4. Kapitulua

Aldagai errealeko funtzio errealen azterketa lokala

Oharra:  ikurrarekin markatutako ariketak ebazteko funtzioen adierazpen grafikorako programa informatiko bat behar da, **Winplot** adibidez.

4.1. 4.1 irudian agertzen den ontzian ura botatzen dugu erritmo konstantean, urako altuera t instantean $y(t)$ izanik. $y(t)$-ren eremua eta heina kalkulatu. $y(t)$ funtzioaren grafiko posible bat marraztu.

4.1 Irudia: 4.1 ariketako ontzia

4.2. $y(x)$ funtzio baten gora beherako grafikoa marraztu, bere deribatuak 4.1 taulan agertzen diren propietateak betetzen dituela jakinik.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,\infty)$
$y'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

4.1 Taula: 4.2 ariketako balioen taula

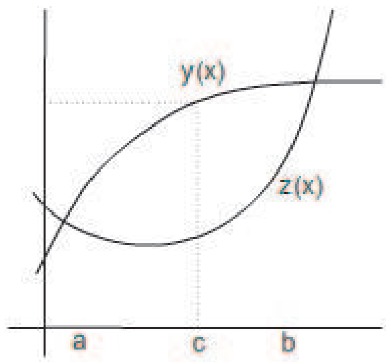
4.3. Izan bedi $y(z) = (1000 - z)^2 + z^2$ funtzioa, eskatzen da:

a) $y(z)$ funtzioaren gorapenako eta beherapenako tarteak.

b) Aurreko atala erabiliz, 1000^2 balioa $998^2 + 2^2$ baino handiagoa edo txikiagoa den aztertu.

d) Orokortu emaitza hau $y(z) = (c-z)^n + z^n$ funtziorako, c edozein zenbaki positibo eta n zenbaki oso positibo bat izanik. Emaitza hau erabiliz, 10000^{100} balioa $9000^{100}+1000^{100}$ baino handiagoa edo txikiagoa den aztertu.

4.4. Izan bitez $y(x)$ eta $z(x)$ 4.2 irudian grafikoki adierazten diren funtzio deribagarriak. $y(x)$ eta $z(x)$ funtzioen arteko distantzia maximoa $[a, b]$ tartean c puntuan lortzen da. Bi funtzioen zuzen ukitzaileak c puntuan paraleloak direla frogatu.

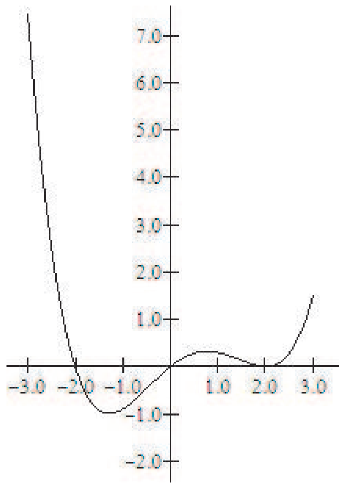


4.2 Irudia: 4.4 ariketako irudia.

4.5. Ondorengo funtzioetarako esan non diren gorakorrak, beherakorrak edo konstanteak. Grafikoki adierazi.

a) $y(x) = |x-1| + |x+2|$ **b)** $y(x) = |x-1| + |x+2| + |x|$

4.6. 4.3 irudian $y(x)$ funtzio baten deribatuaren grafikoa adierazten da.



4.3 Irudia: 4.6 ariketako grafikoa

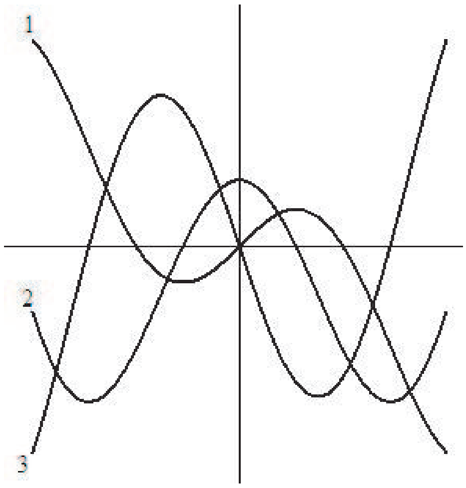
Eskatzen da:

a) Aurkitu non den $y(x)$ gorakorra edo beherakorra.

b) Aurkitu y(x) funtzioaren maximo eta minimo erlatiboak.

d) $y(-3) = 2$ bada, $y(x)$ grafikoki adierazi.

4.7. 4.4 irudian funtzio baten eta bere lehenengo bi deribatuen grafikoak adierazten dira. Esan dezakezu zein den funtzio bakoitzari dagokion grafikoa?



4.4 Irudia: 4.7 ariketako grafikoa

4.8. Ondorengo propietateak betetzen dituen $y(x)$ funtzio jarraitu baten gutxi gora beherako grafikoa marraztu:

1. $y'(x) < 0$, $x \neq 4$ bada
2. $y'(4)$ ez da existitzen
3. $y''(x) < 0$, $x < 4$ bada
4. $y''(x) > 0$, $x > 4$ bada

4.9. $y(x)$ funtzioa $[-3, 3]$ tartean jarraitua da eta bere lehenengo eta bigarren deribatuek 4.2 taulan agertzen diren propietateak betetzen dituzte:

x	$(-3,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$		$(1,3)$
$y'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$-$
$y''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$

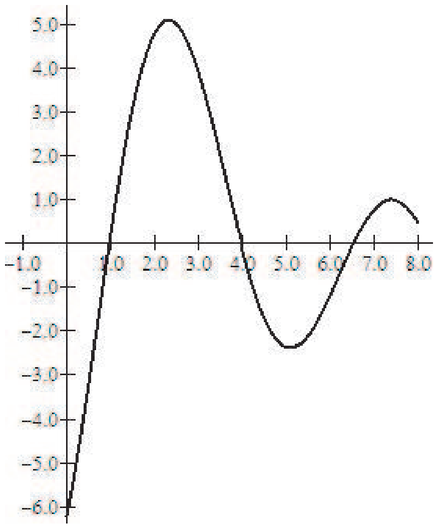
4.2 Taula: 4.9 ariketako balioen taula

a) Zein puntuetan daude $y(x)$ funtzioaren mutur erlatiboak?

b) Zein puntuetan daude $y(x)$ funtzioaren inflexio-puntuak?

d) $y(x)$ funtzioaren grafiko posible bat marraztu.

4.10. 4.5 grafikoan $y(x)$ funtzio baten deribatua adierazten da.



4.5 Irudia: 4.10 ariketako grafikoa

Informazio hau erabiliz ondorengo galderak erantzun:

a) Zein tarteetan da $y(x)$ gorakorra/beherakorra?

b) Zein abzisetan du mutur erlatibo bat?

d) Zein tarteetan da ahurra/ganbila?

e) Zein abzisetan du inflexio-puntu bat?

4.11. Suposa dezagun $y(x)$ funtzioa bi aldiz deribagarria dela. Ondorengo atal bakoitzean, $y(x)$ funtzioak agertzen diren propietateak bete ditzaken azaldu:

a) x guztientzat $y'(x) > 0$, $y''(x) > 0$ eta $y(x) < 0$.

b) x guztientzat $y'(x) < 0$ eta $y''(x) > 0$.

d) x guztientzat $y''(x) > 0$ eta $y(x) < 0$.

4.12. Ondorengo funtzioen maximo eta minimo absolutuen eta mutur erlatiboen existentzia aztertu, azaldutako tarteetan:

a) $y(z) = A \cdot \sin(k\pi z), \;\; z \in \mathbb{R}$

b) $y(u) = \begin{cases} (u-1)^2 + 1 & 0 < u \leq 1 \\ u & 1 < u \leq 3 \end{cases}$

d) $z(s) = \begin{cases} \mathrm{e}^s & s < 0 \\ \ln(s) & 0 < s \leq 5 \end{cases}$

4.13. Ahal den ordena maximoko $s(u)$ funtzioaren McLaurin-en polinomioa kalkulatu.

$$s(u) = \begin{cases} \mathrm{e}^u & s \leq 0 \\ u^3 + 0.5u^2 + u + 1 & u > 0 \end{cases}$$

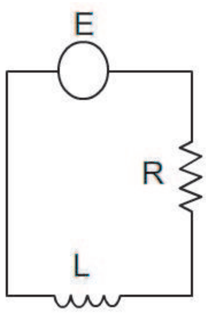
$s(-0.2)$-ren balio hurbildua kalkulatzerakoan azaldutako errorea bornatu. $s(u)$ eta polinomioa grafikoki adierazi -0.2 puntuaren ingurune batean.

4.14. Seriez konektaturiko RL zirkuito batean (4.6 irudia) instante bakoitzean zirkulatzen den I intentsitateak ondorengo erlazioa betetzen du:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

non R eta L erresistentzia eta induktanziaren balio konstanteak diren eta $E(t)$ t-rekiko dependentea izan daiteken zirkuitoan aplikatutako tentsioa. Eskatzen da:

1. $I(t)$-ren balioa McLaurin-en polinomioaren bidez hurbiltzeko prozedura deskribatu.



4.6 Irudia: RL zirkuitoa

2. Aurreko prozedura aplikatuz bigarren graduko polinomioa ($P_2(x)$) kalkulatu, jakinik 200V eta 50Hz-ko sinuzko tentsio bat aplikatzen dela, eta $R = 150\Omega$ eta $L = 0.5\mu H$ direla.

3. Aurreko polinomioa erabiliz, kalkulatu intentsitatearen gutxi gora beherako balioa 0.6 segundu pasatu ondoren.

4. $P_2(x)$ polinomioa grafikoki adierazi $t = 0.6$ puntuaren ingurune batean.

4.15. $y(x)$ funtzio bat emanik, Lagrange-ren teoremak aipatzen duen z puntuaren gutxi gora beherako balioa kalkulatzeko WINPLOT programa bat egin.

4.16. $y(x)$ funtzio bat emanik, Rolle-ren teoremak aipatzen duen z puntua kalkulatzeko WINPLOT programa bat egin.

4.17. Bola batek lortutako altuera t segundu jaurtiki ondoren honela kalkula daiteke:

$$y(t) = -16t^2 + 48t + 32$$

Eskatzen da:

1. Kalkulatu bola zein altueratik jaurtikitzen den.

2. Kalkulatu bola jaurtitzeko abiadura.

3. Frogatu $t = 1$ eta $t = 2$ segunduen artean dagoen instanteren batean bola geldituko dela. Zein altueran gertatuko da?

4.18. Suposa dezagun $h(x)$ $[a, b]$ tartean jarraitua eta (a, b) tartean deribagarria den funtzioa, non $h(a) = h(b)$ betetzen den. Rolle-ren teoremak esaten duenez, existitzen da c puntu bat (a, b) tartean $h'(c) = 0$ betetzen duena. $h(x)$ funtziotik ondorengo funtzioak definitzen dira:

a) $g(x) = h(x) + k$ **b)** $g(x) = h(kx)$ **d)** $g(x) = h(x - k)$

Eskatzen da:

1. Funtzio bakoitza grafikoki adierazi.
2. Tarte bat kalkulatu Rolle-ren teorema $g(x)$ funtzioari tarte horretan aplikatu ahal izateko. Kalkulatu tarte horren puntu bat non $g'(x)$ anulatzen den.

4.19. Hegazkin bat 13:00etan aireratzen da eta, 2500Km-ko hegaldi bat egin ondoren, bere helmugara 18:30etan iristen da. Azaldu zergatik dauden gutxienez bi aldiune non hegazkinaren abiadura 400Km/ordu den.

4.20. Zeramika-pieza bat labean 750℃-ko tenperaturan erretzen ari da. Labea itzaltzen da eta hogei ordu pasatu ondoren piezaren tenperatura 110℃ da. Eskatzen da:

1. Piezaren tenperaturaren grafiko posible bat adierazi.
2. Azaldu zergatik tarte horren aldiune batean piezaren tenperatura 32℃/ordu-ko abiadurarekin jaisten zen. Aldiune hori gutxi gora behera kalkulatu, aurreko atalean marraztutako grafikoa erabiliz.

4.21. Suposa dezagun $y(x)$ $[a, b]$ tartean definiturik dagoen 2 graduko funtzio polinomikoa dela. Frogatu batezbesteko balioaren teoreman azaltzen den z puntua tartearen erdiko puntua dela.

4.22. Medikuntzan, gaixo baten gorputzaren erreakzioa $R(x)$ medikamendu baten x dosia hartzen duenean, formula honen bidez adierazi daiteke:

$$R(x) = Ax^2(B - x)$$

non A eta B gaixoarekin aldatzen diren bi konstante positibo diren. Gaixo baten sentikortasuna $S(x)$ hartutako dosiarekiko erreakzio-abiadura da. Suposa dezagun erreakzio negatibo bat kaltegarria dela.

a) Zein da R-ren eremua? Zein izan daiteke A eta B-ren zentzu fisikoa?

b) Zein izan behar da hartutako dosia erreakzioa maximoa izan dadin? Zenbat balio du balio maximo horrek?

d) Zein izan behar da hartutako dosia sentikortasuna maximoa izan dadin?

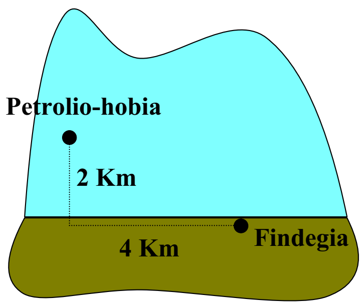
HOBERENERATZEA

4.23. Leiho batek itxura errektangularra du, goi-aldea zirkunferentzierdia delarik. Suposa dezagun bere perimetroa balio ezagun bat dela. Leihoaren dimentsioak lortu sartzen den argia maximoa izan dadin.

4.24. Tapa gabeko depositu zirkular bat eraiki nahi da, bere edukiera $5000m^3$-koa izanik. Solairua egiteko prezioa $500€/m^2$ bada eta alboko hormarena $800€/m^2$, depositauaren dimentsioak kalkulatu kostea minimoa izan dadin.

4.25. Bi zutoin, 12 eta 18m-ko altuerakoak, 30m-ko distantzia batera daude. Bere goiko muturrak kable batekin elkartu nahi da, kablea zutoinen artean dagoen zoruko puntu batean lotuta egonik. Kalkulatu puntu hori erabilitako kablearen kantitatea minimoa izan dadin.

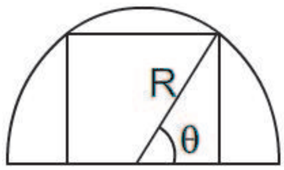
4.26. Petrolio-hobi bat itsasoan dago, kostaldetik 2Km-etara. Findegia kostaldean aurkitzen da, 4Km-etara itsasertza jarraituz (Ikus 4.7 irudia).



4.7 Irudia: 4.26 ariketako irudia.

Hobitik findegira oliobidea eraiki nahi da. Itsas azpiko metro bakoitzaren prezioa lurrako metro batenaren bikoitza dela jakinik, nondik egin behar da oliobidea ahal den mekeena izan dadin?

4.27. Kontsideratu R erradioko zirkuluerdian inskribatutako laukizuzenak (Ikus 4.8 irudia). Azalera maximoko laukizuzena kalkulatu. LAGUNTZA: Azalera θ angeluaren menpe adierazi.



4.8 Irudia: 4.27 ariketako irudia

4.28. Solairu batzuetako eraikin bat altxatu nahi da. Eraikinaren koste totala soliruen prezioak hasierako koste bati batuz kalkulatzen da. Hasierako kostea 450 bider lehen solairuaren kostea da. Bigarren solairuaren kostea lehenengo solairuarena bider bi da; hirugarren solairuarena lehenengoarena bider hiru, e.a. Zenbat solairu izango du eraikinak solairu baten batezbesteko prezioa minimoa izan dadin? Zenbat izango da eraikinaren koste totala?

4.29. Elektronikako biltegi batek urte batean 2400 CD entzungailu erosten ditu. Urtean zehar eskari desberdinak egiten ditu, eskari bakoitzean entzugailuen kopurua berdina izanik. Garraiolariak, eskari bakoitzagatik, 50€-ko kantitate finko bat gehi 2€ aparatu bakoitzagatik kobratzen du. Zenbat entzugailu eskatu behar dira eskari bakoitzean gastua minimoa izan dadin?