4. Kapitulua

Aldagai errealeko funtzio errealen azterketa lokala

4.1 Zeintzuk dira ebatzi ez ditugun problemak?

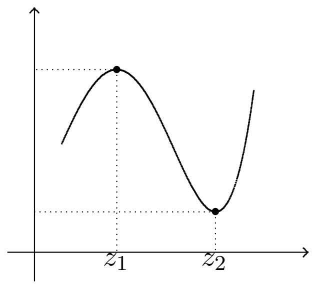
Hirugarren gaian funtzio baten izaerari buruz asko aurreratu dugu. Ikusi dugu, $y(x)$ funtzioak $x = a$ puntuan limitea baldin badu, zer nolako propietateak betetzen ditu, beste propietate, $y(x)$ funtzioa jarraitua baldin bada, beste batzuk $y(x)$ funtzioa $[a, b]$ erako eremuan definituta dagoenean eta azkenik propietate asko $y(x)$ deribagarria denean.

Hori egiteko, gero eta baldintza (hipotesi) gehiago eskatu dizkiogu $y(x)$ funtzioari. Baldintza gehiago eskatzeak baliogarriak diren funtzioen multzoa murriztea dakar. Adibidez, ezin dugu $y(x)$ funtzioaren azterketa $y'(x)$ erabiliz egin, funtzioa deribagarria dela ziurtatzeke.

4.1. Ariketa Funtzioei buruz ikasitako kontzeptu garrantzitsuenen eskema bat egin. Eskema horretan garbi ikusi behar da kontzeptua "indartsuagoa" den heinean hipotesi edo baldintza gehiago eskatzen direla.

Hemendik aurrera aztertu behar ditugun kontzeptuen eskema eraikiko dugu:

4.1.1 Maximo eta minimo erlatiboak



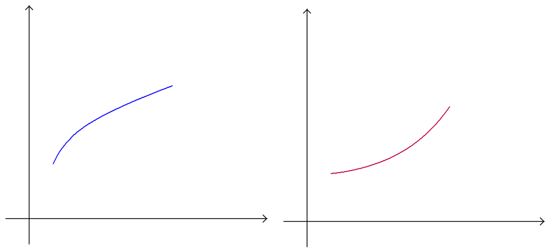
4.1 Irudia: maximo eta minimo erlatiboak

Funtzio bat aztertzerakoan, interesgarria da gehikuntzaren aldaketak aztertzea, hau da, funtzioa gorakorra (beherakorra) izatetik beherakorra (gorakorra) izatera pasatzen den puntua. (4.1) irudian dugun $y(x)$ funtzioak korronte elektrikoa, edo galdara baten dugun presioa, edo enpresa baten irabaziak adieraz dezake. Kasu guztietan funtzioaren eremuan $y(x)$ gorakorra den edo beherakorra den eta joera aldatzen den puntuak ezagutzea nahi dugu. Joera aldaketa gertatzen den puntuak maximo eta minimo erlatiboak dira.

.

4.1.2 Ahurtasuna eta ganbiltasuna

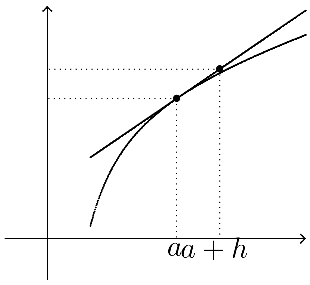
(4.2) irudian adierazita ditugun $y(x)$ bi funtzioen portaeren artean, zein da ezberdintasuna? $y(x)$-en zein propietate betetzen dute batak edo besteak?



4.2 Irudia: Ahurtasuna eta ganbiltasuna

4.1.3 Funtzioen hurbilketa

Gogora dezagun deribatuaren bidez funtzioen balioen hurbilketa lor dezakegula.

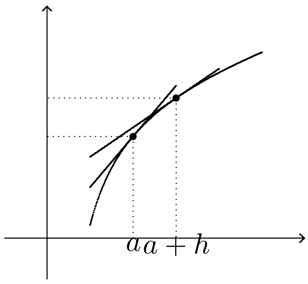


4.3 Irudia: Funtzioen hurbilketa

Diferentzialaren bidez hurbilketa lortzen dugu, h-ren balioa 0-ren gertu dagoenean (ikus (4.3) irudia)

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$$

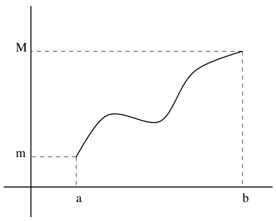
Hurbilketa hau, h handia denean txarra izan daiteke. Hurbilketa lortzeko, gertuago dagoen beste b puntuan (ikus (4.4) irudia) diferentziala kalkula dezakegu, baina horretarako, $y'(b)$ balioa behar dugu eta $y'(x)$ funtzioa lortu behar dugu. Ezin ahal da a-ren inguruan $y(x)$-en balioak lortu $x = a$ puntuarentzat bakarrik funtzioaren datuak erabiliz?



4.4 Irudia: Funtzioen hurbilketa

4.2 Muga erlatiboak

(3.12.3???) atalean funtzio batek bere balio maximoa non hartzen duen ezagutzearen garrantziaz aritu ginen.



4.5 Irudia: Maximo minimoa

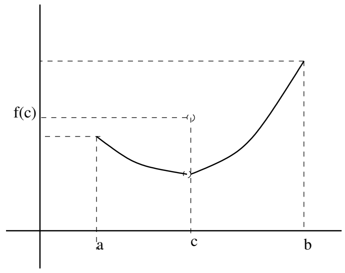
(4.5) irudian adierazitako $y(x)$ funtzioak, balio minimoa du $x = a$ puntuan eta maximoa $x = b$-n.

(4.6) irudian adierazitako $y(x)$ funtzioak, balio maximoa du $x = b$ puntuan baina balio minimorik ez du $[a, b]$ tartean.

Zeintzuk dira $y(x)$ funtzioak bete behar dituen baldintzak $[a, b]$ tartean balio maximoa eta minimoa har ditzan? Weierstrass-en teoremaren arabera, badakigu baldintza nahikoa dela (baina ez beharrezkoa) jarraitua izatea $[a, b]$ tartean.

4.2. Ariketa Aztertu ea Weierstrass-en teorema erabil dezakegun funtzio hauekin eta lortu $y(x)$ funtzioek non dituzten balio maximo eta minimoak, baldin badituzte.

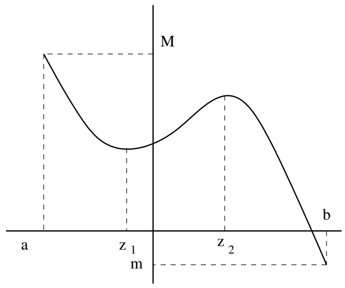
- $y(x) = 1 + x^2 \quad x \in [-1, 2]$



4.6 Irudia: Maximoa bai minimoa ez

- $y(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & x \in [-1, 0) \cup (0, 2] \text{ denean} \\ 3 & x = 0 \text{ denean} \end{cases}$
- $y(x) = x^2 + 1 \quad x \in (-1, 2)$

4.1. Adibidea (4.7) irudian adierazitako funtzioa aztertuko dugu.



4.7 Irudia: Maximo minimoak

$y(z)$ funtzioak $[a, b]$ tartean, minimoa $m = y(b)$ du, eta maximoa $M = y(a)$.

Baina $[a, b]$ tartean z_1 eta z_2 puntuetan $y(z)$ funtzioak portaera berezia du.

z_1 puntuan $y(z)$-k ez du $[a, b]$ tarteko balio txikiena, minimoa, baina $y(z_1)$ funtzioak z_1 puntuaren inguruan hartzen duen balio txikiena da. Formalki adierazita:

$$\exists \delta > 0 \mid y(z_1) \leq y(z) \quad \forall z \in (z_1 - \delta, z_1 + \delta)$$

Gogora dezagun $(z_1 - \delta, z_1 + \delta)$ tartea, z_1 puntuaren ingurunea dela.

Era berdinean

$$\exists\epsilon > 0 \mid y(z_2) \geq y(z) \quad \forall z \in (z_2 - \epsilon, z_2 + \epsilon)$$

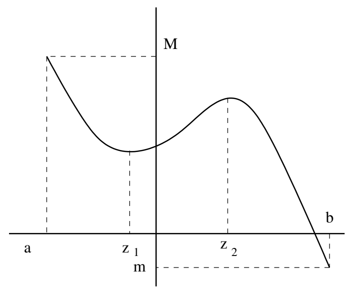
Beraz, $y(z)$ funtzioaren bi portaera mota bereizi dugu:

- Orokorra: $y(z)$-ren portaera $[a,b]$ eremuan:

$$\begin{array}{lll} \forall z \in [a,b], & y(z) \leq y(a) & a\text{-n maximo absolutua} \\ \forall z \in [a,b], & y(z) \geq y(b) & b\text{-n minimo absolutua} \end{array}$$

- Erlatiboa: $y(z)$-ren portaera z_1 eta z_2-ren inguruan (ikus (4.8) irudia)

$$\begin{array}{llll} \exists\delta > 0 \mid & y(z_1) \leq y(z) & \forall z \in (z_1 - \delta, z_1 + \delta) & z_1\text{-en minimo erlatiboa} \\ \exists\epsilon > 0 \mid & y(z_2) \geq y(z) & \forall z \in (z_2 - \epsilon, z_2 + \epsilon) & z_2\text{-n maximo erlatiboa} \end{array}$$



4.8 Irudia: Maximo eta minimoa lokalak

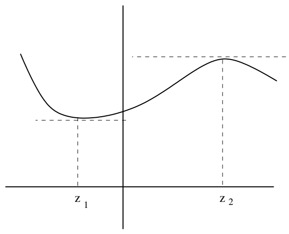
Maximo eta minimo erlatiboak (mutur erlatiboak) aurkitzeak garrantzia du magnitude baten, korronte elektrikoa adibidez, aldakuntzan erpinak azaltzen diren puntuak direlako.

Baina, nola aurkitu mutur hauek? (4.9) irudiko adierazpen grafikoari begiratuz badirudi $y(x)$ deribagarria baldin bada puntu horietan $y'(x) = 0$ betetzen dela. Egia izango al da?

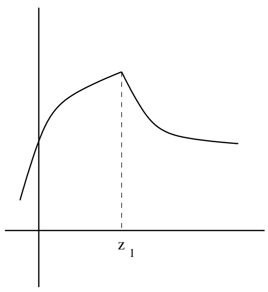
Badirudi z_1, z_2 puntuetan ukitzailea horizontala dela: $y'(z_1) = y'(z_2) = 0$ betetzen dela.

Baina propieta hau erabil ahal izan dadin funtzioa deribagarria izan behar da. (4.10) irudian adierazitako funtzioarentzat ez dago $y'(z_1)$ deribaturik.

Froga dezagun propietatea:



4.9 Irudia: Maximo eta minimoa lokalak



4.10 Irudia: z_1 puntuan deribaturik ez

4.1. Teorema *$y(x)$ funtzioa $x = c$ puntuan deribagarria baldin bada eta puntu hori muturra baldin bada, orduan puntu horretan $y'(c) = 0$*

Frogapena

Demagun $y(x)$ funtzioak $x = c$ puntuan minimo erlatiboa duela. $y(x)$ deribagarria denez,

$$y'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{y(c+h) - y(c)}{h}$$

limitea existitzen da eta, $y(c)$ minimo erlatiboa denez, h nahiko txikia hartzen badugu,

$$y(c+h) \geq y(c) \Rightarrow \begin{cases} h > 0 \Rightarrow & \dfrac{y(c+h) - y(c)}{h} \leq 0 \Rightarrow y'(c) \leq 0 \\ h < 0 \Rightarrow & \dfrac{y(c+h) - y(c)}{h} \geq 0 \Rightarrow y'(c) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y'(c) = 0$$

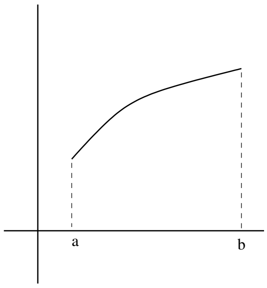
4.3. Ariketa $y(x)$ funtzioak $x = c$ puntuan mutur bat badu, $y(x)$ deribagarria da puntu horretan? $y'(c) = 0$, baldin bada $y(x)$ funtzioak mutur bat al du $x = c$ puntuan?

4.3 Abiadura nulua al da uneren baten?

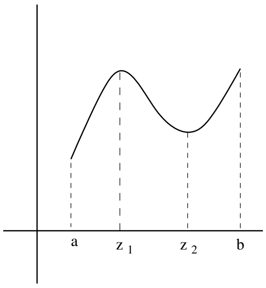
$y(x)$ objektu baten mugimendua baldin bada, edo mugitzen den objektu baten egindako indarra, edo, labe baten tenperatua edo ..., y-ren abiadura x-rekiko 0 noiz den jakitea nahi dugu. Gainera, puntu horietan mutur bat egon daiteke.

Gure arazoa: funtzio bat deribagarria baldin bada, zeintzuk dira behar diren baldintzak $y'(c) = 0$ betetzen duen c punturen bat dagoela zihurtatzeko.

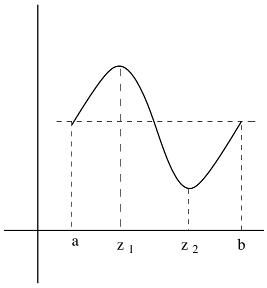
Azter dezagun adierazpen batzuk:



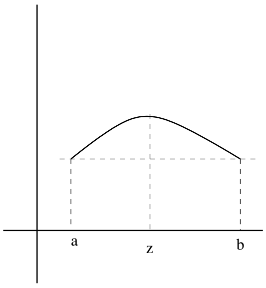
$y'(x) > 0 \forall x$



$\exists z_1, z_2 \mid y'(z_1) = y'(z_2) = 0$



$y(a) = y(b), y'(z_1) = y'(z_2) = 0 \forall x$



$y(a) = y(b), y'(z) = 0$

Badirudi $y(a) = y(b)$ baldintza nahikoa dela (baina ez beharrezkoa) badela c non $y'(c) = 0, c \in [a, b]$ zihurtazteko. Egia izango al da orokorrean? Bai, hala da, eta propietate hori Rolle-ren teorema da.

4.2. Teorema *[Rolle-ren teorema] $y(x)$ funtzioa jarraitua baldin bada $[a, b]$ tartean, deribagarria (a, b)-n eta $y(a) = y(b)$ betetzen baldin badu, orduan, $\exists c \in (a, b) \mid y'(c) = 0$.*

Frogapena

Funtzioa konstantea bada, $y(x) = y(a) = y(b)\ \forall x \in [a, b] \Rightarrow y'(x) = 0\ \forall x \in (a, b)$, beraz funtzioa konstateak tesia betetzen du.

Funtzioa konstantea ez bada edo $f(x) > f(a) = f(b)$ edo $f(x < f(a) = f(b)$ beteko da $x \in [a, b]$ punturen batentzat. Demagun lehenengo kasua betetzen dela, Weierstrass-en teoremagatik $y(x)$ funtzioak $[a, b]$ tartean maximoa du, eta maximo hau ez da a-n edo b-n hartzen duen balioa, beraz maximo hori $c \in (a, b)$ punturen baten hartzen du, beraz puntu hori maximo erlatiboa izango da, eta ondorioz $y'(c) = 0$

Oharra:

Eskatu ditugun baldintzak nahikoak dira baina ez beharrezkoak deribatua tarteko punturen baten zero izan dadin.

4.4 Batezbesteko balioaren teorema

Kamiolari bat $70km/h$-ko abiadura muga duen errepide batetik doa. Ertzaintzaren kotxea ikusten du eta abiadura $65km/h$-ra jaisten du parean pasatzerakoan. Ertzaintzaren kotxea pasatu eta gero abiadura handitzen du. Kilometro batzuk egin ondoren berriro Ertzazintzaren beste kotxe bat ikusten du eta berriro abiadura jaisten du $68km/h$-ra. Baina ertzainak geldi arazten dio

Ertzainak.- Egun on. Dokumentazioa mesedez.

Gidariak.- Bai horixe. Zer gertatzen da ba ?

Ertzainak.- Baimendutako abiadura baino azkarrago gidatu duzula.

Gidariak.- Hori ezinezkoa da! Nire abiadura 70 Km/h baino txikiagoa izan da.

Ertzainak.- 6 Km lehenago zegoen kotxeak esan digu orain dela $4min$ pasatu zarela bere parean.

Gidariak.- Baina nire abiadura 70 Km/h baino txikiagoa izan da! Zihur nago!

Ertzainak.- Zure esanak ez du balio. Nik garbi dut 70 Km/h baino abiadura handiagoan gidatu duzula uneren baten. Bestela ezinezkoa da 6 Km egitea 4 minututan.

Gidariak.- Zergatik ez ?

Ertzainak.- 6 Km, 4 minututan egin duzulako, eta horrek esan nahi du zure batezbesteko abiadura 90 Km/h izan dela. Uneren baten zure abiadura 90 Km/h izan da.

Ertzainaren arrazonamendua onargarria dirudi. Egiazkoa al da?

Problema era honetan azal dezakegu.

$[a,b]$ tartean definitutako $y(x)$ funtzioarentzat, ba al da $z \in [a,b]$ non $y(x)$-en abiadura eta batezbesteko abiadura berdinak diren?

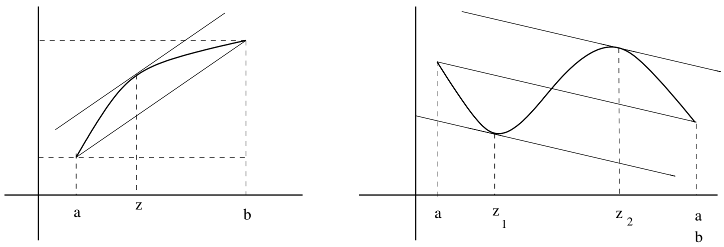
z puntuan, abiadura aipatu dugulako funtzioa (a,b) tartean deribagarria dela suposatzen ari gara eta noski jarraitua.

Enuntziatu formala era honetakoa da

4.3. Teorema *[Gehikuntza finituen teorema] $y(x)$ funtzio jarraitua $[a,b]$-n, eta deribagarria (a,b)-n baldin bada, bada $z \in (a,b) \mid y'(z) = \dfrac{y(b)-y(a)}{b-a}$ betetzen den*

Frogapena

Azter dezagun (4.11) irudian dauden adierazpenak



4.11 Irudia:

z puntua eraikiko dugu grafikoki.

1. $(a,y(a))$, $(b,y(b))$ puntuak elkartzen dituen zuzenkia marrazten dugu. Zuzenkiaren malda $y(x)$-ren batezbesko abiadura da $[a,b]$ tartean.

$$m = \frac{y(b)-y(a)}{b-a}$$

2. Zuzenkiarenkin paraleloa den eta kurbarekin ukitzailea den zuzena marrazten dugu. Ez da bakarra izan behar.

3. $z \in (a,b)$ ukitzialea marrazten dugun puntuaren abzisa da. Putu horrek baldintza hau betetzen du:

$$y'(z) = \frac{y(b)-y(a)}{b-a}$$

Egin dezagun orain frogapen zehatza.

- $(a,y(a))$, $(b,y(b))$ puntutik pasatzen den ebakitzaileak ekuazio hau du:

$$u(x) = \frac{y(b)-y(a)}{b-a}(x-a) + y(a)$$

- $u'(z) = y'(z)$ betetzen duen z puntu bat bilatzen ari gara (ukitzailea eta ebakitzailea paraleloak izan daitezen):

$$\exists z \in (a,b) \mid u'(z) - y'(z) = 0$$

- Azter dezagun diferentzia funtzioa

$$h(x) = u(x) - y(x)$$

Ba al da $h'(z) = 0$ betetzen duen z baliorik?

$z \mid h'(z) = 0$ adierazpidea Rolle-ren teoreman azaldu zaigu. Egiazta dezagun $h(z)$-k Rolle-ren teoremaren hipotesiak betezen duela

1. $h(x)$, $[a,b]$ tartean definitua dago, $u(x)$ eta $y(x)$ horrela definituta daudelako.
2. $h(x)$ jarraitua da $[a,b]$-n eta deribagarria (a,b)-n $u(x)$ eta $y(x)$ direlako.
3. $h(a) = u(a) - y(a) = y(a) - y(a) = 0$
   $h(b) = u(b) - y(b) = y(b) - y(b) = 0$

Beraz Rolle-ren teoremaz

$$\exists z \in (a,b) \mid h'(z) = 0 \Leftrightarrow y'(z) = u'(z) = \frac{y(b) - y(a)}{b-a}$$

teorema hau batezbesteko balioaren teorema bezala ere ezagutzen da.

Itzul gaitezen kamiolariaren arazora

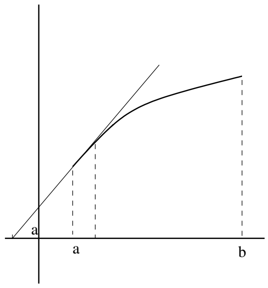
$[a,b] = [0,4]$ tartean $E(t) =$ ibilitako espazioa jarraitua eta deribagarria da. Hipotesi fisiko onargarria da. (Zergatik?)

$E(0) = 0$ Km, $E(4) = 6$ Km

Beraz, $\exists z \in [0,4] \mid y'(z) = \dfrac{6-0}{4/60} = 90$ Km/h

Kamiolariak isuna jasoko du.

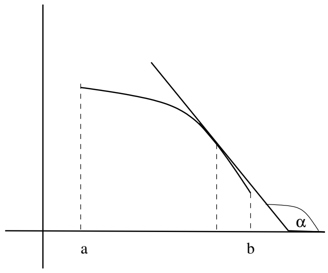
4.4. Ariketa Trafiko-isunaren formula aurkitu. Hau da, ibilgalu batek D Km egiten baditu m minututan errepidearen abiadura muga v Km/h denean, ertzainek v abiadura gainditu duela ala ez jakin dezaten behar den formula.



4.12 Irudia: $y'(x) > 0 \Leftrightarrow \tan\alpha > 0 \Rightarrow$ gorakorra

4.5 Gorakortasuna eta beherakortasuna

Aurreko gaian frogatu gabe erabili genuen emaitza hau:
$y'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$ denean $y(x)$ funtzioa gorakorra da (a, b) tartean;
antzera $y'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$ baldin bada $y(x)$ beherakorra da (a, b)-n.



4.13 Irudia: $y'(x) < 0 \Leftrightarrow \tan\alpha < 0 \Rightarrow$ beherakorra

Grafikoki garbi dagoen (Ikus (4.12) eta (4.13) irudiak) egiaztapen hauek batezbesteko balioaren teorema erabiliz frogatuko ditugu.

Idatz dezagun gorakortasunaren adierazpen formala.

$$y(x) \text{ gorakorra } (a, b)\text{-n} \Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in (a, b),\ x_1 < x_2 \Longrightarrow y(x_1) < y(x_2)$$

Batezbesteko balioaren teoremak $y(x_1)$, $y(x_2)$, eta $y'(z), z \in (x_1, x_2)$ balioak erlazionatzen ditu . Teorema (x_1, x_2) tartean aplikatuko dugu:

$$\exists z \in (x_1, x_2) \mid y'(z) = \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$y'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Longrightarrow y'(z) > 0 \Longrightarrow \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \overset{x_1 \leq x_2}{\Rightarrow} y(x_2) > y(x_1)$$

Beraz, $y(x)$ gorakorra da $(a,b) - n$.

4.5. Ariketa Frogatu $y'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b)$ baldin bada, orduan $y(x)$ funtzioa (a,b) tartean beherakorra dela.

4.6. Ariketa Badakigu

$y'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow y(x)$ gorakorra (a,b) -n
$y'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow y(x)$ beherakorra (a,b)-n

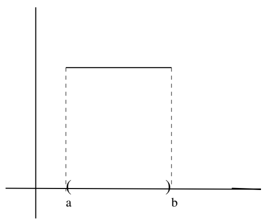
betetzen direla. Eremua (a,b) erakoa ez bada, aurreko emaitzak betetzen al dira?

Batezbesteko teorema oso erabilgarria da, kamiolariari isuna ipinteko balio izan du eta funtzio baten gorakortasuna eta funtzioaren deribatuaren erlazioa frogatzeko erabili dugu, Orain berriro erabiliko dugu beste bi emaitza lortzerakoan,

4.4. Teorema $y'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$ *betetzen da, baldin eta soilik baldin,* $y(x)$ *konstantea den* (a,b)*-n.*

Frogapena

Ikusi dugu $y(x) = \text{Kte} \Rightarrow y'(x) = 0$ betetzen dela (Ikus (4.14) adierazpena),



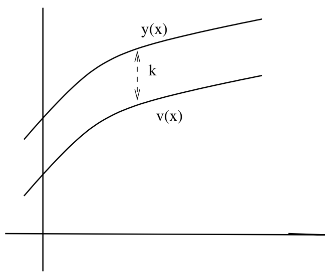
4.14 Irudia: $y(x) = \text{Kte} \Rightarrow y'(x) = 0$

Ikus dezagun orain $y'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow y(x)$ konstantea dela (a,b)-n

(a,b) tarteko edozein x hartzen dugu, (x,b) tartean batezbesteko balioaren teorema aplikatzen dugu $\exists z \in (x,b)$ baldintza hau betetzen duena,

$$y'(z) = \frac{y(b) - y(x)}{b - x}; \text{ baina } y'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow y'(z) = 0 \text{ beraz } y(x) = y(b) \quad \forall x \in (a,b)$$

4.5. Teorema $y'(x) = v'(x) \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow y(x) = v(x) + K$ (ikus 4.15 irudia)



4.15 Irudia: $y(x) = v(x) + K$

Frogapena

$$y'(x) = v'(x) \Rightarrow y'(x) - v'(x) = 0 \Rightarrow \big(y(x) - v(x)\big)' = 0$$

Aurreko emaitza erabiliz,

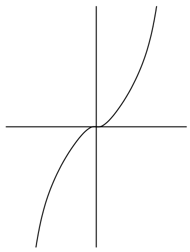
$$\exists K \in \mathbb{R} \mid y(x) - v(x) = K$$

4.7. Ariketa 4.6 Ariketan eskatu den bezala, D eremua (a,b) erakoa ez bada, bi propietate hauek betetzen al dira?

4.6 Taylor-en teorema

Ebatzi ez ditugun bi problema gogoratuko ditugu:

1. Maximo eta minimo erlatiboak finkatzea. Badakigu, $y(x)$ deribagarria denean $x = a$ puntuan eta puntu horretan $y(x)$-k mutur bat duenean derrigorrez $y'(a) = 0$ dela. Baina, $y'(a) = 0$ baldintzak ez du zihurtatzen $y(x)$ funtzioak $x = a$ puntuan mutur bat edukitzea. Hau da, gerta daiteke $y'(a) = 0$ izatea eta muturra ez izatea. $y = x^3$, $a = 0$ kasuan dugu adibide bat (ikus 4.16 irudia).

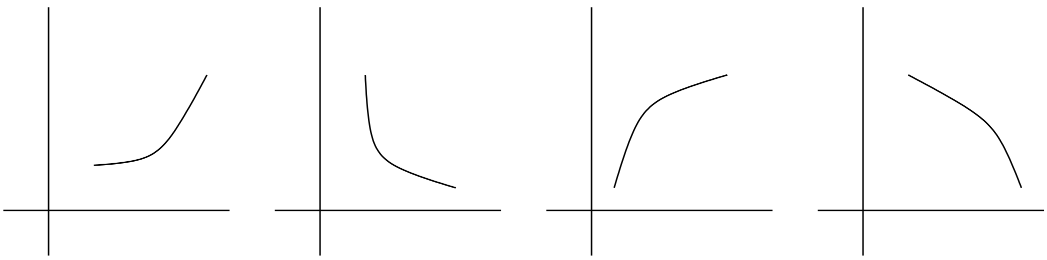


4.16 Irudia: $y(x) = x^3$

$y(x) = x^3 \Rightarrow y'(x) = 3x^2,\ y'(0) = 0$ baina muturrik ez dugu.

Beraz, galdera hau dugu: Zer nolako baldintzak bete behar ditu $y(x)$ funtzioak, $x = a$-n muturra duela ziurtatzeko?

2. Ahurtasuna eta ganbiltasuna.



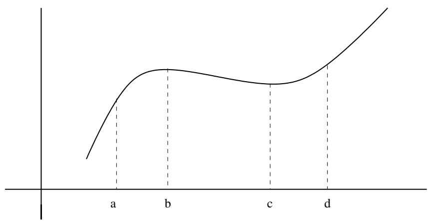
4.17 Irudia: Funtzio ahurrak Funtzio ganbilak

Oraingoan, gure galderak hauek dira: Baliogarria al da $y(x)$ funtzioa ahurra edo ganbila dela jakitea? Nola jakin dezakegu funtzioa ahurra edo ganbila den?

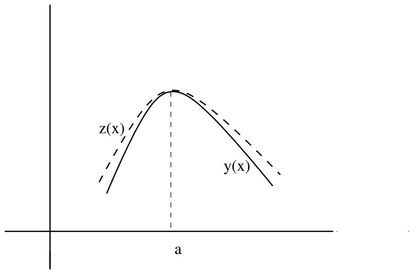
Ez dirudi bi problemen artean erlaziorik dagoenik, baina bien soluzioa ideia berdinen datza. Biok $y(x)$ funtzioaren propietate erlatibo bati dagokie, hau da $x = a$ puntuaren inguruan $y(x)$ funtzioaren portaerari dagokie.

(4.18) irudian dugun adierazpenean $x = a$ puntuan funtzioa ahurra da, $x = b$ eta $x = c$ puntutan funtzioak mutur bi ditu eta $x = d$ puntuan ganbila da.

Aplikatuko dugu ideia, $z(x)$ aztertzeko erraza den funtzioa eta $x = a$ puntuaren inguruan $y(x)$-en gertu dagoen funtzio bat eraikiko dugu. $z(x)$ eta $y(x)$ oso gertu baldin badaude



4.18 Irudia: muturrak, ahurtasuna, ganbiltasuna



4.19 Irudia: $z(x)$ $y(x)$-en hurbilketa

$x = a$-ren inguruan bien portaera berdinak izango dira. (4.19) irudian dauden funtzio biek $x = a$ puntuan muturra dute eta ganbilak dira.

$z(x)$ funtzioaren bilakerak galdera berriak sortzen dizkigu.

1. $z(x)$ zein motakoa izan behar da? Aztertzeko eta ebaluatzeko erraza izan behar da.

2. Nola lortu $z(x)$ funtzioa $y(x)$-n gertu egotea?

Lehenengo galderaren erantzuna, $z(x)$ polinomioa izan behar dela da. Polinomioak jarraituak, deribagarriak eta ebaluatzeko, deribatzeko, integratzeko, grafikoki adierazteko, ... errazak.

Bigarren galderaren erantzuna ulertzeko, hau da, $z(x)$ nola eraikiko dugun, lagungarria den adibide bat ikusiko dugu:

4.2. Adibidea Demagun $y(x) = \mathrm{e}^x$ dela eta $x = 0$ puntuaren inguruan gertu dagoen $z(x)$ polinomia bilatzen dugula.

Hasieran, hurbilketa diferentzialaren bidez (ukitzilearen bidez) egin dezakegu, lehengo mailako polinomia da.

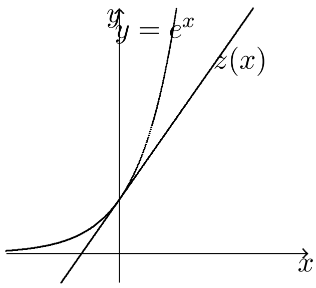
$$z(x) = y(a) + y'(a)(x - a),$$

$x - a = h$ aldaketa egiten badugu

$$z(a + h) = y(a) + y'(a) \cdot h$$

h 0-tik gertu baldin badago

$$z(a + h) \approx y(a + h)$$



4.20 Irudia: $y(x) = \mathrm{e}^x$ funtzioaren hurbilketa

Gure kasuan (ikus 4.20 irudia) $a = 0$ eta $y'(0) = 1$ direnez:

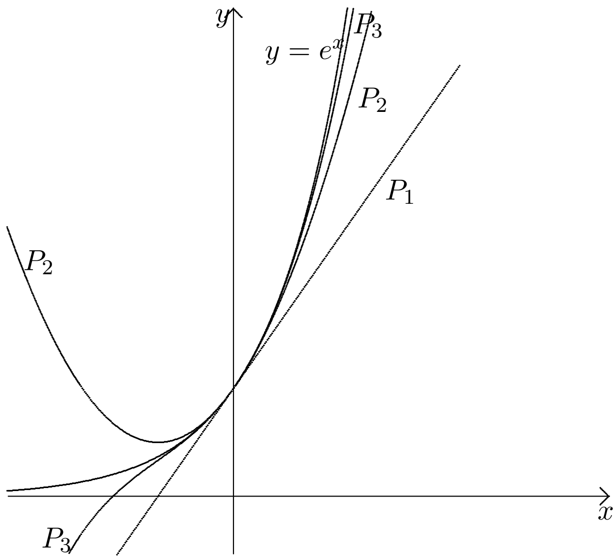
$$z(h) = 1 + h \text{ edo } z(x) = 1 + x$$

$z(x)$ eta $y(x)$ funtzioek bi propietate hauek betetzen dituzte

- Puntu berdinetik pasatzen dira: $z(0) = y(0) = 1$
- Puntu horretan ukitzaile berdina dute: $z'(0) = y'(0) = 1$

Eraiki dezagun orain, $z(x)$ funtzioa $a = 0$ puntuan $y(x)$-ekin bat datorrena bigarren deribaturarte (ikus 4.21 irudia)

$$z(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$



4.21 Irudia: $y(x) = \mathrm{e}^x$ funtzioaren hurbilketak

edo hirugarren deribaturarte

$$z(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

$x = a$ puntuan gero eta deribatu gehiago berdinak dituztenean funtzio biak gero eta hurbilago daudela dirudi.

Ikus dezagun nola lortu polinomio orrokora:

$$
\begin{array}{ll}
\text{1. maila :} & P_1(x) = y(a) + y'(a)(x-a) \\[1em]
\text{2. maila :} & P_2(x) = \frac{1}{2}(x-a)^2 + P_1(x) \\[1em]
\text{3. maila :} & P_3(x) = \frac{1}{6}(x-a)^3 + P_2(x) \\[1em]
\vdots & \\
\text{n. maila :} & P_n(x) = \frac{1}{n!}(x-a)^n + P_{n-1}(x)
\end{array}
$$

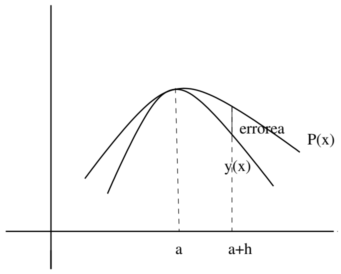
Polinomio hau n ordenako Taylor-en polinomioa da

$$P_n(x) = y(a) + y'(a)(x-a) + \frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{y'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{y^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$h = x - a$ hartzen dugunean

$$P_n(a+h) = y(a) + y'(a)\cdot h + \frac{y''(a)}{2!}\cdot h^2 + \frac{y'''(a)}{3!}\cdot h^3 + \cdots + \frac{y^{(n}(a)}{n!}\cdot h^n$$

h 0-tik gero eta gertuago dagoenean, $P_n(a+h)$ $y(a+h)$-tik gero eta gertuago dago (ikus 4.22 irudia).



4.22 Irudia: $z(x)$ $y(x)$-en hurbilketa

$x = a$ puntutik urrutitzen garen heinan $P_n(a+h)$ eta $y(a+h)$-en arteko distantzia handitzen doa.

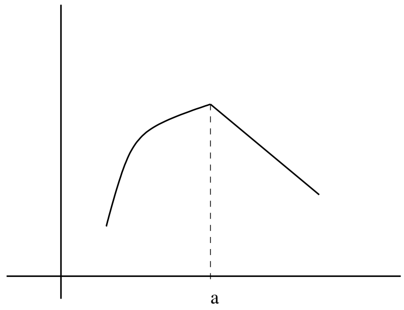
Gehienetan, $y(a+h)$ eta $P_n(a+h)$ balioen arteko diferentzia ezin dugu ezagutu. Baina, garrantzi handiko teorema dugu, Taylor-en teorema, $y(a+h) - P_n(a+h)$ balioa handia ala txikia den jakiteko laguntzen diguna.

4.6. Teorema *[Taylor-en Teorema] $y(a+h)$ balioa $P_n(a+h)$ n mailako Taylor-en polinomiaren bidez hurbiltzen badugu, orduan balio bien diferentzia era honetan lor dezakegu*

$$y(a+h) - P_n(a+h) = \frac{y^{(n+1}(z)}{(n+1)!}\, h^{n+1}$$

$z \in (a, a+h)$ balioren bat izanik.(edo $z \in (a+h, a); h < 0$ denean)

Taylor-en n mailako polinomia, $x = a$ puntuan, lortzeko beharrezkoa da lehenengo n ordenako deribatuak, $y(a), y'(a), \ldots, y^{(n}(a)$, existitzea. Taylor-en teorema erabiltzeko, gainera $n+1$. ordenako deribatua behar dugu.



4.23 Irudia: $x = a$- deribagarria ez den funtzioa

(4.23) irudian adierazitako funtzioarentzat $P_1(x)$ polinomioa ere ezin dugu lortu, $y'(a)$ ez duelako existitzen

4.3. Adibidea Honako funtzioarentzat ahal den maila handieneko Taylor-en polinomioa lortu.

$$y(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + x + 1 & x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} x < 0 \Rightarrow y'(x) = e^x \\ x > 0 \Rightarrow y'(x) = x + 1 \end{array} \Longrightarrow y'(0^-) = e^0 = 1; \quad y'(0^+) = 0 + 1 = 1$$

Beraz, $y'(0) = 1$

$$\begin{array}{l} x < 0 \Rightarrow y''(x) = e^x \\ x > 0 \Rightarrow y''(x) = 1 \end{array} \Longrightarrow y''(0^-) = e^0 = 1; \quad y''(0^+) = 1$$

Beraz, $y''(0) = 1$

$$\begin{array}{l} x < 0 \Rightarrow y'''(x) = e^x \\ x > 0 \Rightarrow y'''(x) = 0 \end{array} \Longrightarrow y'''(O^-) = e^0 = 1; \quad y'''(0^+) = 0$$

Beraz, $y'''(0)$ ez du existitzen. Horrela izan da, $P_1(x)$ eta $P_2(x)$ besterik ezin dugu lortu.

$$P_1(x) = y(0) + y'(0)x = 1 + x$$

$$P_2(x) = P_1(x) + y''(0)\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

$n = 2$-entzat Taylor-en teorema ezin dugu erabili $y'''(0)$ ez dugulako. $n = 1$ eta $h < 0$ kasuan aplikatzen dugu,

$$\exists z \in (h,0) \mid y(h) = 1 + h + \frac{y''(z)}{2}\,h^2 \Leftrightarrow \exists z \in (h,0) \mid \mathrm{e}^h = 1 + h + \frac{h^2}{2}\,\mathrm{e}^z \tag{4.1}$$

($h > 0$ kasuan, ez dugu informazio gehiago lortuko)

(4.1) adierazpidea erabiliz z-ren balioa lor dezakegu.

$$z = \ln\left(\frac{2(\mathrm{e}^h - 1 - h)}{h^2}\right)$$

Baina, z-ren balioa kalkulatzeko bide honek e^h-ren balioa lortzeko baino lan gehiago behar du. Normalki, z-ren balioa ez dugu ezagutu behar, errorearen bornatzea nahikoa izango dugu.

Demagun (4.1) erabiliz e^{-5} kalkulatzen dugula; beraz, (4.1) adierazpidean $h = 5$ egingo dugu,

$$\exists z \in (-5,0) \mid \mathrm{e}^{-5} = 1 - 5 + \frac{25}{2}\,\mathrm{e}^z \Leftrightarrow \exists z \in (-5,0) \mid \mathrm{e}^{-5} = -4 + 12'5\,\mathrm{e}^z$$

Lortu dugun hurbilketa $P_1(5) = -4$ da, eta errorea

$$\text{errorea } = 12'5\,\mathrm{e}^z$$

z ez dugulako ezagutzen ($(-5,0)$ tartean dagoela besterik ez dakigu) errorearen balioa ezin dugu lortu, baina errorearen bornaketa egin dezakegu.

$$\text{errorea } = 12'5\,\mathrm{e}^z \overset{z\in(-5,0),\mathrm{e}^z<\mathrm{e}^0}{<} 12'5 \cdot 1 = 12'5$$

Beraz, $\mathrm{e}^{-5} \approx -4$ hurbilketak, $12'5$ baino txikiagoa den errorea du. Lortu dugun hurbilketa eta balio zehatza (hiru hamartarrekin $\mathrm{e}^{-5} \approx 0'006$ da) konparatuz, hurbilketa benetan eskasa da! Zer gertatu da?

h osa handia hartu dugu eta $a = 0$ puntutik erlatiboki oso urrutira joan garela. Ondorioz, $P_1(x)$-k ez digu baliogarria den hurbilketarik ematen.

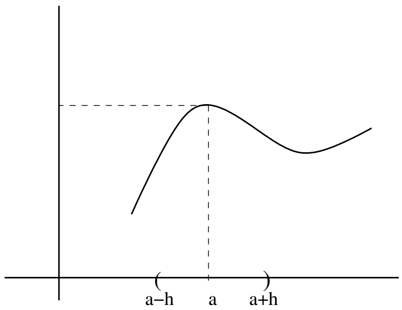
4.8. Ariketa Maila handiagoko polinomioak, $P_2(x), P_3(x), P_4(x), \ldots$, lortu hiru hamartar zehatzak dituen hurbilketa lortu arte. Errorea bornatu.

4.7 Mutur erlatiboak, nola antzeman

$y(x)$ funtzioak $x = a$ putuan mutu erlatiboa izan dezan

$$\exists \Delta x > 0 \mid \forall x \in (a - \Delta x, a + \Delta x) \Rightarrow y(x) \leq y(a)$$

baldintza bete behar dela dakigu. (ikus (4.24) irudia)



4.24 Irudia: mutur erlatiboa

Taylor-en teoreman $y(a + h)$, $y(a)$ gaiak azaltzen zaizkigu. Demagun $y(x)$ funtzioak $n = 1$ denean Taylor-en teorema onartzen duela, beraz,

$$\exists z \in (a - h, a + h) \mid y(a + h) = y(a) + y'(a)h + \frac{1}{2}\, y''(z)h^2$$

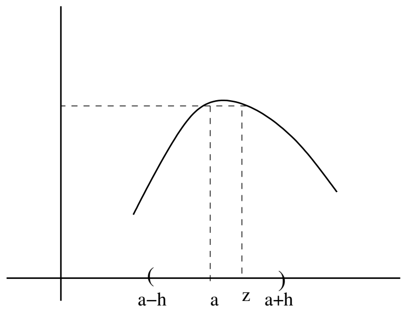
Badakigu ere, $y(x)$ funtzioak $x = a$-n maximo erlatiboa duenean, nahi eta nahi ez, $y'(a) = 0$ izan behar dela. Beraz (ikus 4.25 irudia),

$$y(a + h) - y(a) = \frac{1}{2}\, y''(z)h^2, \quad z \in (a - h, a + h)$$

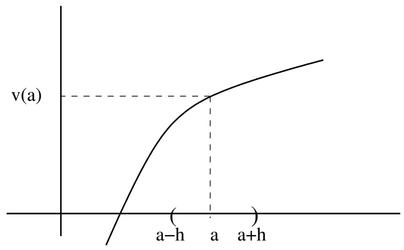
beraz, $y'(a) = 0$ betetzen bada (beharrezko baldintza), $y(a+h) - y(a)$-ren zeinua $y''(z)$-ren zeinuarekin erlazionatuta dago. $\frac{1}{2}\, h^2 > 0, \quad \forall h \neq 0$, betetzen delako,

$$\text{zeinua } (y(a + h) - y(a)) = \text{zeinua } (y''(z))$$

dugu. $z \in (a-h, a+h)$ dagoela besterik ez dakigu, $y''(z)$-ren zeinua zein den jakin dezakegu? Bai, $y''(a)$-ren zeinua ezagutzen dugunean. Gogora dezagun teorema hau: $v(x)$ funtzioa $x = a$ puntyuan jarraitua eta $v(a) \neq 0$ betetzen baldin badira, orduan $v(x)$ eta $v(a)$-k zeinu



4.25 Irudia: $z \in (a-h, a+h)$



4.26 Irudia: $v(x)$ eta $v(a)$-k zeinu berdina

berdina dituzte a-ren inguruneren baten. (4.26) irudian $v(a){>}0$ denez, $\exists h > 0 \mid v(x) > 0 \quad \forall x \in (a-h, a+h)$

beraz $y''(x)$ jarraitua baldin bada:

$$\text{zeinua } (y(a+h) - y(a)) = \text{zeinua } (y''(a))$$

eta ondorioz,

- $y''(a) > 0 \Rightarrow y(a+h) > y(a)$, h 0ren nahiko gertu denean $\Rightarrow$ minimo erlatiboa
- $y''(a) < 0 \Rightarrow y(a+h) < y(a)$, h 0ren nahiko gertu denean $\Rightarrow$ maximo erlatiboa

$y(x)$ funtzioak $x = a$-n mutur bat ukan dezan, baldintza nahikoa dugu. Baina, emaitza hau erabili baino lehenago, $y(x)$-k bete behar dituen baldintzak betetzen direla egiaztatu beharko dugu.

4.9. Ariketa Maximo eta minimo erlatiboak antzemateko erizpidea enuntziatu, $y(x)$ funtzioak bete behar dituen baldintza guztiak adieraziz.

$y''(a) = 0$ kasuan ikusitako erizpidea ezin dugu aplikatu. Kasu horretan, $y''(z)$-ren zeinua ezin dugulako ezagutu. Adibidez, $y(x) = x^3$ funtzioak $a = 0$ puntuan, $y''(0) = 0$ betetzen du, beraz erizpidea ezin dugu erabili.

Soluzioa, $n = 2$ mailako Taylor-en polinomioa erabiltzea da:

$$\exists z \in (a-h, a+h) \mid y(a+h) - y(a) = \frac{1}{6} y'''(z) h^3$$

aurreko kasuan erabili dugun prozedura berdina erabiliz,

$$\text{zeinua } \left(y(a+h) - y(a)\right) = \text{zeinua}(y'''(z)h^3)$$

Kasu honetan h-ren zeinua kontutan hartu beharko dugu h^3-ren zeinua eta h-rena berdinak direlako. Beraz, $y'''(a) \neq 0$ eta $y'''(x)$ jarraitua denean:

$$\begin{aligned} \text{zeinua}\,(y(a+h) - y(a)) &= \text{zeinua}(h \cdot y'''(a)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} h > 0 \Rightarrow & \text{zeinua}\,(y(a+h) - y(a)) = \text{zeinua}(y'''(a)) \\ h < 0 \Rightarrow & \text{zeinua}\,(y(a+h) - y(a)) \neq \text{zeinua}(y'''(a)) \end{cases} \end{aligned}$$

Demagun $y'''(a) > 0$ betetzen dela:

$$\begin{cases} y(a+h) > y(a) & h > 0 \text{ denean} \\ y(a+h) < y(a) & h < 0 \text{ denean} \end{cases}$$

(4.27) irudian muturrik ez dugu!

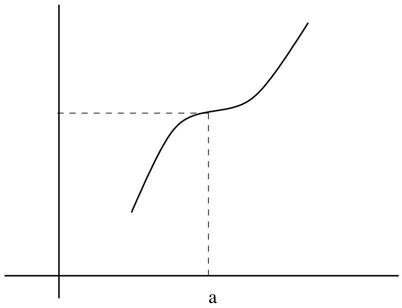
Beraz, $y'(a) = y''(a) = 0$ eta $y'''(a) > 0$ betetzen badira, orduan $y(x)$-k ez ditu ez maximo ez minimo erlatiborik. (Hori da, $y = x^3$ funtzioari $a = 0$ puntuan gertatzen zaiona)

4.10. Ariketa Frogatu $x = a$-n $y'(a) = y''(a) = 0$ eta $y'''(a) < 0$ betetzen direnean ere ez dagoela maximo edo minimo erlatiborik. $y(x)$ funtzioak bete behar dituen baldintza guztiak adieraziz.

Zer gertatzen da $y'''(a) = 0$ denean? Kasu horretan $y^{iv}(a)$ aztertuko dugu. Eta, $y^{iv}(a) = 0$ denean? $y^{v}(a)$ erabiliko dugu, eta era horretan jarraituko dugu deribatuaren ordena handituz. Orokorrean, demagun

$$y'(a) = y''(a) = \cdots = y^{(n}(a) = 0; y^{(n+1}(a) \neq 0$$

betetzen direla eta $y^{(n+1}(x)$ jarraitua dela. Noiz esan dezakegu $x = a$ puntuan mutur erlatiboa dugula?



4.27 Irudia: muturrik ez dugu

4.11. Ariketa Mutur erlatiboak antzemateko erizpide orokorra enuntziatu eta frogatu. $y(x)$ funtzioak bete behar dituen baldintza guztiak adieraziz.

Laguntza: $y^{(n+1}(a) > 0$, $y^{(n+1}(a) < 0$, kasuak aztertu, n bikoitia edo n bakoitia den bereiztuz.

4.8 Nola ezagutu ganbiltasuna/ahurtasuna

Ikasi dugu nola ezagutu noiz den funtzio deribagarri bat gorakorra edo beherakorra:

$v'(x) > 0\ \forall x \in (a,b)$ bada $\Rightarrow v(x)$ gorakorra da (a,b) tartean
$v'(x) < 0\ \forall x \in (a,b)$ bada $\Rightarrow v(x)$ beherakorra da (a,b) tartean

Baina $v'(x)$ v-ren abiadura x-ekiko dela gogoratuz, asma dezakegu abiadura hori gorakorra ala beherakorra den:

$v''(x) > 0\ \forall x \in (a,b)$ bada $\Rightarrow v'(x)$ gorakorra da (a,b) tartean
(hau da, azelerazioa (a,b) tartean positiboa da).
$v''(x) < 0\ \forall x \in (a,b)$ bada $\Rightarrow v'(x)$ beherakorra da (a,b) tartean $\Leftrightarrow$ azelerazioa negatiboa (a,b) tartean.

Ados, baina, zein da $v(x)$ 2. ordenaraino deribagarria den funtzio baten grafikoaren itxura, bere abiadura gorakorra edo beherakorra bada? Propietate hau ezagutzeko gai al gara bakarrik $v(x)$ funtzioaren grafikoa ikusten?

$v(x)$ eta $v''(x)$ sartzen duen problema berri bat topatu dugu. Zein teorema erabiliko dugu ebazteko? Taylor-en Teorema, jakina. Aplikatuko dugu $n = 1$ denean:

$$\exists z \in (a-h, a+h) \mid v(a+h) = v(a) + v'(a)\cdot h + \frac{1}{2}\, v''(z)\cdot h^2$$

Baina gogoratu $x = a$ puntuan zuzen ukitzailearen ordenatua $a+h$ puntuan $v(a) + v'(a)\cdot h$ dela. Beraz, honako diferentzia honek:

$$v(a+h) - v(a) - v'(a)\cdot h = \frac{1}{2}\, v''(z)\cdot h^2$$

v-ren grafikoa zuzen ukitzailearen grafikoren gainetik edo azpitik gelditzen den adierazten digu. (Ikus 4.28 irudia.)

$v(a+h) - v(a) - v'(a)\cdot h > 0$ betetzen bada, orduan $v(x)$ funtzioaren grafikoa zuzen ukitzailearen grafikoren gainean kokatuta dago; $v(a+h) - v(a) - v'(a)\cdot h < 0$ bada, berriz, zuzen ukitzailea da gainetik kokatuta dagoena.

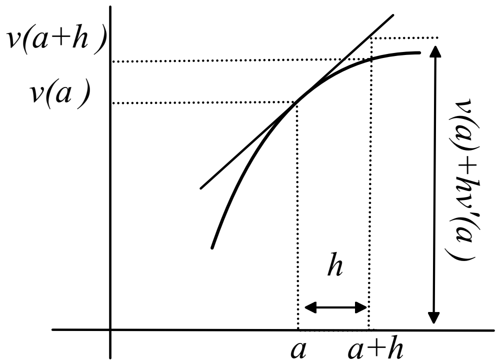
Baina:

$$\text{zeinu}\big(v(a+h) - v(a) - v'(a)\cdot h\big) = \text{zeinu}\left(\frac{1}{2}\, h^2\cdot v''(z)\right) = \text{zeinu}\big(v''(z)\big)$$

eta $v''(x)$ jarraitua bada, h-ren balioak 0-tik gertu badaude:

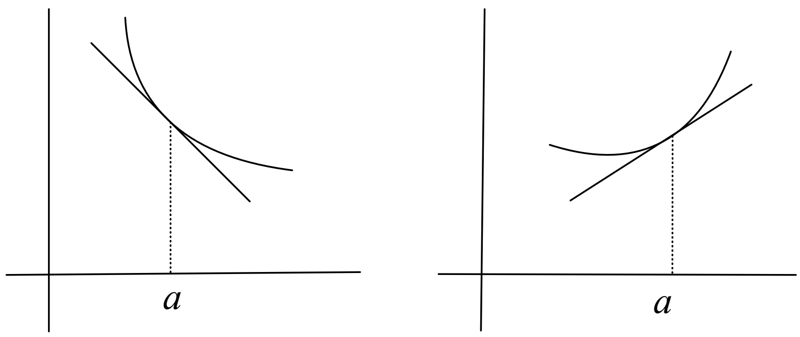
$$\text{zeinu}\big(v''(z)\big) = \text{zeinu}\big(v''(a)\big)$$

Beraz:



4.28 Irudia: Zuzen ukitzailearekiko posizioa

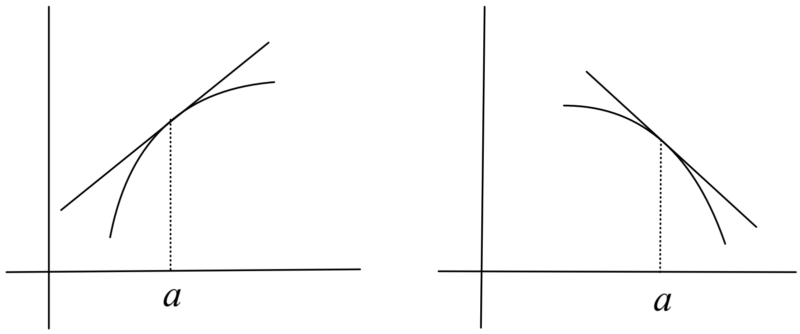
- $v''(a) > 0$ bada, $v(x)$ funtzioaren abiadura $x = 0$ puntuaren ingurune batean gorakorra da eta, orduan, $v(x)$ funtzioaren zuzen ukitzailea kurbaren azpian dago. Zein da baldintza hori betetzen duen $v(x)$ funtzio baten kurbaren itxura? (Ikus 4.29 irudia.)



4.29 Irudia: Zuzen ukitzailea grafikoren azpian dago

$v''(a) > 0$ bada, orduan $v(x)$ funtzioa $x = a$ tarte batean *ahurra* da!! Funtzio bat ahurra denean bere abiadura gorakorra da!! Badakigu nola ezagutu $v(x)$ funtzioaren grafikoan zein eremuetan betetzen den v-ren abiadura x-ekiko gorakorra dela.

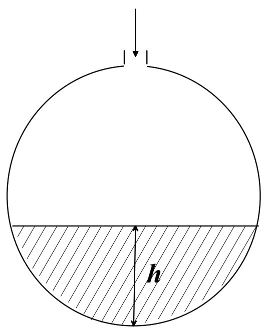
- Era berean, *ganbiltasuna* $v(x)$ funtzioaren abiaduraren beherapenarekin erlazionatuta dago. (Ikus 4.30 irudia.)



4.30 Irudia: Zuzen ukitzailea grafikoren gainean dago: ganbila da

4.12. Ariketa Frogatu $v''(a) < 0$ betetzen denean, $v(x)$ $x = a$ puntuaren ingurune batean ganbila dela.

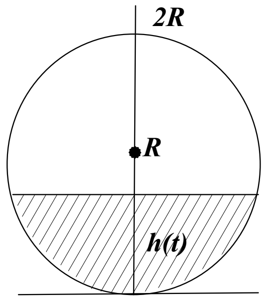
4.4. Adibidea Suposa dezagun depositu esferiko bat uraz betetzen ari garela. Une bakoitzean urak lortutako altuera, h, aztertu nahi dugu. (Ikus 4.31 irudia.)



4.31 Irudia: Ur-depositua

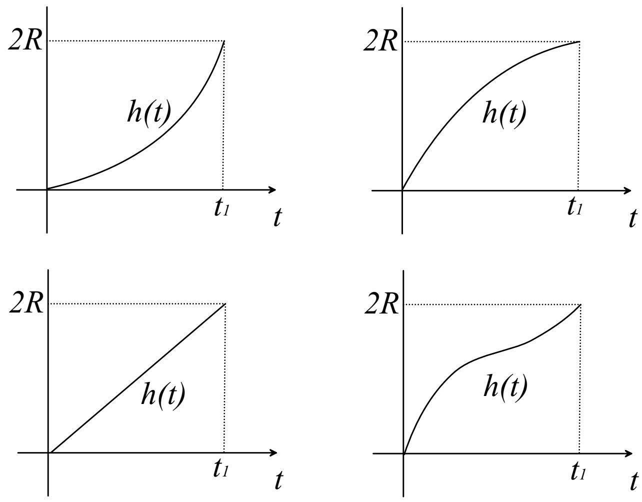
Izan bedi R esferaren erradioa. Enuntziatuan ez digute esaten nola sartzen den ura deposituan, supotuko dugu sartzeko erritmoa konstantea dela; eta, ondorioz, $h(t)$ funtzio jarraitu bat izango da (4.32 irudia); zentzuzkoa dirudi $h(t)$ deribagarria izango dela pentsatzea, baina frogatu egin beharko da.

Gainera, $0 \leq h \leq 2R$, eta $h(t)$ gorakorra da altuera etengabe handiagoa egiten delako.



4.32 Irudia: Uraren altuera: $h(t)$

Nolakoa izango da $h(t)$-ren grafikoa? Marraztuko ditugu batzuk (4.33 irudia):

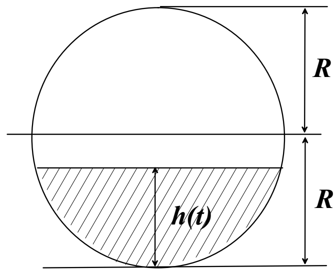


4.33 Irudia: $h(t)$-ren grafikoa hauetako bat izango al da?

Konturatu h-ren abiadura ($h'(t) = dh/dt$) $h = R$ izan arte (esferaren erdia) jaitsi egiten dela. Puntu horretatik, h-ren abiadura handitu egingo da esfera bete arte. (Ikus 4.34 irudia)

Beraz, eragiketarik egin gabe, honako hau dakigu:

1. $h'(t) \geq 0 \quad \forall h \in (0, 2R)$

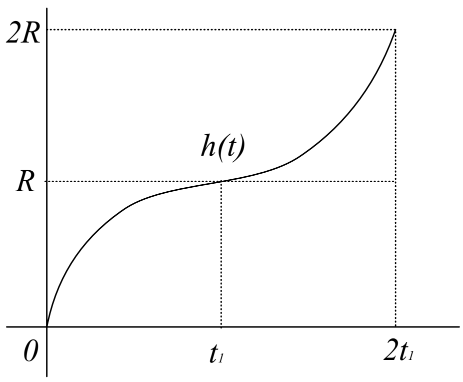


4.34 Irudia: h-ren abiadura aldatzen da

2. h' beherakorra da $h \in (0, R)$ bada $\Rightarrow h'' < 0 \Rightarrow h$ ganbila da $\forall h \in (0, R)$

3. h' gorakorra da $h \in (R, 2R)$ bada $\Rightarrow h'' > 0 \Rightarrow h$ ahurra da $\forall h \in (R, 2R)$

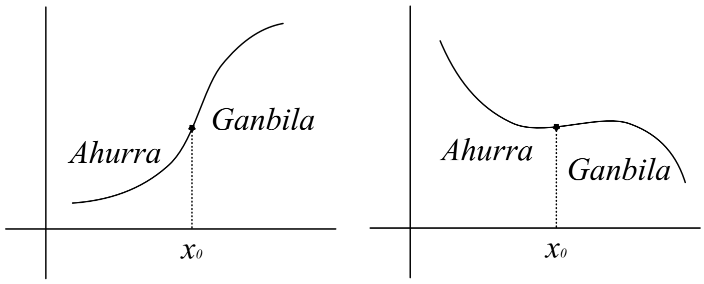
Eta zer gertatzen da t_1 momentuan, $h = R$ betetzen denean, hau da, depositauren erdia bete denean? t_1 denean h-ren abiaduraren aldaketa bat ikusten da: abiadura beherakorratik gorakorrara aldatzen da. Grafikoki puntu hau bereizten da hor ganbiltasuna aldatzen delako, adibide honetan h ganbilatik ahurrara aldatzen da (Ikus 4.35 irudia).



4.35 Irudia: Ganbiltasuna aldatzen da

$h(t)$ funtzioak t_1 puntuan *inflexio* bat duela esaten da.

Orain beste azterketa mota bat egingo dugu, zeinarekin ohituta gaude, azterketa analitikoa:

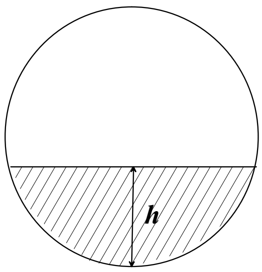


4.36 Irudia: Inflexio-puntu bat duten bi funtzio desberdinen grafikoak

Une bakoitzean bolumena $v(t)$ altuerarekin erlazionaturik dago modu honetan (4.37 irudia):

$$V = \frac{\pi}{3} h^2(3R - h) \tag{4.2}$$

Txapel esferiko baten bolumena da.



4.37 Irudia: Bolumena altuerarekin erlazionaturik dago

$h = 2R$ bada, orduan $V = \frac{4}{3}\pi R^3 =$ *esfera osoaren bolumena* da. Suposatzen badugu ura sartzeko abiadura kostantea dela (adibidez, $k = 17$ litro/minutu izan daiteke), orduan $\frac{dV}{dt} = k > 0$ beteko da. Kasu honetan, (4.2) ekuazioa t-rekiko deribatuz:

$$V' = \frac{\pi}{3}\left(2hh'(3R - h) - h^2h'\right) = \pi hh'(2R - h) \Leftrightarrow h' = \frac{k}{\pi h(2R - h)}$$

$h < 2R$ bada, orduan $h' > 0 \Rightarrow h(t)$ beti gorakorra da.

Ikus dezagun orain h''-ren zeinua:

$$h''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{k}{\pi h(2R-h)}\right) = \frac{k}{\pi}\,\frac{2(h-R)}{h^2(2R-h)^2}\cdot\frac{dh}{dt} = \frac{2k^2(h-R)}{\pi^2 h^3(2R-h)^3}$$

$h-R$ zeinuz aldatzen den faktore bakarra izanik. Ondorioz:

- $h < R$ bada, orduan $h'' < 0 \Rightarrow h$ ganbila da.
- Si $h > R \Rightarrow h'' > 0 \Rightarrow h$ ahurra da.

Hau da, h-ren abiadura beherakorra da $(0, R)$ tartean eta gorakorra $(R, 2R)$-n.
h-ren ahurtasuna $h = R$ denean aldatzen da, beraz, inflexio-puntu bat izango du. Gainera, ikus dezakegunez, $h = R$ denean $h'' = 0$ betetzen da.

Orain arte $y''(a)$-ren zeinua $y(x)$ funtzioaren ahurtasunarekin erlazionaturik dagoela ikusi dugu:

- $y''(a) > 0 \Rightarrow y(x)$ ahurra da a-ren ingurune batean
- $y''(a) < 0 \Rightarrow y(x)$ ganbila da a-ren ingurune batean

Beste aldetik, $y''(x)$-ren zeinua $x = a$ denean aldatzen bada, $x = a$ inflexio-puntu bat izango da.

Baina, zer gertatzen da $y'' = 0$ bada? Galdera hau erantzuteko Taylor-ren Teorema erabiliko dugu $n = 2$ kasuan:

$$\exists z \in (a-h, a+h) \,|\, y(a+h) = y(a) + y'(a)\,h + y'''(z)\frac{h^3}{6}$$

$y'''(a) \neq 0$ bada $\Rightarrow y'''(z) \neq 0$, h 0-ren ingurune batean dagoenean.
$y'''(a) = 0$ betetzen bada, $y^{iv}(a)$ erabiliko dugu, e. a.

4.13. Ariketa (4.11) ariketan eskatutako lan berdina, baina oraingoan $y(x)$ funtzio bat $x = a$ puntuaren ingurune batean ahurra edo ganbila den aztertzeko eta inflexio-puntuak aurkitzeko erizpide orokorra eman behar da.

4.9 $y(x)$ funtzioaren seriezko garapena

Aurreko gaietan e^x, $\sin x$ eta $\cos x$ funtzioen adierazpenak x-en berreduren batura infinitoak bezala erabili ditugu:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Garapen hauek Taylor-en teoreman oinarrituta daude. $y(x)$ funtzioa edozein $n+1$ ordeneraino deribagarria dela suposatzen badugu:

$$\exists z \in (a-h, a+h) \mid y(a+h) = y(a) + y'(a)\cdot h + \frac{1}{2}\, y''(a)\cdot h^2 + \cdots + y^{(n}(a)\frac{h^n}{n!} + y^{(n+1}(z)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

eta orain, suposatuz n handitzen denean hondarra 0-rantz hurbiltzen dela, hau da:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y^{(n+1}(z)}{(n+1)!} = 0$$

betetzen da:

$$\lim_{n\to\infty} y(a+h) = \lim_{n\to\infty}\left(y(a) + y'(a) + \cdots + \frac{y^n(a)}{n!}\right) + \lim_{n\to\infty} \frac{y^{(n+1}(z)h^n}{(n+1)!} \Leftrightarrow y(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n}(a)h^n}{n!}$$

eta $x = a + h$ deituz:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n}(a)(x-a)^n}{n!} \tag{4.3}$$

(4.3) adierazpena $y(x)$ funtzioaren *Taylor-en seriezko garapena* $x = a$ puntuan deitzen da. $y(x)$ funtzioaren Taylor-en berredura-seriezko garapena existitzeko ondorengo bi baldintza hauek betetzea derrigorrezkoa izango da:

1. n edozein ordeneraino deribagarria izatea.

2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y^{(n}(z)h^n}{n!} = 0 \quad z \in (a-h, a+h)$$

4.5. Adibidea $y = \mathrm{e}^x$ funtzioaren $a = 0$ puntuan berredura-seriezko garapena lortu.

1. Existitzen da $y^{(n}(x) = \mathrm{e}^x \quad \forall x \in \mathbb{N}$

2.

$$\frac{y^{(n}(z)h^n}{n!} = \frac{\mathrm{e}^z h^n}{n!}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^z h^n}{n!} = 0$$

Beraz, hipotesiak betetzen dira eta garapena hau da:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Taylor-en teorema erabiliz aplikazio garrantzitsu ugari lortzen dira. Horregatik, emaitza baliagarri hau beste "bitxi matematiko" bat dela esan dezakegu. (Ikus 4.38 irudia)

Hala ere, baliagarritasun honez badu bere prezioa: asko eskatzen du. $p_n(x)$ Taylor-en n. graduko polinomio kalkulatu ahal izateko, $y(x)$-en n. ordenarainoko deribatuak existitu behar dira. Eta $y(x)$ berredura-seriezko garapena kalkulatzeko, beharrezkoak dira $y^{(n}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

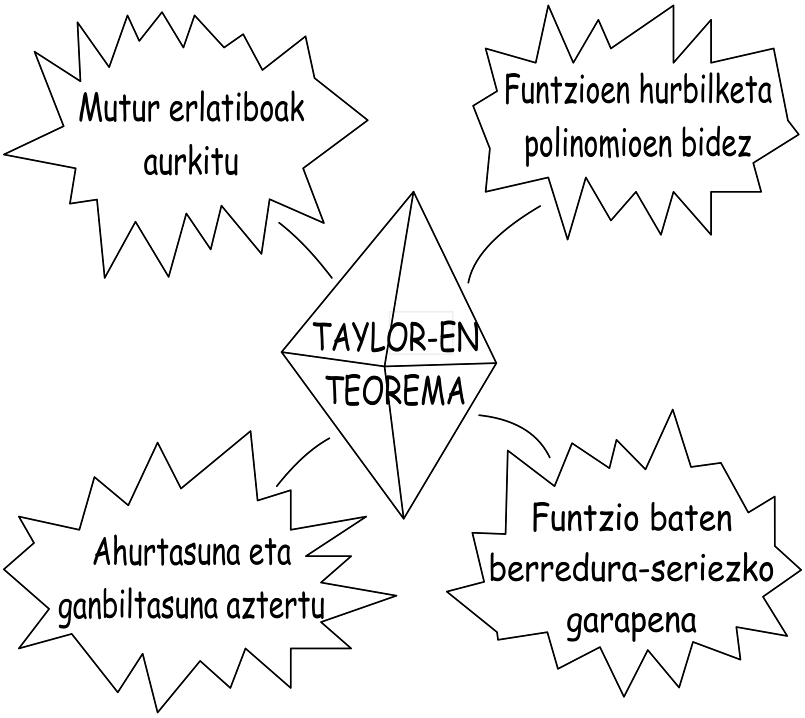
Eta zer egin dezakegu $y(x)$ funtzioa jarraitua ere ez bada?

Badaude beste teoria matematikoak horrelako kasuetan aplikagarriak direnak. Haietako bat, Fourier-en serieak, aurreago aztertuko dugu, baina oraindik eginbeharra handia dugu zer den ulertzeko gai izateko.

4.10 Puntu finkoaren teorema

2.7.3 atalean, garrantzi handiko teorema bati buruz hitz egin genuen: Puntu Finkoaren Teorema. Teorema hau erabiliz ondorengo ekuazioaren soluzioa existitzen dela ziurta dezakegu:

$$x = y(x) \tag{4.4}$$



4.38 Irudia: Taylor-en teoremaren aplikazioak

Eta zergatik da hain interresgarria (4.4) ekuazioaren soluzio bat lortzea? Ba, askotan, honelako ekuazio bat daukagunean,

$$g(x) = 0 \tag{4.5}$$

berridatzi daiteke (4.4) moduan. Orduan, (4.4) ekuazioa ebazten badugu, lortzen dugu ere (4.5) ekuazioaren soluzio bat.

4.6. Adibidea Suposa dezagun $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ ekuazioa ebatzi nahi dugula; hemen, ekuazioa (4.5) eran emanda dago, $g(x)$ honako hau izanik:

$$g(x) = x^3 + 4x^2 - 10 \tag{4.6}$$

Ikus dezagun orain (4.6) ekuazioa (4.4) eran idazteko modu desberdinak:

1. $4x^2 = 10 - x^3 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}(10 - x^3)^{\frac{1}{2}}$

2. $x = x + x^3 + 4x^2 - 10$

3. $x = \left(\dfrac{10}{4+x}\right)^{\frac{1}{2}}$

4. $x = x - \dfrac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$

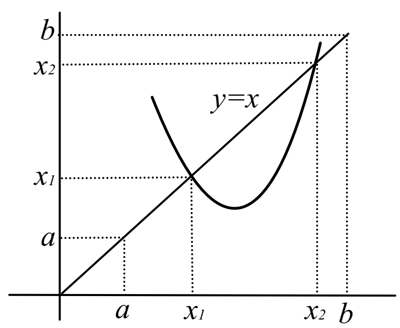
Kasu guztietan lortutako ekuazioaren soluzioa (4.6)-ren soluzioa da.

Hona hemen Puntu Finkoaren Teoremaren enuntziatua:

4.7. Teorema *$y(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua bada eta $y(x) \in [a,b]$, orduan $x = y(x)$ ekuazioak gutxienez soluzio bat du $[a,b]$ tartean.*

4.7. Adibidea 4.39 irudian agertzen den funtzioak $\forall x \in [a,b], \quad y(x) \in [a,b]$ betetzen du. Gainera bi puntu finko, x_1 eta x_2, daude:

$$x_1 = y(x_1), \qquad x_2 = y(x_2)$$



4.39 Irudia: Puntu finkoak

Eta noiz ziurta dezakegu puntu finkoa bakarra dela? Puntu finkoaren teoremak hau gertatzeko baldintzak ematen dizkigu:

(a,b) tartean $y'(x)$ existitzen bada, eta baldin badago k, $0 < k < 1$, konstante bat non $|y'(x)| \leq k \quad \forall x \in (a,b)$ betetzen den, orduan $[a,b]$ tartean dagoen puntu finkoa bakarra da.

- Existentziaren frogapena:

  $y(a) = a$ edo $y(b) = b$ betetzen bada, orduan $y(x)$ funtzioak tartearen mutur batean puntu finko bat du. Beste kasuan, $y(x) \in [a, b]$ betetzen denez, $y(a) > a$ eta $y(b) < b$. Kontsideratuko dugu $h(x) = y(x) - x$ funtzio berri bat.

  $h(x)$ funtzioari Bolzanoren teorema aplikatzeko baldintzetan gaudela ikusten dugu:

  $h(x)$ funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua da $y(x)$ jarraitua delako.

  $h(a)y(a) - a > 0, \quad h(b) = y(b) - b < 0$

  Beraz, Bolzanoren teoremagatik, badago $z \in (a, b)$ non $h(z) = 0$ den $\Rightarrow y(z) = z$

- Bakartasunaren frogapena:

  Suposa dezagun bi puntu finko $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$, daudela. Batezbesteko balioaren teorema aplikatuz:

  $\exists z \in [x_1, x_2] \ \mid \ y'(z) = \dfrac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1}$; beraz:

  $$|x_2 - x_1| = |y(x_2) - y(x_1)| = |y'(z)||x_2 - x_1| \leq k|x_2 - x_1| < |x_2 - x_1|$$

  eta hau ezinezkoa da. $x_2 \neq x_1$ betetzen dela suposatzu lortutako ondorioa ezinezkoa da, orduan, suposatu duguna ez da egia eta puntu finkoa bakarra da.

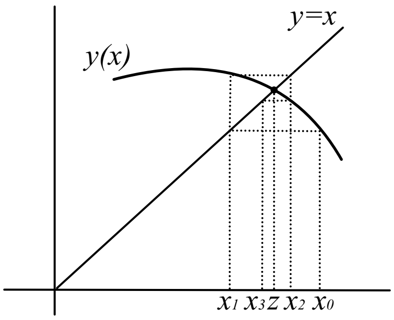
Praktikan, $x = y(x)$ ekuazioaren soluzioaren existentzia eta bakartasuna frogatu ondoren, $x_n = y(x_{n-1})$ segida definitzen dugu, hasierako puntua $x_0 \in [a, b]$ izanik.

Orduan, x_n segidaren limitea $z \in [a, b]$ puntu finko bakarra da : $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ (Ikus 4.40 irudia).

4.14. Ariketa $\sqrt{A}$-ren balioa hurbiltzeko algoritmo bat diseinatu, honako ekuazio hau erabiliz:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{A}{x}\right)$$

Puntu finkoaren teorema aplikatu soluzioaren existentzia eta bakartasuna aztertzeko. Prozedura hau erabiliz, $\sqrt{3.5}$ balioaren hurbilketa bat kalkulatu.



4.40 Irudia: Puntu finkoaren kalkulua

4.11 Deribatuaren zenbakizko ebaluaketa: azaldutako errorearen bornaketa

3. gaian, $y'(a)$-ren gutxi gora beherako balioa kalkulatzeko hiru adierazpen hauek ikusi genituen:

- $y'(a) \approx \dfrac{y(a+h)-y(a)}{h}$ (Progresiboa)
- $y'(a) \approx \dfrac{y(a-h)-y(a)}{h}$ (Erregresiboa)
- $y'(a) \approx \dfrac{y(a+h)-y(a-h)}{2h}$ (Zentrala)

Orain, Taylor-en teoremaren bidez, formula bakoitza aplikatzerakoan sortzen den errorearen borne bat kalkula dezakegu. Ikus dezagun progresiboaren kasua:

$$y'(a) \approx \frac{y(a+h)-y(a)}{h} \Leftrightarrow y(a+h) \approx y(a) + hy'(a)$$

hau Taylor-en hurbilketa da $n = 1$ harturik:

$$\exists z \in (a, a+h) \mid y(a+h) = y(a) + y'(a) \cdot h + \frac{1}{2} y''(z) \cdot h^2 \Leftrightarrow y'(a) = \frac{y(a+h)-y(a)}{h} + \frac{h}{2} y''(z)$$

beraz,

$$|\text{ERROREA}| = \frac{|h|}{2} |y''(z)| \leq \frac{|h|}{2} k$$

non k $y''(x)$-ren borne bat da $[a, a+h]$ tartean.

4.8. Adibidea Kalkulatu $y'(0.6)$-ren balio hurbildua eta azaldutako errorea bornatu, $y(x) = \cos(x)$ izanik.

$$y'(0.6) \approx \frac{\cos(0 + 0.6) - \cos(0)}{0.6} = \frac{\cos(0.6) - 1}{0.6}$$

$$|\text{ERROREA}| = |\frac{h}{2}y''(z)| \leq \frac{h}{2} = \frac{0.6}{2} = 0.3$$

4.15. Ariketa Bornatu, Taylor-en teorema aplikatuz, diferetzia erregresiboa eta zentrala erabiltzerakoan sortutako erroreak.