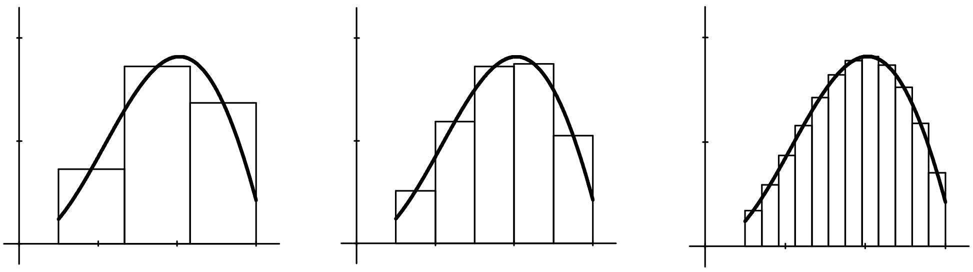
5. Kapitulua

Integrazioa

Oharra: ikurrarekin markatutako ariketak ebazteko komenigarria izango da funtzioen adierazpen grafiko eta zenbakizko kalkulurako programa informatiko bat erabiltzea, Winplot adibidez.

5.1. $y(x)$ $[a,b]$ tartean jarraitua den funtzio baten integrala definitzeko ondorengo prozesua jarraitu dugu (Ikus 5.1 irudia):



5.1 Irudia: Integralak kalkulatzeko prozedura.

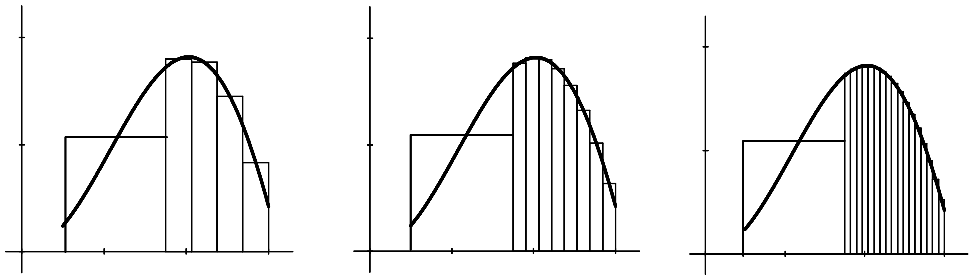
- $[a,b]$ tartea azpitarteetan banatu $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, n-1$, non x_k eta x_{k+1}-en arteko distantzia $h = (b-a)/n$ den.
- Kalkulatu $T(h) = \sum_{k=0}^{n} hy(z_k)$, $z_k \in [x_k, x_{k+1}]$. $y(x) \geq 0$ bada, $T(h)$ gutxi gora behera $y(x)$, $x \in [a,b]$ kurbak eta OX ardatzak mugatutako A azalera da.
- h 0-rantz aldatzen denean, $T(h)$ geroz eta gehiago hurbiltzen da A-ren baliora. Beraz:

$$\lim_{h \to 0} T(h) = \int_a^b y(x)dx = A$$

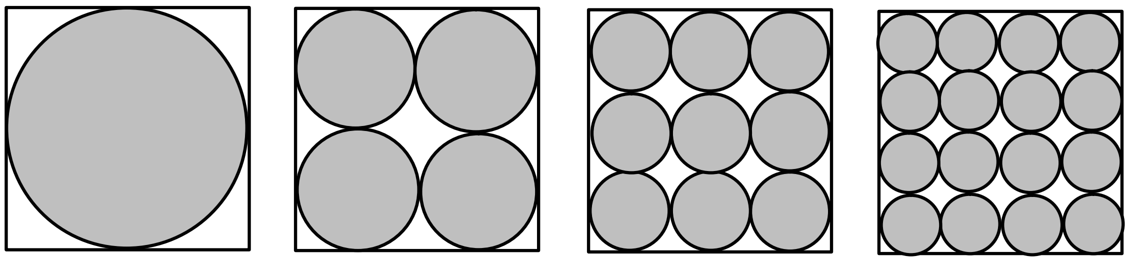
Baina, lor al daiteke konbergentzia azaleraren A baliorantz $[a,b]$ tartea beste modu batean ebakitzen bada? Ondorengo bi egoera aztertu eta ondorioak atera:

a) Kasu guztietan lehenengo tartea $[a,(a+b)/2]$, $[a,b]$ tarteko ezkerreko erdia, hartzen dugu. Beste erdia $[(a+b)/2, b]$ luzera berdineko tarteetan banatzen da. (Ikus 5.2 irudia)

b) Karratu baten azalera zirkuluen bidez hurbiltzen dugu (Ikus 5.3 irudia). Hurbilketak geroz eta zehatzagoak al dira?



5.2 Irudia: Lehenengo tartea berdina.



5.3 Irudia: Zirkuluen bidezko hurbilketa.

5.2. Kalkulatu $y(x)$ funtzioaren batezbesteko balioa $[0, c]$ tartean.

$$y(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \text{ bada} \\ 1 & x > 1 \text{ bada} \end{cases}$$

Aztertu bateztesteko balio honen gorapena eta bere konbergentzia c infiniturantz doanean.

5.3. Ondorengo baieztapena baiezkoa den ala ez azaldu: "Suposa dezagun $y(x)$ funtzioa $\mathbb{R}$-n jarraitua dela bere integrala $[a, b]$ edozein tartean nulua izanik. Orduan, $y(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$".

5.4. Izan bitez $y(x)$ eta $u(x)$ lehenengo bi deribatuak jarraituak dituzten bi funtzio non x guztientzat $y(x) \leq u(x)$ betetzen den. Hauetako zein baieztapenak dira egiazkoak?

a) x guztientzat $y'(x) \leq u'(x)$.

b) x guztientzat $y''(x) \leq u''(x)$.

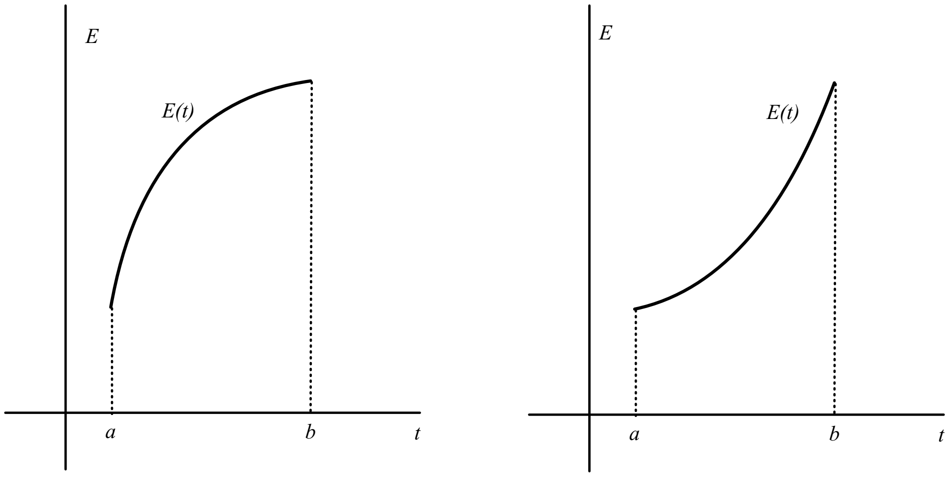
d) $[a, b]$ tarte guztientzat $\int_a^b y(x)dx \leq \int_a^b u(x)dx$

5.5. Izan bedi $y(x)$ $[0, 2]$ tartean jarraitua den eta $2 \leq y(x) \leq 4$ betetzen duen funtzio bat. $y(x)$ funtzioaren batezbestekoaren balioa bornatu.

5.6. Ondorengo balioetatik, zeintzuk ez dira nuluak?

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x dx$ **b)** $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx$ **d)** $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos x dx$ **e)** $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x dx$ **f)** $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx$

5.7. 5.4 irudian agertzen diren grafikoetan bi ibilgailuek $[a, b]$ denborako epean ibilitako espazioa, $E(t)$, adierazten da.



5.4 Irudia: 5.7 ariketako grafikoak

Eskatzen da:

a) Kasu bakoitzean, azelerazioa positiboa ala negatiboa izan da?

b) Suposa dezagun ibilgailu baten abiadura $t = a$ momentuan 70Km/ordu zela eta $t = b$-n 40Km/ordu. Bestearen abiadura $t = a$-n 12Km/ordu eta $t = b$-n 35Km/ordu izan zen. Grafiko bakoitza dagozkion datuen bikotearekin erlazionatu.

d) Datu-pare bakoitza bere grafikoan adierazi.

e) Ibilgailuak 15 segunduetan zirkulatzen badira, zein da bakoitzaren batezbesteko azelerazioa?

5.8. Lortu honqako funtziioa hauen batezbesteko balioa $[0, 1]$ tartean:

$$y(x) = x, \quad y(x) = x^2, \quad y(x) = x^3$$

Emaitza zabaldu tarte berdinean $y(x) = x^n$ funtzioaren batezbesteko balioa lortzeko. Zer esan dezakegu batezbesteko balio honi buruz n geroz eta handiagoa egiten denean? Azal daiteke emaitza hau $y(x) = x^n$ funtzioaren grafikotik abiatuz?

5.9. Lortu honqako funtziioa hauen batezbesteko balioa $[0, 1]$ tartean:

$$y(x) = x^{1/2}, \quad y(x) = x^{1/3}$$

Emaitza zabaldu tarte berdinean $y(x) = x^{1/n}$ funtzioaren batezbesteko balioa lortzeko. Zer esan dezakegu batezbesteko balio honi buruz n geroz eta handiagoa egiten denean? Azal daiteke emaitza hau $y(x) = x^{1/n}$ funtzioaren grafikotik abiatuz?

5.10. Kalkulatu ondorengo funtzioen batezbesteko balio adierazitako tarteetan:

a) $y(x) = x$ $[-1, 1]$ tartean.

b) $y(x) = x^3 - x$ $[-1, 1]$ tartean.

d) $y(x) = \sin x$ $[-\pi, \pi]$ tartean.

e) Zergatik izan da hain erreza batezbesteko balio hauen kalkulua? Orokor dezakezu emaitza hau?

5.11. Suposa dezagun $5x^3 + 40 = \int_a^x y(z)dz$ betetzen dela. Kalkulatu $y(x)$ eta a-ren balioa. Zer baldintzak izan dira beharrezkoak?

5.12. $G(x) = \int_0^x \sqrt{16 - z^2}dz$ bada, kalkulatu: $G(x)$ funtzioaren eremua, $G'(x)$, $G(4)$ eta $G(-4)$. Zer esan nahi dute $G(4)$ eta $G(-4)$ balioek? Orokortu emaitza hau.

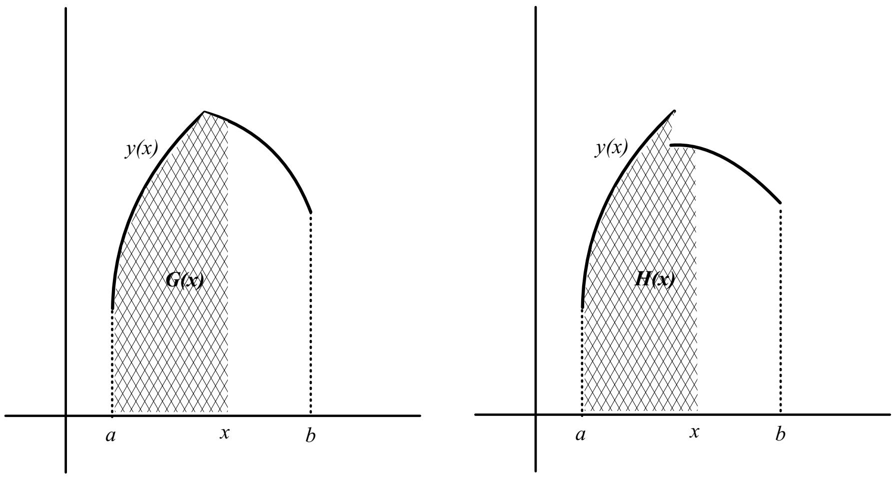
5.13. $G(x) = \int_0^{x^3} e^{z^2}dz$ bada, $G(x)$ deribagarria dela frogatu, $G'(x)$ kalkulatu, eta $G(x)$ funtzioaren gorapena aztertu. Orokortu emaitza hau.

5.14. Kalkulu Infinitesimako Oinarrizko Teoremak esaten digunez, $y(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua bada, orduan $G(x)$:

$$G(x) = \int_a^x y(z)dz$$

deribagarria da (a,b) tarte osoan eta $G'(x) = y(x)$ nahiz eta $y(x)$ funtzioa (a,b) tartean deribagarria ez izan. Beraz, integrazioaren bidez, jarraitua baizik ez den $y(x)$ funtzio batetik $G(x)$ funtzio deribagarri bat lor dezakegu.

Beste kasuetan, integrazioaren bidez eraiki dezakegu ere $H(x)$ funtzio jarraitu bat $y(x)$ jarraitua ez den funtzio batetik. Eskatzen da:



5.5 Irudia: 5.14 ariketako irudia

a) $H(x)$ balioaren esanahia azaldu 5.5 irudiaren arabera. Uste al duzu $H(x)$ funtzioa jarraitua dela? Zergatik?

b) Izan bedi $y(x)$ ondorengo funtzio etena:

$$y(x) = \begin{cases} p & 0 \leq x \leq 1 \text{ bada} \\ q & 1 < x \leq 2 \text{ bada} \end{cases} \qquad (p \neq q)$$

Eraiki, integrazioaren bidez, $H(x)$ funtzio jarraitu bat. Gero, $H(x)$ funtzioari aplikatutako prozedura erabiliz $G(x)$ funtzio deribagarri bat eraiki. Funtzio hauek grafikoki adierazi.

5.15. 180m-ko dintantzi batera kokatuta dauden bi goi-tentsio dorreen artean kable bat zintzilikatu nahi da. Kableko puntu baxuena 100m-ko altueran egon behar da behean dauden etxeetako teilatuekin seguntasun-distantzia mantentzeko. Kableak hartzen duen forma adierazteko $y(x) = a\,ch(x/a)$ funtzio erabiliz, kalkulatu:

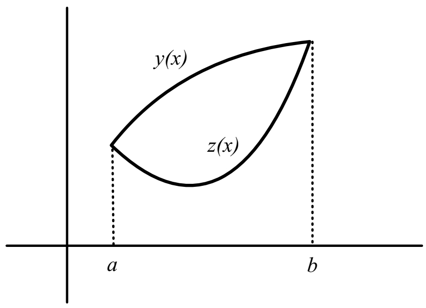
a) Kurbaren a parametroa.

b) Kablearen luzera.

d) Dorreen altuera.

e) Emaitza orokortu. $2d$ distantziara kokatuta dauden altuera berdineko bi dorreen artean zintzilikatutako a parametroko katenariaren arku baten luzera kalkulatu.

5.16. Izan bedi D $y(x)$ eta $z(x)$ funtzioen grafikoek mugatutako eremu laua (Ikus 5.6 irudia).



5.6 Irudia: 5.16 ariketako irudia

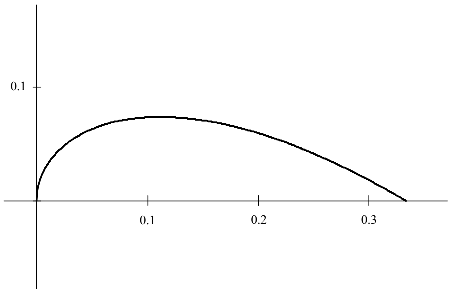
Suposa dezagun D eremua OX ardatzarekiko biratzen dela. Eskatzen da:

a) Lortutako biraketa-gainazalaren azalera kalkulatu.

b) Lortutako biraketa-gorputzaren bolumena kalkulatu.

d) Emaitza hauek aplikatu D Ox ardatzaren gainetik kokatuta dagoen zirkulu bat deneko kasuan.

5.17. Bonbilla baten beirazko azala $y(x) = \frac{1}{3}x^{1/2} - x^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 1/3$ funtzioaren grafikoa OX ardatzarekiko biratuz simulatu behar dugu (Ikus 5.7 irudia). Bonbilla bakoitzak behar duen beirako kantitatea kalkulatu, lodiera 0.5mm-koa dela jakinik.



5.7 Irudia: 5.17 ariketako irudia

5.18. Dakigunez, objetu bat F indar konstante baten eraginaz D distantzia zuzen bat mugitzen bada, orduan, F indarrak egindako T lana $T = FD$ berdintza betetzen du. Suposa dezagun orain objetua mugitzen dela, baina aldakor eta jarraitua den $F(x)$ indar baten eraginaz, x posizioa izanik. F-k egindako T lana kalkulatu. Emaitza ondorengo egoeretan aplikatu:

a) Malguki bat tiratzeko edo konprimatzeko beharrezkoa den F indarra pausagune-posizioarekiko desplazamenduarekin proportzionala da. Suposa dezagun malgukiaren luzera pausagunean 0.25m-koa dela, eta 0.05m konprimatzeko 3N-ko indar bat aplikatu behar dela ($N = Kg \cdot m/seg^2$). Indarrak egindako lana kalkulatu. 3cm gehiago konprimatzeko indarrak egindako lana kalkulatu.

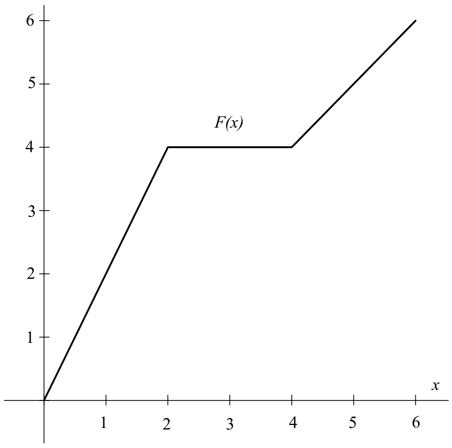
b) Suposa dezagun F indar batek objetu bat $x = 0$ puntutik $x = 6$ puntura mugitzen duela. 5.8 irudian F-ren grafikoa adierazten da. F-k egindako $T(x)$ lana kalkulatu, x ibilbidearen edozein puntu izanik.

d) $F(x)$ indarraren batezbesteko balioa egindako lanarekin erlazionatu.

5.19. Suposa dezagun L $y(x)$ funtzio deribagarriak adierazitako kurbaren luzera dela:

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}} dx$$

Lor daiteke $y(x)$ funtzioa? Zer baldintzak beharko genituzke $y(x)$ lortu ahal izateko? L-ren balio hurbildua kalkulatu errorea bornatuz.



5.8 Irudia: 5.18 ariketako irudia

5.20. Ondorengo ataletan kurba batek OX ardatzarekiko biratzerakoan sortutako gorputzaren bolumena agertzen da. Kasu bakoitzean dagokion $y(x)$ funtzioa lortu eta biraketa-gorputza marraztu:

$$\textbf{a)}\ \pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx \quad \textbf{b)}\ \pi \int_0^h r^2 dx \quad \textbf{d)}\ \pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx \quad \textbf{e)}\ \pi \int_{-b}^{b} 1 - \frac{x^2}{b^2} dx$$

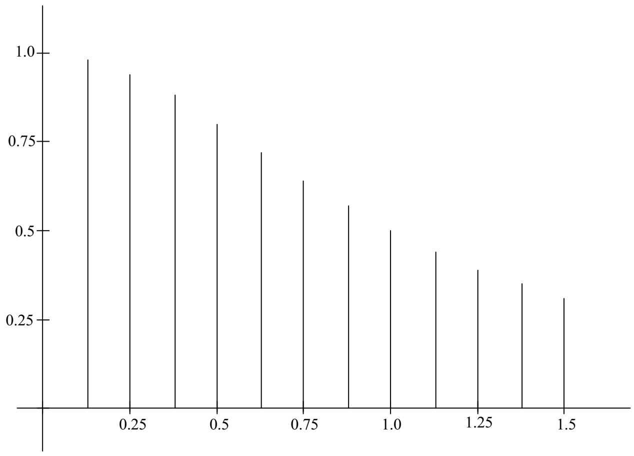
5.21. 5.9 irudian eta 5.1 taulan $y(x)$ funtzioaren 13 balio azaltzen dira. Suposa dezagun kurba OX ardatzarekiko biratzen dela. Sortutako gorputzaren bolumenaren balio hurbildua kalkulatu.

x	0.00	0.13	0.25	0.38	0.50	0.63	0.75	0.88	1.00	1.13	1.25	1.38	1.50
y	1.00	0.98	0.94	0.88	0.80	0.72	0.64	0.57	0.50	0.44	0.39	0.35	0.31

5.1 Taula: 5.21 ariketako balioen taula

5.22. Ondorengo integralaren balioa eztabaidatu, r parametro erreal bat izanik:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^r}$$



5.9 Irudia: 5.21 ariketako grafikoa

5.23. Kalkulatu:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

5.24. Kalkulatu:

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$ 3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$ 5) $\displaystyle\int x^2 \ln x dx$ 6) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$

7) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{xdx}{\sin^2 x}$ 8) $\displaystyle\int x2^{-x} dx$ 9) $\displaystyle\int \frac{(5-x)dx}{x^2-1}$

10) $\displaystyle\int \frac{(4x^2-4x-3)dx}{(x^2+1)(x-2)}$ 11) $\displaystyle\int \frac{(3x^2-4x+6)dx}{(x-1)^3}$ 12) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$

13) $\int \sin 4x \cos 2x dx$ 14) $\int_0^{\pi} \sin 5x \sin 3x dx$ 15) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$

16) $\int \sin^4 5x dx$ 17) $\int x(5x^2 - 3)^{26} dx$ 18) $\int_0^4 \frac{(1+x)}{1+\sqrt{x}} dx$

19) $\int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx$ 20) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{arctg} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$