sin 2z}{2}\right)\Bigg|_{z=3\pi/2}^{z=5\pi/2} = \\
&= 2R^2\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{5\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)\right] = \pi R^2
\end{aligned}$$

5.8 Integralaren beste aplikazioak

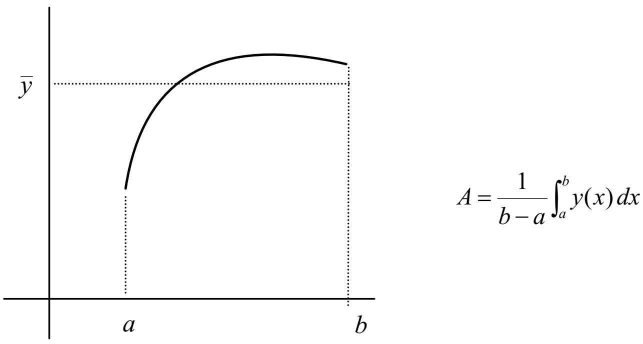
Orain arte ikusitako integralaren aplikazioak honako hauek dira:

1. $y(x)$, $x \in [a, b]$, kurbak eta OX ardatzak mugatutako azaleraren kalkulua. Posible da, ere, bi kurbek mugatutako azaleraren kalkulua (5.34 Irudia):



5.34 Irudia: Bi kurbek mugatutako azalera

2. $y(x)$, $x \in [a, b]$, funtzioaren $\bar{y}$ batezbesteko balioa (5.35 Irudia):

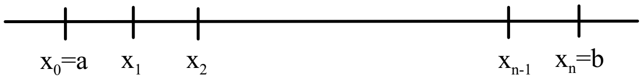


5.35 Irudia: Batezbesteko balioa

Baina hauek ez dira integralak dituen aplikazio bakarrak. 3.7 eta 5.2 ataletan esan genuenez, T balioa kalkulatzeko integralaren aplikazio bat aurkitzeko prozesua honako modu honetan labur daiteke:

1. Kalkulatu behar dugun T balioa identifikatu. T balioa $y(x)$, $[a,b]$ tarte batean jarraitua den funtzio batekin erlazionaturik egongo da.

2. $[a,b]$ tartea azpitarteetan banatu (5.36 Irudia):



5.36 Irudia: $x_k = a + kh$, $k = 0,\ldots,n$ eta $h = \frac{b-a}{n}$ dira

$z_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0,\ldots,n$ aukeratzen ditugu eta T-ren balioa honela hurbiltzen da:

$$T \approx \sum_{k=0}^{n} hy(z_k)$$

h-ren balioa geroz eta txikiagoa egiten badugu, hobea izango da lortutako hurbilketa, hau da:

$$T = \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n} hy(z_k)$$

3. Orduan,

$$T = \int_a^b y(x)dx$$

5.8.1 Biraketa gorputz baten bolumena

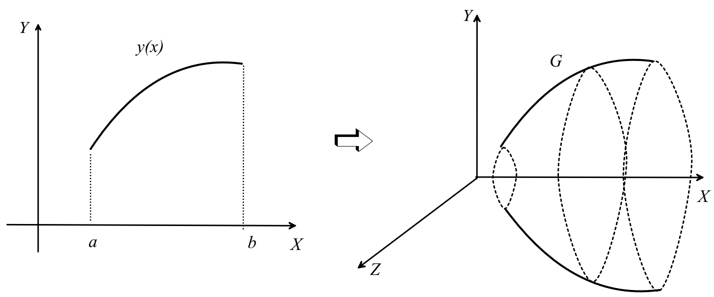
Suposa dezagun $y(x)$ $x \in [a,b]$ funtzioak definitutako kurba OX ardatzarekiko biratzen dela. Espazioan G gorputza definitzen da (5.37 Irudia).

1. $T = B = G$-ren bolumena.

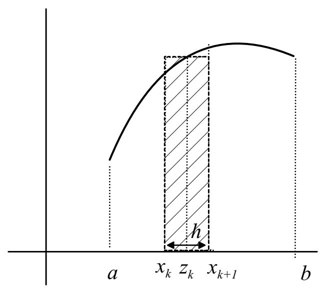
2. Har dezagun h oinarriko eta $y(z_k)$ altuerako laukizuzena (Ikus 5.38 Irudia). Laukizuzen hori OX ardatzarekiko biratzerakoan lortutako solidoa $y(z_k)$ erradioko eta h altuerako zilindro bat denez (Ikus 5.39 Irudia), bere bolumena $V_k = \pi y^2(z_k)h$ izango da.

3. Orduan, biraketa-gorputzaren bolumena honela kalkula daiteke:

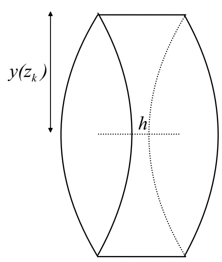
$$V = \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n} \pi hy^2(z_k) = \pi \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n} hy^2(z_k) = \pi \int_a^b y^2(x)dx$$



5.37 Irudia: Biraketa gorputza



5.38 Irudia: h oinarriko eta $y(z_k)$ altuerako laukizuzena

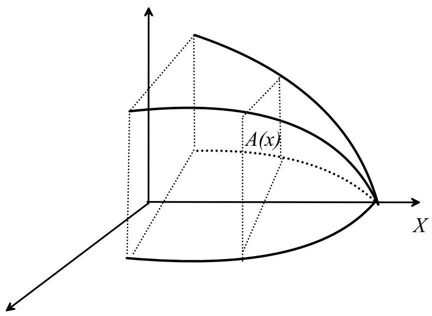


5.39 Irudia: $y(z_k)$ erradioko eta h altuerako zilindroa

5.8.2 Solido baten bolumena sekzioen azaleren bidez

Izan bedi S solidoa. Suposa dezagun S gorputza $x = konstantea$ planoarekin ebakitzerakoan lortutako sekzioaren azalera, $A(x)$, ezagutzen dugula (5.40 Irudia). Prozedura hau errepikatuz, S-ren bolumena hau izango da:

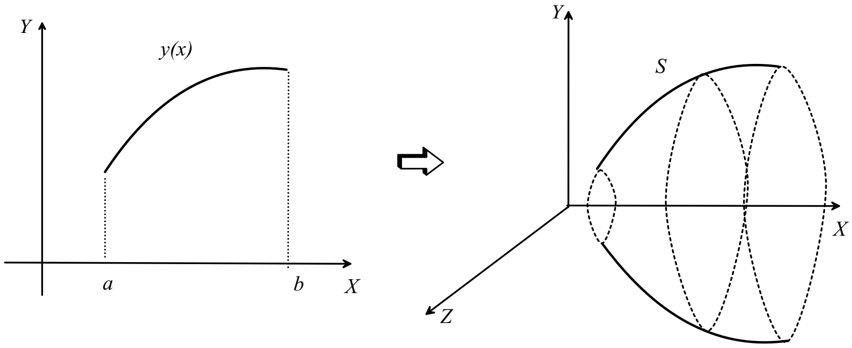
$$B = \int_a^b A(x)dx$$



5.40 Irudia: Sekzioen azalera ezaguna da

5.6. Ariketa Frogatu R erradioko eta H altuerako zilindro zirkular baten bolumena $\pi R^2 H$ dela.

5.8.3 Biraketa gainazal baten azalera



5.41 Irudia: Biraketa gainazala

Suposa dezagun $y(x)$ funtzioaren grafikoa OX ardatzarekiko biratzen dela S gainazal bat sortuz. Froga daiteke S-ren azalera, A, honela kalkula daitekeela:

$$A = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$$

Era berean, OY ardatzarekiko biratzen bada:

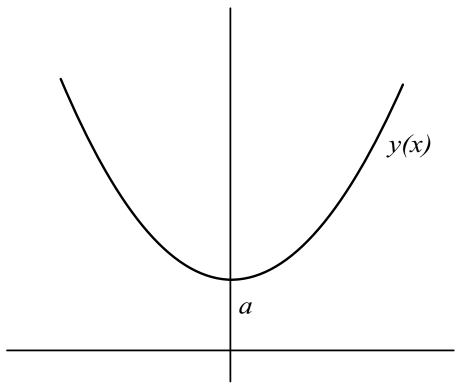
$$A = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$$

Ohartu aurreko bi adierazpenetan $y'(x)$ agertzen dela; beraz, $[a, b]$ tartean $y(x)$ deribagarria eta $y'(x)$ jarraitua izatea beharrezkoa da.

5.8.4 Kurba-arku baten luzera

Interesgarria da ere kurba-arku baten luzera ezagutzea. Adibidez, linea elektrikoko bi dorreen artean kable batek hartzen duen forma, gutxi gora behera, katenaria izeneko $y(x)$ kurba batena da (5.42 Irudia). Katenariaren ekuazioa hau da:

$$y(x) = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a} = a\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

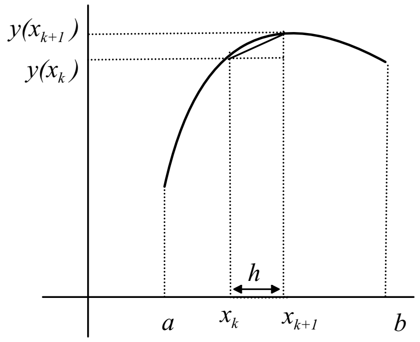


5.42 Irudia: Katenaria

Beharrezkoa den kablearen luzera kalkulatzea interesatzen zaigu.

Problema hau integral baten kalkuluaren bidez ebazteko prozesu berdina jarraituko dugu:

1. $T = L = y(x)$ $x \in [a, b]$ funtzioak definitutako kurba-arkuaren luzera.
2. $y(x)$ funtzioaren grafikoa kurba poligonal baten bidez hurbiltzen da (5.43 Irudia).



5.43 Irudia: Lerro poligonalen bidezko hurbilketa

$(x_k, y(x_k))$ eta $(x_{k+1}, y(x_{k+1}))$ puntuak lotzen dituen kurba-arkuaren gutxi beherako balioa:

$$S_k \approx \sqrt{h^2 + (y(x_{k+1}) - y(x_k))^2} = h\sqrt{1 + \left(\frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h}\right)^2}$$

Beraz,

$$S \approx \sum_{k=0}^{n-1} h\sqrt{1 + \left(\frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h}\right)^2}$$

$y(x)$ (a, b) tartean deribagarria dela suposatuz, batezbesteko balioaren teorema $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, n-1$, azpitarte bakoitzean aplikatzen diogu eta orduan:

$$\exists z_k \in (x_k, x_{k+1}) \text{ non } y'(z_k) = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S \approx \sum_{k=0}^{n-1} h\sqrt{1 + (y'(z_k))^2}$$

3. $$S = \lim_{h \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} h\sqrt{1 + (y'(z_k))^2} = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$$

Ohartu $y'(x)$ $[a,b]$ tartean jarraitua bada ziurtatuta daukagula S-ren balioaren existentzia.

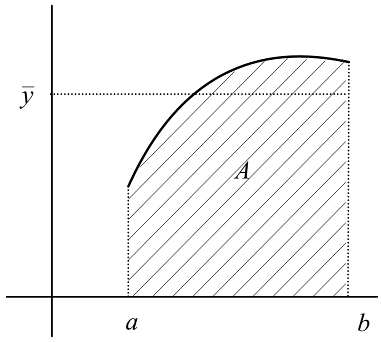
5.9 Integral ezpropioa

Izan bedi $y(x)$ $[a,b]$ tartean jarraitua den funtzio bat, badakigu tarte horretan $y(x)$ funtzioaren batezbesteko balioa horrela kalkula daitekeela:

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)dx$$

Gainera, $[a,b]$ tartean $y(x) \geq 0$ bada, funtzioaren grafikoak mugatutako azaleraren balioa (5.44 Irudia) modu honetan kalkula daiteke:

$$A = \int_a^b y(x)dx$$



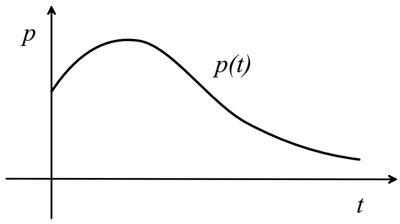
5.44 Irudia: $y(x)$ funtzioak mugatutako azalera

Batzuetan, interesgarria izan daiteke ere $\bar{y}$ eta A-ren balioen azterketa epe luzean, hau da, tartearen eskuineko muga b handitzen denean. Adibidez, $p(t)$ gelditzen ez den makina baten prestazioen neurri bat izan daiteke (5.45 Irudia).

$\bar{p}$-ren balioaren aldaketa epe luze batean aztertu nahi dugu. “Epe luzea” modelizatu daiteke $t \to \infty$ konbergentziaren kontzeptua erabiliz.

$p(t)$-ren batezbesteko balioa $[0,\infty)$ tartean honela kalkula daiteke:

$$\bar{p}[0,\infty) = \lim_{c\to\infty} \bar{p}[0,c] = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{c-0}\int_0^c p(t)dt$$



5.45 Irudia: $p(t)$ funtzioaren aldaketa

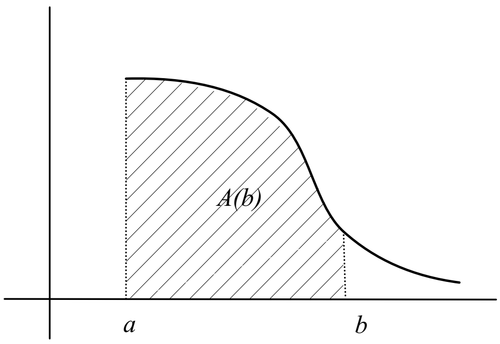
Horretarako beharrezkoa da $p(t)$ funtzioa $[0, c]$, $c > 0$, tarte guztietan integragarria izatea.

Era berdinean defini dezakegu $y(x)$ $[a, \infty]$ tartean jarraitua den funtzio baten integrala:

$$\int_a^\infty = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Beraz, ideia honako hau da:

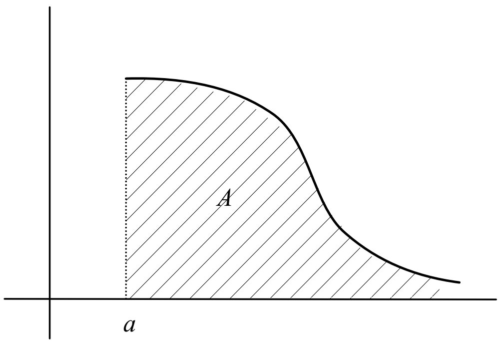
1. Kalkulatu $A(b) = \int_a^b y(x)dx$, $b > a$ (5.46 Irudia).



5.46 Irudia: Eremu mugatuaren azalera

2. $\lim_{b\to\infty} A(b)$ existitzen den aztertu. Baina, konbergentzia hori posible al da?

Muga gabeko eremu baten azalera finitua izan daiteke?
$A = \int_a^\infty y(x)dx$ integralaren balioa (5.47 Irudia) finitua izan daiteke?

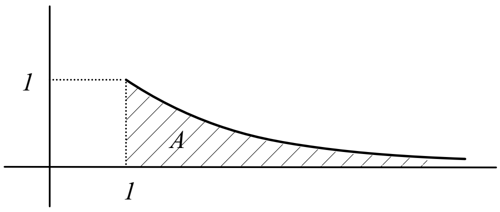


5.47 Irudia: Eremu infinituaren azalera

5.6. Adibidea (5.48 Irudia)

$$A = \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln x|_{x=1}^{x=b} = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$$

Dibergentea da.



5.48 Irudia: 5.6 adibideko irudia

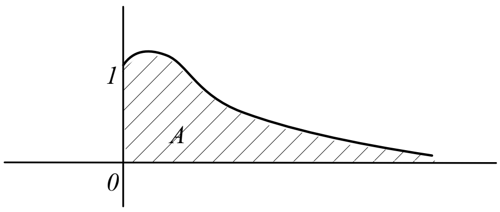
5.7. Adibidea (5.49 Irudia)

$$A = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \text{arctg}(b) = \frac{\pi}{2}$$

Konbergentea da.

Beraz, muga gabeko eremu baten azalera finitua izan daiteke. Harrigarria ez?

$y(x)$ funtzioaren integrala $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$ edo $(-\infty,\infty)$ eremu batean *integral ezpropioa* deitzen da.



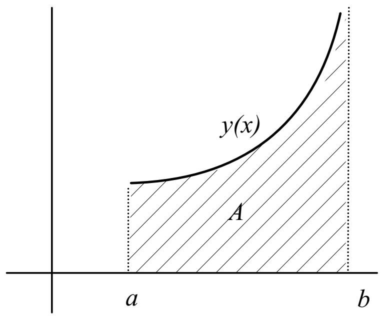
5.49 Irudia: 5.7. adibideko irudia

5.7. Ariketa Honako kontzeptu hauek definitu:

$$\int_{-\infty}^{b} y(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} y(x)dx$$

Definizioek zentzua izateko beharrezkoak diren baldintzak azaldu.
Adibide batean aplikatu.

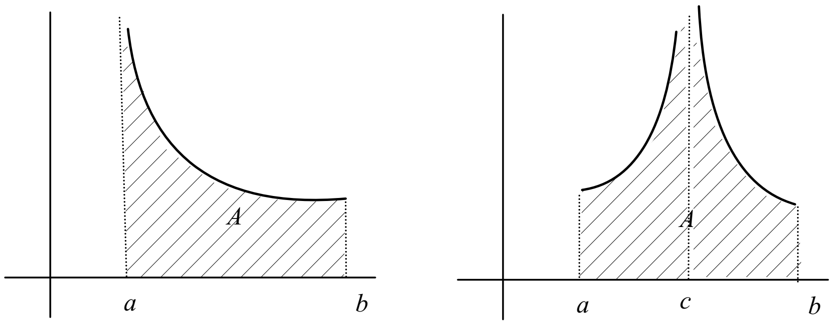
5.8. Ariketa Suposa dezagun $y(x)$ funtzioa $[a, b)$ tartean jarraitua dela eta $x = b$ puntuan portaera asintotikoa dela (5.50 Irudia).



5.50 Irudia: Asintota $x = b$ puntuan

Orduan, $\int_a^b y(x)dx$ ez dago definituta eta ezin da Barrow-en erregela aplikatu.

Ariketa honen helburua $\int_a^b y(x)dx$ integralaren balioa definitzea da. Integrala definitu ere $y(x)$ funtzioaren asintota tartearen a mugan eta $c \in (a, b)$ puntuan dagoeneko kasuetan (5.51 Irudia).



5.51 Irudia: Asintota beste puntuetan

Definizio hau aplikatuz, integral hau kalkulatu:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

5.10 Zenbakizko integrazioa

Dakizuenez, *Newton-Leibniz*-en formula $y(x)$ $[a,b]$ tartean jarraitua den funtzio baten integrala kalkulatzeko bidea ematen digu.

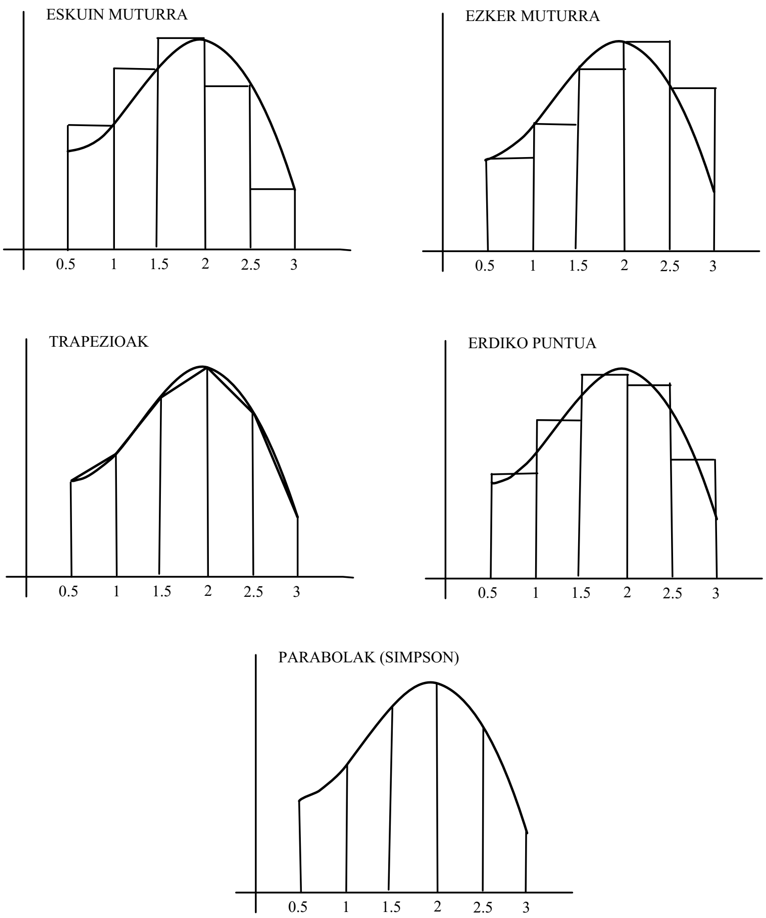
$$\int_a^b y(x)dx = F(b) - F(a), \text{non } F'(x) = y(x)$$

Baina $F(x)$ jatorrizko funtzioaren kalkulua oso neketsua izan daiteke $y(x)$ funtzioaren adierazpena zaila bada. Gainera, batzuetan ez da existitzen oinarrizko jatorrizko funtzioa bat, adibide hauetan gertatzen den bezala:

$$y(x) = \frac{\cos x}{x} \qquad y(x) = \sin x^2 \qquad y(x) = e^{x^2}$$

Kasu hauetan *zenbakizko integrazio metodoak* erabiltzen dira integralaren balio hurbildu bat kalkulatzeko. $y(x)$ hurbiltzeko $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, n-1$, tartean hartutako balioa zein den arabera, askotariko zenbakizko integrazio eskemak daude. 5.52 Irudian hauetako eskema batzuk agertzen dira.

Nabaritu lehenengo lau eskemetan $y(x)$ funtzioaren hurbilketa zuzenen bidez egiten dela. Simpson-en metodoak, berriz, tarte bakoitzean parabola bat erabiltzen du. Simpson-en erregela honako hau da:



5.52 Irudia: Integratzeko eskemak

1. Izan bedi $y(x)$ $[a,b]$ tartean jarraitua den funtzioa. $[a,b]$ tartean honako $2n+1$ puntu hauek hartzen ditugu:

$$x_k = a + kh, \quad h = \frac{b-a}{2n} \quad k = 0, \ldots, 2n$$

2. Kalkulatu:

$$S_0 = y(x_0) + y(x_{2n})$$
$$S_1 = y(x_1) + y(x_3) + \cdots + y(x_{2n})$$
$$S_2 = y(x_2) + y(x_4) + \cdots + y(x_{2n-2})$$

3. Hurbilketa hau da:

$$\int_a^b y(x)dx \approx \frac{h}{3}(S_0 + 4S_1 + 2S_2)$$

4. $[a, b]$ tartean $y^{iv}(x)$ jarraitua existitzen bada, azaltzen den erroreak, E, ondorengo erlazioa betetzen du:

$$|E| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot \max\left|y^{iv}(x)\right| \quad a \leq x \leq b$$

$y^{iv}(x)$ $[a, b]$ tartean jarraitua denez, Weierstrass-en teoremak $[a, b]$ tartean mugatua dela esaten digu eta, ondorioz, errorearen muga:

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot \max\left|y^{iv}(x)\right|$$

0-rantz jotzen du $n \to \infty$ doanean.

Orduan, hurbilketa kalkulatzerakoan nahi dugun zehaztasuna lor dezakegu n behar den bezain handia harturik.

5.8. Adibidea 5.53 irudian $y(x) = x \sin x$ eta y^{iv} $x \in [a, b]$ funtzioen grafikoak azaltzen dira.

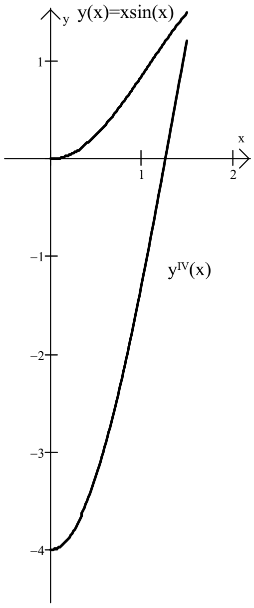
$\int_0^{1.5} x \sin x$ integrala kalkulatzeko Simpson-en erregela aplikatzen badugu, $2n + 1$ puntu harturik, errorearen borne bat ($\left|y^{iv}\right| \leq 4$ denez):

$$|E| \leq \frac{(1.5)^5}{180n^4} \cdot \max\left|y^{iv}(x)\right| \leq \frac{0.042}{n^4} \cdot 4 \Rightarrow |E| \leq \frac{0.17}{n^4}$$

Orduan, adibidez, $|E| \leq 10^{-5}$ bete dadin:

$$\frac{0.17}{n^4} < 10^{-5} \Rightarrow n \geq 12$$

eta Simpson-en erregela aplikatuko dugu $2n + 1 = 25$ puntu erabiliz.



5.53 Irudia: 5.8 adibideko irudia

Erregela honen bidez kalkulatutako integralaren balio hurbildua $S = 0.89139$ dela froga daiteke.

Beraz, integralaren balio zehatza I bada:

$$|E| \leq 10^{-5} \Leftrightarrow |I - S| \leq 10^{-5} \Rightarrow -10^{-5} \leq I - S \leq 10^{-5} \Leftrightarrow S - 10^{-5} \leq I \leq S + 10^{-5}$$

$$\Leftrightarrow 0.89138 \leq \int_0^{1.5} x \sin x \leq 0.8914$$

5.11 $y(x)$-ren jatorrizko funtzioen kalkulua

Integrala kalkulatzeko Newton-Leibniz-en formula ikusi ondoren interesgarria izango da $y(x)$ funtzio bat emanik $F'(x) = y(x)$ betetzen duen, $F(x)$, funtzio bat, aurkitzeko metodoak aztertzea.

$F(x)$ funtzio guzti hauen multzoari *integral mugagabea* deitzen zaio eta honela adierazten da:

$$\int y(x)dx = F(x) + K, \quad K \in \mathbb{R}, F'(x) = y(x)$$

Ikus ditzagun oinarrizko metodo batzuk:

5.11.1 Integralen taula

Integratzailea identifikatu ondoren, berehalako integrazioa (Ikus 5.3 taula) aplikatuko dugu.

5.9. Adibidea

$$\int x \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int 2x \sin x^2 dx \overset{(*)}{=} -\frac{1}{2}\cos x^2 + K$$

$$(*) \quad \int y'(x) \sin y(x) dx = -\cos y(x) + K$$

5.11.2 Zatikako integrazioa

$u(x)$ eta $v(x)$ funtzioak deribagarriak badira:

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u'v + uv' \Rightarrow \int \frac{d}{dx}(u \cdot v)dx = \int u'vdx + \int uv'dx$$

$du = u'dx$ eta $dv = v'dx$ adierazten:

$$u \cdot v = \int vdu + \int udv \Leftrightarrow$$

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

Azkeneko adierazpen honi *zatikako integrazioa* deitzen zaio eta

$$\int udv \quad (1)$$

integralaren balioa kalkulatzen du

$$\int vdu \quad (2)$$

integralaren balioaren menpe.

u eta v funtzioen aukera egokia bada, batzuetan (2) integrala (1) baino errazagoa da.

Berehalako Integralen Taula

1.- $\int a dx = a \int dx = ax + K$

2.- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K$, $n \neq -1$ bada

3.- $\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + K$, $n \neq -1$ bada

4.- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln[f(x)] + K$

5.- $\int e^x dx = e^x + K$

6.- $\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + K$

7.- $\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + K$ $a > 0$ eta $a \neq 1$ bada

8.- $\int \sin x dx = -\cos x + K$

9.- $\int \sin[f(x)] f'(x) dx = -\cos[f(x)] + K$

10.- $\int \cos x dx = \sin x + K$

11.- $\int \cos[f(x)] f'(x) dx = \sin[f(x)] + K$

12.- $\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]} dx = \mathrm{tg}[f(x)] + K$

13.- $\int \frac{f'(x)}{\sin^2[f(x)]} dx = -\mathrm{ctg}[f(x)] + K$

14.- $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = \arcsin[f(x)] + K$

15.- $\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = \arccos[f(x)] + K$

16.- $\int \frac{-f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \mathrm{arctg}[f(x)] + K$

5.3 Taula: Berehalako integralak

5.10. Adibidea

$$\int xe^x dx \stackrel{(*)}{=} xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + K$$

$(*)$ $u = x \quad du = dx$
$dv = e^x dx \quad v = e^x$

5.11.3 Aldagai-aldaketa

Metodo hau $x = h(u)$ aldaketa aplikatzean datza, non h deribagarria eta bere deribatua h' jarraitua izatea beharrezkoa den:

$$\int y(x)dx = \int y(h(u)) \cdot h'(u)du$$

5.11. Adibidea

$$\int x\sqrt{x-1}dx \stackrel{(*)}{=} \int (1+u^2)u \cdot 2udu = 2\int (u^4+u^2)du =$$
$$= \frac{2}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^3 + K \stackrel{(**)}{=} \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + K$$

$(*)$ $x - 1 = u^2 \Rightarrow x = u^2 + 1 = h(u)$
$h'(u) = 2u$

$(**)$ $u = \sqrt{x-1}$

5.11.4 Funtzio trigonometriko batzuen integrazioa

Integral hauek formula trigonometrikoak eta aldagai-aldaketak erabiltzen ebazten dira.

5.12. Adibidea

$$\int \sin 3x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int (\sin(3+5)x + \sin(3-5)x)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int \sin 8x dx - \int \sin 2x dx\right) = -\frac{1}{16}\cos 8x + \cos 2x + K$$

5.13. Adibidea

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + K$$

5.14. Adibidea

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{2+\cos x} = \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{2+\cos x} \overset{(*)}{=} -\int \frac{(1-z^2)dz}{2+z} = \int \left(z - 2 + \frac{3}{z+2}\right) dz =$$
$$= \frac{1}{2}z^2 - 2z + 3\ln|z+2| + K = \frac{1}{2}\cos^2 x - 2\cos x + 3\ln|\cos x + 2| + K$$

$(*)$ $\cos x = z$
$\sin x dx = -dz$
$\sin^x = 1 - z^2$

5.11.5 Funtzio arrazionalen integrazioa

$P(x)$ eta $Q(x)$ bi polinomio izanik, honako integral hau kontsideratzen da:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Metodo honekin $\frac{P(x)}{Q(x)}$ beste frakzioen arteko baturan deskonposatzen da, hauen integralak errazagoak izanik.

$P(x)$-ren gradua $Q(x)$-rena baino handiagoa edo berdina bada, lehenik polinomioen arteko zatidura kalkulatuko dugu.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$P(x)$ polinomioaren gradua $Q(x)$-rena baino txikiagoa bada, $Q(x)$-ren erroak kalkulatuko ditugu eta, erroen arabera, frakzioetan deskonposaketa modu desberdinetan kalkulatzen da:

1. kasua: Erro erreal bakunak.

5.15. Adibidea

$$\int \frac{P(x)dx}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_1 \neq \alpha_2$$

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} = \frac{A}{(x-\alpha_1)} + \frac{B}{(x-\alpha_2)} \Rightarrow A \text{ eta } B \text{ lortu}$$

2. kasua: Erro erreal anizkoitzak.

5.16. Adibidea

$$\int \frac{P(x)dx}{(x-\alpha)^n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^n} = \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-\alpha)^n} \Rightarrow A_1, A_1, \ldots, A_n \text{ lortu}$$

3. kasua: Erro konplexuak.

5.17. Adibidea

$$\int \frac{P(x)dx}{(ax^2+bx+d)(x-\alpha)^2}, \quad ax^2+bx+d \text{ polinomioaren erroak konplexuak izanik}$$

$$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+d)(x-\alpha)^2} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+d} + \frac{E}{(x-\alpha)} + \frac{F}{(x-\alpha)^2} \Rightarrow A, B, E \text{ eta } F \text{ lortu}$$

5.12 Laburpena

$[a, b]$ tartean $y(x)$ funtzioaren integral mugatuaren kontzeptua $y(x)$-ren portaera aztertzeko beste bide bat da.

Gai honetan ikusi ditugun integralaren aplikazioak: batezbesteko balioa, kurba batek mugatutako azalera, arku baten luzera,... ez dira kalkulu integralaren ingeniaritzarako aplikazio guztiak, beste asko daude.

Gainera, integralaren kontzeptua oso "merkea" dela esan dezakegu: $y(x)$ funtzioa jarraitua bada $[a, b]$ tartean, honez gero existitzen da integral mugatua

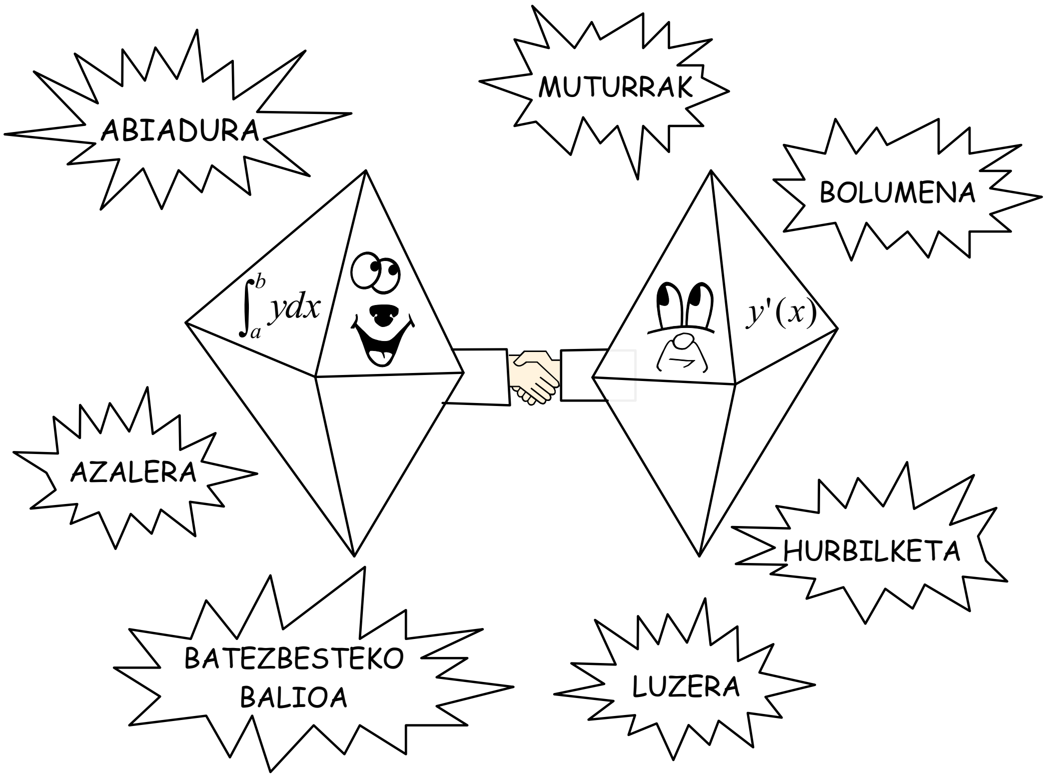
$$\int_a^b y(x)dx$$

Beste aldetik, deribatua eta integralaren arteko oso erlazio garrantzitsua lortu dugu:

$$\int_a^b y(x)dx = F(b) - F(a) \quad \text{non } F'(x) = y(x) \text{ den}$$

Beraz, integralaren kontzeptua "bitxi matematiko" berri bat bezala kontsideratzeko arrazoiak ditugu.

Hurrengo gaietan Ingeniaritzan agertzen diren problemak ebazteko erabilitako beste kontzeptuak ikasiko ditugu, eta guztien atzean integralaren kontzeptua egongo da.



5.9. Ariketa Laburtu integralaren kontzeptuarekin erlazionaturik dauden emaitza garrantzitsuenak. Emaitza hauek aurreko gaietan agertu diren beste kontzeptuekin erlazionatu.