2. Kapitulua

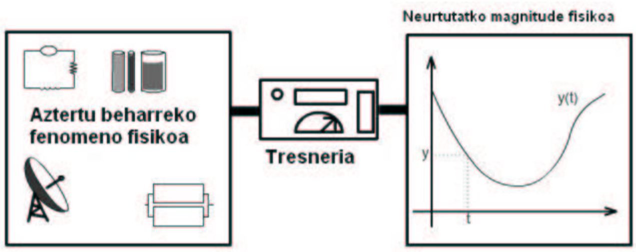
Segidak

2.1 Arazoraren aurkezpena

Demagun fenomeno fisiko jakin bat aztertzea interesatzen zaigula: makina elektrikoa, eremu magnetikoa, matraz batean eman daitezkeen erreakzio kimikoak, galdara baten barnekaldea, likido baten gainazala, etb. Tresneria egokiarekin interesatzen zaigun magnitude fisikoa neur dezakegu (ikus (2.1) irudia). Adibidez:

- Tentsioa
- Korrontearen intentsitatea
- Eremu baten intentsitatea
- Tenperatura
- Presioa
- Likido baten mailaren altuera

  ⋮



2.1 Irudia: arazoaren aurkezpena

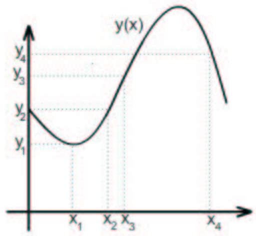
Askotan beharrezkoa da aztertutako magnitude fisikoa *diskretizatzea*, bere balioen lagin bat hartuz, adibidez, ordenagailuan jasotzeko/ordenatzeko.

$$y = f(x) \;\Rightarrow y_1, y_2, y_3, \cdots$$

$$y_i = f(x_i)$$

Ordenagailuak memoria dauka, finitua, eta ezin ditu gorde $f(x)$ balio guztiak $x \in [a, b]$ bakoitzerako, baina bai har dezakegula $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \cdots, y_n = f(x_n)$ lagin bat (ikus (2.2) irudia).

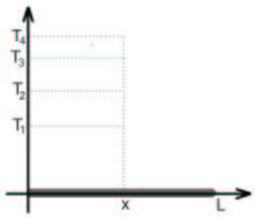
Ikus ditzagun adibide batzuk:



2.2 Irudia: funtzio batek har ditzakeen balioak

2.1. Adibidea

1. Barra metaliko bat berotzen dugu. Demagun t momentu bakoitzerako, x puntu zehatz bateko tenperaturaren banaketa aztertu nahi dugula; horretarako T tenperatura nuertzen da Δt denbora tarte bakoitzean, $t_1, t_2, \cdots$ sekuentzia lortuz.



2.3 Irudia: x puntuko tenperaturak

2. Ibilgailu baten abiadura nuertzen da $t_1, t_2, t_3, \cdots$ momentutan, balio hauek lortzen direlarik: $v_1, v_2, v_3, \cdots$

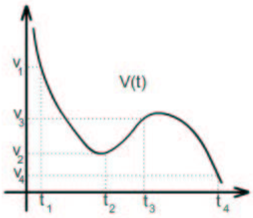
3. Magnitude fisikoaren aldaketa ez da beti denborarekiko neurtzen. Adibidez, habe baten deflexioa aztertzen badugu masa ezberdinak kokatzean:

   Kasu bakoitzean $\Delta m \, Kg$ handitzen da, eta $d_1, d_2, d_3, \cdots$ segida aztertzen da, hau da, balio errealen multzo zenbakitua.

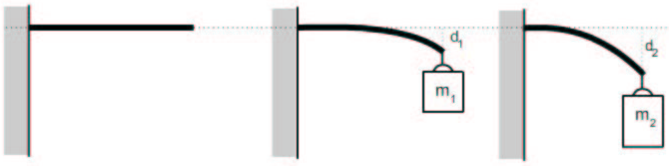
   Kontzeptu hau modu orokorrean definituko dugu:

2.1. Definizioa *Segida bat balio errealen multzo zenbakitua da. Hau da:*

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$



2.4 Irudia: momentu bakoitzeko abiadurak

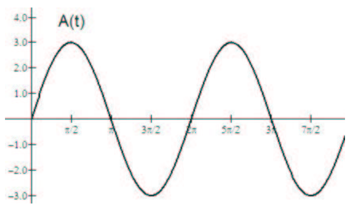


2.5 Irudia: habearen deflexioa

Jarraian, hurrengo arazoa planteatzen da: $\{x_n\}$-ren propietateak aztertzea, $n \in \mathbb{N}$ indizea handitzen doan heinean.

$\{x_n\}$-ren portaera zehaztuz, fenomeno fisikoaren portaeraren informazioa lortuko dugu. Hala ere, kontu izan behar da lagina aukeratzerako orduan, aukeraketa desegoki batekin emaitza okerrak lor baitaitezke.

Adibidez, demagun $A(t)$ seinale baten anplitudea neurtu nahi dugula.



2.6 Irudia: seinale baten anplitudea

Demagun

$$t_1 = \frac{\pi}{2}, t_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi, \cdots, t_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

momentuetan balioztatu nahi dugula.Seinalea $A(t) = K \sin t$ balitz, lortutako balioak hurrengoak izango liratezke:

$$A(t_1) = A(t_2) = \cdots = A(t_n) = K$$

Ondorioz $A(t) = K$ edozein t momenturako, eta hori ez da zuzena. Horregatik laginketako aldia oso garrantzitsua da.

Ez gara hortan sartuko, baina badago hainbat emaitza matematiko, $f(t)$ seinale baten lagin hautaketa nola egiten den erakusten dutenak (Seinaleen Prozesaketa Digitala); horrela, hautatutako segidaren $(f(t_1), f(t_2), f(t_3), \cdots)$ portaera $f(t)$-naren antzekoa izatea lortzen da.

Guk, zuzenean suposatuko dugu $\{x_n\}$ aztertu nahi dugun fenomenorako adierazgarria dela. Aurretik esan dugun bezala, gure arazoa ondorengoa da: $\{x_n\}$-ren propietateak aztertzea.

2.2 Segidaren definizioa

- Zenbakizko balioetatik hasita, adibidez laborategiko neurketak izan daitezke:

$$\{x_n\} = \{x_1 = 2.5, x_2 = 2.51, x_3 = 2.513, x_4 = 2.5132, \cdots\}$$

- *Gai orokorretik* hasita, hau da, $n \in \mathbb{N}$ bakoitzerako x_n nola kalkulatu esaten diguna. Adibidez:

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{\ln n}{\sqrt{\pi}}, \quad y_m = \begin{cases} m^2 & \text{m bikoitia bada} \\ \frac{1}{m} & \text{m bakoitia bada} \end{cases}$$

- Errekurrentziaz: y_n.gaia y_{n-1}-etik (aurreko gaitik) lortzen da.

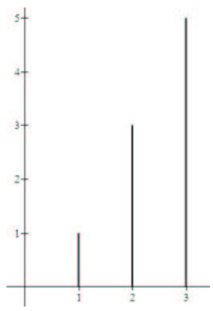
Adibidez, demagun poltsa batetara kanikak jaurtitzen hasten garela. Jaurtiketa bakoitzean bi kanika botatzen ditugu. Galdera ondorengoa da: zenbat kanika egongo dira poltsan momentu bakoitzean? y_n n momentuko kanika kopurua bada, orduan:

$$y_n = y_(n-1) + 2, \quad n = 2, 3, \cdots$$

$$y_2 = y_1 + 2 \;\Rightarrow\; y_3 = y_1 + 4 \;\Rightarrow\; y_4 = y_1 + 6 \;\Rightarrow\; \cdots$$

Hala ere, hasieran poltsan zegoen kanika kopurua zein den zehaztu beharko da, hau da, y_1 balioa. Behin y_1 ezagututa, segidako beste gai guztiak lor ditzakegu:

$$y_1 \;\Rightarrow\; y_2 = y_1 + 2 \;\Rightarrow\; y_3 = y_2 + 2 \;\Rightarrow\; \text{etb.}$$



2.7 Irudia: $y_1 = 1$ balioari dagokion segida

Orokorrean, segida errekurrenteak $y_n = F(y_{n-1}),\ n = 2, 3, \cdots$ itxura izango du, y_1 balio ezaguna izanik.

2.3 Segiden propietate interesgarriak

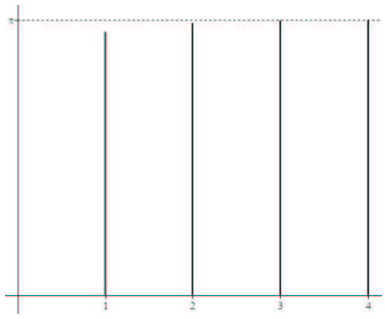
Segiden adibide batzuk portaera mota ezberdinak aztertzeko balioko digute. Ikus ditzagun bada, adibide batzuk: $\{x_n\} = \{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, 3.141592, \cdots\}$

2.1. Ariketa
Azaldu, zure hitzekin, segida batek izan ditzakeen propietateak. Pentsatu propietate bakoitza deskribatzeko balioko digun hitzen bat. Pentsatu, baita ere, zein modutan adierazi ahalko zenituzkeen bere balioak.

Adibidez: $\{y_n\} = \left\{-1 + \dfrac{1}{n}\right\} \quad n \geq 1$

$$\{y_n\} = \left\{0, -1 + \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{3}, -1 + \frac{1}{4}, \cdots\right\} n \geq \mathbb{N} = \left\{0, -1 + \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{3}, -1 + \frac{1}{4} + \cdots\right\}$$

Erraz froga daiteke $\{y_n\}$ segida gorakorra eta bornatua dela.



2.8 Irudia: $\{y_n\}$ segida

Formalki modu honetan adierazten dira propietateak:

Gorakorra: $y_{n+1} > y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beherakorra: $y_{n+1} < y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Bornatua: $\exists p, q \in \mathbb{R} \,|\, p \leq y_n \leq q \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (p eta q zenbakiak ez dira bakarrak)

Adibideko $\{y_n\}$-rentzat:

$$n < n+1 \quad \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow -1 + \frac{1}{n} > -1 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow y_{n+1} < y_n \text{ (beherakorra)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq y_n \leq 0 \quad p = -1, q = 0 \text{goitik eta behetik bornatua}$$

2.2. Ariketa
Aztertu, hurrengo segida bakoitzerako, ikusitako hiru propietateren bat betetzen duten: $z_k = (-1)^k \frac{1}{k}$ $u_n = n^2$ eta $v_n = -2n + 1$

2.3. Ariketa
Aztertu hurrengo segidak:

- $w_x = \begin{cases} x & x \text{ bikoitia denean} \\ \frac{1}{x} & x \text{ bakoitia denean} \end{cases} \qquad x \in \mathbb{N} \text{ izanik}$
- $y_n = a^n \quad a \in \mathbb{R}$

2.4. Ariketa
Arrazoitu hurrengo baieztapenak:

$$\{x_n\} \text{ gorakorra/beherakorra } \Rightarrow \{a \cdot x_n\}_{a\in\mathbb{R}} \text{ gorakorra/beherakorra}$$

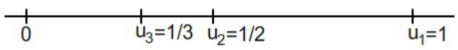
$$\{x_n\} \text{ bornatua } \Rightarrow \{a \cdot x_n\}_{a\in\mathbb{R}} \text{ bornatua}$$

2.4 Segiden konbergentzia

Ondorengo segidak aztertuko ditugu:

$$u_n = \frac{1}{n} \quad y_n = \frac{2n}{n+1} \quad z_n = \frac{n^2}{2n^2+3n+1}$$

Ikus dezakegu hirurek portaera komun bat dutela; hau da, segida bakoitzak *balio karakteristiko* bat du, l: n handitzen doan heinean, segidako gai maximoaren eta l-ren arteko distantzia geroz eta txikiagoa da.

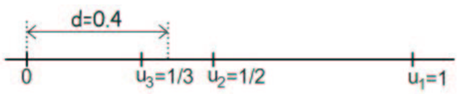


2.9 Irudia: $\{u_n\}$ segida

Hau da, beste hitzetan, l-tik hartutako distantzia d nahi bezain txikia izan arren, iristen da momentu bat non segidako gai guztiak l-tik (aurre zehaztutako d balio hori baino) oraindik eta hurbilago dauden.

Adibidez: $u_n = \dfrac{1}{n}$

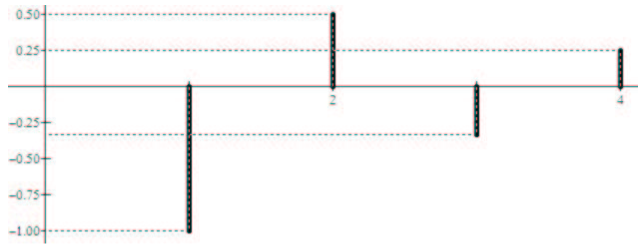
$d = 0.4$ hartzen dugu: $n = 3$-tik aurrera, hurrengo gai guztiak 0-tik hurbilago daude 0.4 baino.



2.10 Irudia: $u_3, u_4, \ldots$ gaiak 0tik hurbilago daude 0.4 baino

d-ren balioa aldatuz, adibidez $d = 0.05$ hartuz: $\frac{1}{n} < 0.05 \Leftrightarrow n > \frac{1}{0.05} = 20$.
Beraz, 20. gaitik aurrerako gai guztiak 0-tik hurbilago daude $d = 0.05$ baino.

Ikus dezagun beste adibide bat: $\{x_n\} = \{(-1)^n \frac{1}{n}\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \cdots\right\}$

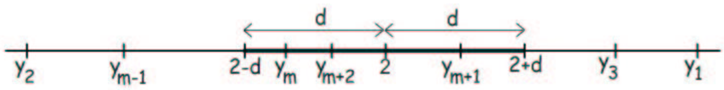


2.11 Irudia: $\{x_n\}$ segida

$\{x_n\}$-ko gaiak $l = 0$-ren bi aldetara daude, baina guztiek portaera bera dute:"l-tik nahi bezain d distantzia txikia ezarri arren, iristen da momentu bat non segidako hurrengo gai guztiak d baino distantzia txikiagora dauden."

Azter dezagun baldintza hori $y_m = \frac{2m}{m+1}$ segidan, hurrengo distantziak hartuta: $d = 0.5,\ 0.05,\ 0.01,\ 0.001$.

$d > 0$ hartuta, $\frac{2m}{m+1} > 2 - d$ beteko duen m balioa aurkitu behar da.



2.12 Irudia: zein m baliok beteko du hau?

$\frac{m}{m+1} < 1 \Rightarrow y_m < 2\ \forall m \in \mathbb{N}$

$$2 - d < \frac{2m}{m+1} \Leftrightarrow 2m + 2 - dm - d < 2m \Leftrightarrow 2 - d < dm \overset{d>0}{\Leftrightarrow} m > \frac{2-d}{d} = \frac{2}{d} - 1$$

$d = 0.5$ denean: $m > \frac{2}{0.5} - 1 = 3$

$d = 0.001$ denean: $m > \frac{2}{0.001} - 1 = 1999$

Idatz dezagun formalki x_n segidaren l-rako konbergentzia:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad | \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \qquad x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

A B D E

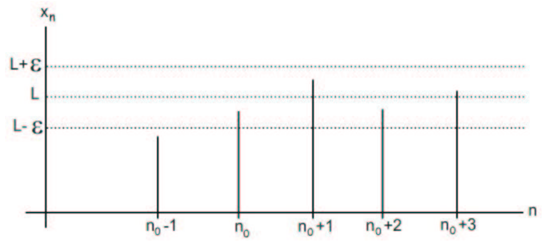
Bloke bakoitza modu honetan irakur dezakegu:

A: l-tik hartutako distantzia nahi bezain txiki izan arren ...

B: iristen da momentu bat, hau da, existitzen da segidako gai bat non ...

D: segidako hurrengo gai guztiak ...

E: l-tik ε baino distantzia txikiagora dauden, hau da, $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ tartearen barrura erortzen dira.



2.13 Irudia: $\{x_n\}$ segidaren konbergentzia

2.5. Ariketa
Zein izen eman diezaiokegu l-ri?

2.6. Ariketa
$y_r = \dfrac{r^2}{r^2+1}$ segida emanda, aztertu:

- Gorakortasuna
- Bornaketa
- l balio baterako konbergentzia.

2.7. Ariketa Aztertu definitu ditugun propietate guztiak hurrengo segidetan. Grafikoki marraztu.

1. $x_n = \begin{cases} 1 & \text{n bikoitia denean} \\ \dfrac{1}{n} & \text{n bakoitia denean} \end{cases}$
2. $y_n = \begin{cases} 3 & n \leq 10^6 \text{ denean} \\ \dfrac{1}{n} & n > 10^6 \text{ denean} \end{cases}$
3. $z_n = \begin{cases} n^2 & n \leq 10^6 \text{ denean} \\ 1 + \dfrac{1}{n} & n > 10^6 \text{ denean} \end{cases}$
4. $u_n = r^n \quad r \in \mathbb{R}$

2.8. Ariketa
Idatzi formalki l $\{x_n\}$ segidaren limitea ez izatearen baldintza.

2.5 Segida konbergenteen propietateak

2.5.1 Limitearen bakartasuna

Posible al da bi limite ezberdin existitzea? Hau da:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l_1, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = l_2, \quad l_1 \neq l_2?$$

2.14 Irudia: $\{x_n\}$ segidak bi limite eduki ditzake?

Okerra dela frogatzeko, absurdura eramanez, ondoko estrategia erabiliko dugu:

- ε txiki bat hartuko dugu, $(l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon)$ eta $(l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$ tarteek puntu komunik ez izateko modukoa.
- Aurkitu $n_0 \in \mathbb{N}$, non $\forall n \geq n_0, x_n \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon)$ eta $x_n \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$, eta hau absurdua da. Ariketa moduan, frogatu existitzen direla ε eta n_0 balio horiek.

2.5.2 Segiden arteko eragiketen konbergentzia

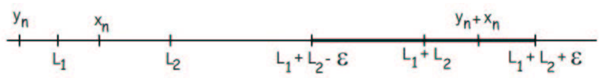
Izan bitez $\{x_n\} \to l_1,\ \{y_n\} \to l_2$. Badirudi ondorengoak beteko direla:

1. $\lim_{n\to\infty}\{x_n + y_n\} = l_1 + l_2$
2. $\lim_{n\to\infty}\{x_n \cdot y_n\} = l_1 \cdot l_2$
3. $\lim_{n\to\infty}\{kx_n\} = k \cdot l_1$
4. $\lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} = \dfrac{l_1}{l_2} \quad y_n \neq 0$ izanik , $\forall n \in \mathbb{N}, l_2 \neq 0$

Lau propietateak zuzenak dira. 1 eta 3 kasuak frogatuko ditugu:

1) $\varepsilon > 0$ hartuta, $n_0 \in \mathbb{N}$ bilatzen dugu non:

$$x_n + y_n \in (l_1 + l_2 - \varepsilon, l_1 + l_2 + \varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad l_1 + l_2 - \varepsilon < x_n + y_n < l_1 + l_2 + \varepsilon \tag{2.1}$$



2.15 Irudia: Zein n_0 baliorako beteko da hau?

$d > 0$ hartuta:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \,|\, \forall n > n_1 \quad l_1 - d < x_n < l_1 + d$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \,|\, \forall n > n_2 \quad l_2 - d < x_n < l_2 + d$$

$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ aukeratuz eta bi inekuazioak batuz:

$$\forall n > n_0 \quad l_1 + l_2 - 2d < x_n < l_1 + l_2 + 2d$$

eta horrela 2.1 lortzen da $d = \dfrac{\varepsilon}{2}$ hartuz.

3) $\varepsilon > 0$ hartuta,$n_0 \in \mathbb{N}$ bilatzen dugu non $\forall n > n_0$ baliotarako:

$$k\,l_1 - \varepsilon < k\,x_n < k\,l_1 + \varepsilon \tag{2.2}$$

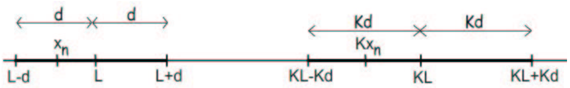
$d > 0$ hartuta:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \,|\, \forall n > n_1 \quad l_1 - d < x_n < l_1 + d \tag{2.3}$$

2.3 baldintza 2.2-ean bihurtu behar dugu:

- $k > 0$ bada, $k\,l_1 - k\,d < k\,x_n < k\,l_1 + k\,d$
  eta 2.2 lortzen da $d = \dfrac{\varepsilon}{k}$ hartuta.
- $k < 0$ bada, $k\,l_1 - k\,d > k\,x_n > k\,l_1 + k\,d \;\Leftrightarrow\; k\,l_1 + k\,d < k\,x_n < k\,l_1 - k\,d$
  eta 2.2 lortzen da $d = -\dfrac{\varepsilon}{k} > 0$ hartuz.

(ikus (2.16) irudia)



2.16 Irudia: 3. propietatearen grafikoa

2.9. Ariketa
$w_n = \{x_n + y_n\},\ z_n = \{x_n y_n\},\ u_n = \{kx_n\}$ konbergenteak badira, $\{x_n\}$ eta $\{y_n\}$ ere bai?

2.5.3 Bornaketa

Azter dezagun orain zein erlazio dagoen ”bornaketa” eta ”konbergentziaren” artean. Zehazki:

1. x_n segida bornatua bada, segida konbergentea al da beti?

2. x_n segida konbergentea bada, segida bornatua al da beti?

2.10. Ariketa
Aztertu bi propietateak $x_n = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$ segidan. Zein ondorio atera daitezke?
Frogatu (2) propietatea beti zuzena dela hurrengo estrategia erabiliz:

1. Bornatu $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ tarteko ”ia gai guztiak”, hau da, bornatu gai guztiak kopuru finitu bat kenduta.

2. Bornatu beste gai guztiak, kopuru finitua dela jakinik.

2.11. Ariketa
Oraintxe frogatu dugu: $\{x_n\}$ konbergentea $\Rightarrow \{x_n\}$ bornatua.
Baina zer ziurtatu dezakegu $\{x_n\}$ bornatua EZ bada?
Orokorrean, $P \Rightarrow Q$ moduko inplikazio bat frogatzen bada, zer gertatzen da Q betetzen ez den adibideren bat agertzen bazaigu?

2.6 Segida konbergente baten limitearen estimazioa

Baina kontuz, $x_n - x_{n-1} \to 0$ betetzeak ez du ziurtatzen$\{x_n\}$-ren konbergentzia.

2.2. Adibidea
$\{x_n\} = \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right\}$ dibergentea eta $x_n - x_{n-1} \to 0$.
Ikus dezagun $\{x_n\}$ segida $+\infty$-ra dibergentea dela:

$$x_n = \underbrace{1 + \frac{1}{2}}_{>1/2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>1/2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{>1/2} + \cdots \to \infty$$

$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists r \in$ non

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{k+r} > \frac{1}{2}\ ?$$

2.7 Konbergentzia monotonoaren teorema

Demagun $\{z_n\}$ segida gorakorra dela. Hau ez da baldintza beharrezkoa ezta nahikoa ere konbergentzia ziurtatzeko. Nola frogatu hori zuzena dela?

- Propietate bat orokorrean zuzena dela frogatzeko, ezin dira propietate hori betetzen duten adibideak erabili; orokorrean egin behar da, edozein segida hartuta.
- Propietate bat zuzena ez dela frogatzeko, nahikoa da zuzena ez dela betetzen duen kasu bat aurkitzea: kontradibide bat ematea, hain zuzen.

Hauek dira orokorrean zuzenak ez direla frogatu nahi ditugun propietateak:

P1: $\{x_n\}$ konbergentea izan dadin, beharrezkoa da $\{x_n\}$ gorakorra izatea.

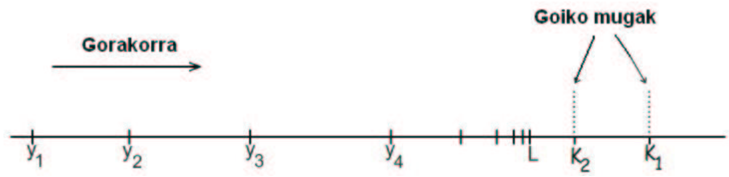
P2: $\{x_n\}$ gorakorra bada, orduan konbergentea da.

2.12. Ariketa
Aurkitu kontradibideak.
P1: $\{x_n\} = \left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$ konbergentea da eta ez da gorakorra/beherakorra.
P2: $\{x_n\} = \{n\}$ gorakorra eta ez da konbergentea.

Beraz, x_n gorakorra dela soilik badakigu ezin dugu ezer ziurtatu bere konbergentziaz.
Eztabaida: Zein baldintza gehitu beharko da konbergentzia ziurtatzeko?
Kontradibide batzuk aztertuz, ondorioztatu gehitu beharreko baldintza goitik bornatua izatea dela.

2.3. Adibidea
$x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ gorakorra eta konbergentea da.
$y_n = 2n + 1$ gorakorra da baina ez da konbergentea.
Zein da bien arteko ezberdintasuna? $\{x_n\}$ goitik bornatuta dago eta $\{y_n\}$ ez.

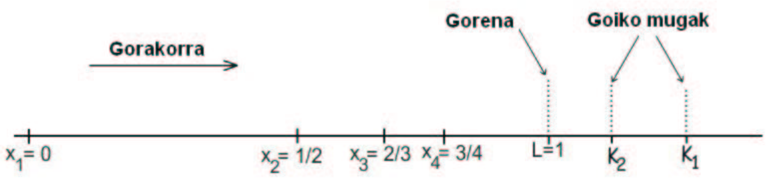
Badirudi gorakorra eta bornatua izateak konbergentzia ziurtatzen duela, baina zein da limitea?



2.17 Irudia: limitea, goi-muga guztietatik txikiena

Ondorioztatu limitea goi-muga guztietatik txikiena dela (gorena).

2.4. Adibidea
$x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$



2.18 Irudia: $\{x_n\}$ segida

Limitea 1 da eta gainera goi-muga guztietatik txikiena ere bai (gorena). Beste edozein zenbaki, $1-\varepsilon$, ezin da goi-muga izan, x_n gorakorra izanik, momentu bat iristen delako $x_n > 1-\varepsilon$ betetzen dena, hau da, muga "gainditzen" duena.

Dagoeneko konbergentzia monotonoaren Teorema enuntziatu dezakegu:

2.1. Teorema
$\{x_n\}$ gorakorra eta goitik bornatua bada, orduan $\{x_n\}$ konbergentea da.

2.13. Ariketa
Enuntziatu teorema segida beherakorretarako. Aurkitu adibideak.

2.5. Adibidea
$\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$?

$x_1 = 2,\ x_2 = 2.25,\ x_3 = 2.37,\ x_{10} = 2.59,\ x_{100} = 2.704,\ x_{1000} = 2.717\ \ldots$ oso mantso doa!

Froga daiteke segida gorakorra eta bornatua dela, eta beraz, konbergentea dela. Kalkula dezagun bere limitea:

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \ln l = \lim_{n\to\infty} n{\cdot}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\left(\dfrac{-1}{n^2}\right)}{-1/n^2} = 1$$

Eta beraz:
$\ln l = 1 \Rightarrow l = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \leftarrow$ goi-muga guztietatik txikiena = gorena.

2.7.1 Segida baten dibergentzia $\pm\infty$-ra

Hurrengo segiden portaerak aztertu:

$$x_n = n,\quad y_n = n^2,\quad z_n = \mathrm{e}^n,\quad w_n = n!,\quad p_n = \ln n$$

Eta jarraian, alderatu ondorengo segidaren portaerarekin:

$$q_n = \begin{cases} n^3 & \text{n bikoitia bada} \\ \dfrac{1}{n} & \text{n bakoitia bada} \end{cases}$$

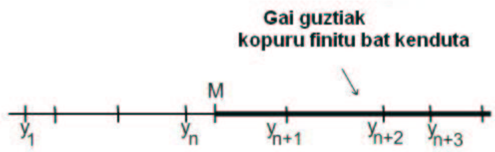
- $x_n, \cdots, p_n$ segidetarako: $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,|\, \forall n > n_0 \Rightarrow x_n > M$

- q_n segidarako : baldintza hori okerra da; bornatua EZ dela bakarrik ziurta dezakegu (beraz, ez da konbergentea)

2.2. Definizioa

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \wedge M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \Rightarrow y_n > M$$

(ikus (2.19) irudia)



2.19 Irudia: 2.2 definizioaren irudia

Eta modu berean definitzen da:

2.3. Definizioa

$$\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0 \wedge M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \Rightarrow y_n < M$$

2.20 Irudia: 2.3 definizioaren irudia

2.14. Ariketa
Aztertu hurrengo adibidearen limitea:

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{n bikoitia bada} \\ n^2 & \text{n bakoitia bada} \end{cases} \quad \text{(ez da existitzen limitea, ez finitua ez infinitua)}$$

2.7.2 ∞-ranzko abiadura hazkuntzaren alderaketa

Ikusi ditugu limitea infinitua duten segiden adibideak:
$x_n = n$, $y_n = n^2 + 1$, $u_n = \mathrm{e}^n$, $v_n = n^3$.
Zertan bereizten dira x_n eta y_n? Eta u_n eta v_n?
n balio handi baterako: $y_n >> x_n, u_n >> v_n$.

Nola konparatu ditzakegu bi segiden ∞-ranzko hazkuntzaren ordenak? Ikus dezagun:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \begin{cases} \infty & \Rightarrow \{x_n\}\text{-k ordena handiagoa} \\ 0 & \Rightarrow \{y_n\}\text{-k ordena handiagoa} \\ k \neq 0 & \Rightarrow \text{ biak ordena berekoak} \end{cases}$$

2.15. Ariketa
Konparatu hurrengo segiden ∞-ranzko hazkuntza ordenak:

$$n^p\,(p \in \mathbb{R}),\ \ln(n),\ \mathrm{e}^n,\ n!,\ n^n$$

2.7.3 Zerbait gehiago segida errekurrenteei buruz

Gogoratu, 2.2 atalean ikusi genuenez, segida errekurrente bat definituta gelditzen dela lehenengo gaia x_1 ezagututa eta x_n-tik x_{n+1} gaia lortzea posible den adierazpena ezagututa. Hau da:

$$x_{n+1} = f(x_n), n \geq 1,\ x_1 \in \mathbb{R}$$

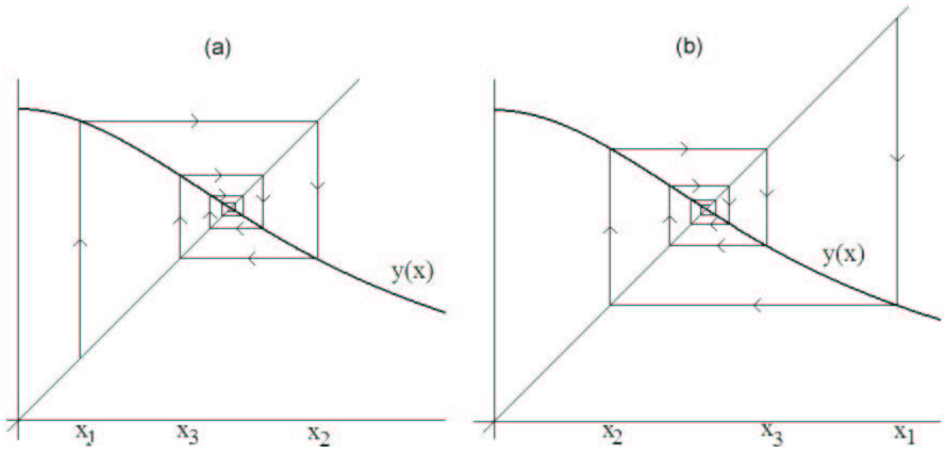
Demagun $f(x)$ funtzioa jarraia dela eta $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ dela. Orduan:

$$x_{n+1} = f(x_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_{n+1}\right) \Rightarrow l = f(l)$$

Beraz, l-ren balioa $y = x$ eta $y = f(x)$ funtzioen arteko ebaki-puntua da. Ikusi hurrengo irudian nola lortzen diren x_n segida konbergenteko (l-ra hurbiltzen da) gaiak:

2.6. Adibidea
Izan bedi $a_{n+1} = 3 \cdot a_n^2$ segida errekurrentea, $a_1 > 0$ izanik.
Kasu honetan, $f(x) = 3x^2$, eta beraz, a_n konbergentea bada, bere limiteak, l-k, hurrengo ekuazioa bete behar du:

$$x = 3x^2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ edo } x = \frac{1}{3}$$



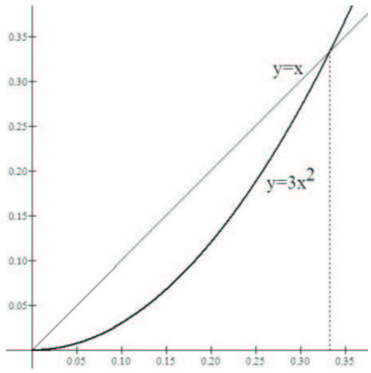
2.21 Irudia: segida errekurrenteen limitea

Adibidez, $a_1 = 1/5$ bada, orduan:
$a_2 = 0.12 \Rightarrow a_3 = 0.0432 \Rightarrow a_4 = 0.0056\ldots$ 0-rantz konbergentea da.
Aldiz, $a_1 = 1/2$ bada:
$a_2 = 0.75 \Rightarrow a_3 = 1.69 \Rightarrow a_4 = 8.54\ldots$ dibergentea da ∞-rantz.
Baina zergatik a_1-en balio baterako segida konbergentea da eta beste baterako ez? Aztertu ondorengo grafikoa:

Erabili grafikoa a_n segida konbergentea dela frogatzeko $a_1 \in [0, 1/3]$ denean, baina dibergentea dela $a_1 > 1/3$ denean.
a_1-en balio ezberdinetarako segidaren konbergentzia aldatzeko arrazoia 4.gaian aztertuko dugun teorema batek ematen digu; puntu finkoaren teoremak, hain zuzen. Teorema horrek a_n-ren konbergentzia ziurtatzeko baldintza nahikoak (baina ez beharrezkoak) ematen dizkigu:

2.2. Teorema *$f(x)$ funtzio jarraitua bada $[a, b]$ tartean eta $f(x) \in [0, 1/3]$ betetzen bada, orduan existitzen da $l \in [a, b]$ puntu bat non $l = f(l)$ den.*

Gure kasuan, $f(x) = 3x^2,\ x \in [0, 1/3],\ f(x) \in [0, 1/3]$ eta beraz, existitzen da puntu finkoren bat $[0, 1/3]$ tartean. Eta beraz, a_n segida beti da konbergentea. Limitea 0 edo 1/3 izan daiteke, baina kasu honetan, segida beti da konbergentea 0-runtz.



2.22 Irudia: $y = 3x^2$ eta $y = x$ funtzioen grafikoak

2.7.4 Zenbakizko serieak

Arazoaren aurkezpena:
Badago hainbat egoera A magnitude jakin bat gai kopuru infinitu baten batura moduan idatz daitekeena:

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

1.go gaian (zenbaki konplexuak) serie infinituetan oinarritutako emaitza batzuk erabili genituen:

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\mathrm{e}^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

eta ondorioz:

$$\mathrm{e} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

2.16. Ariketa
Erabili aurreko adierazpenak hurrengo funtzioen serieak lortzeko:

$$\mathrm{e}^{x^2},\ \cos 2x,\ \sin 3x,\ x \cdot \mathrm{e}^x,\ \frac{\sin x}{x}\ (x \neq 0),\ \sin(-x),\ \cos(-x)$$

Beste emaitza bat: $\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots\right)$
Batugai kopuru finitua hartzen badugu, hurbilketa bat lortuko dugu. Hurbilketa hori balio errealera geroz eta gehiago hurbilduko da batugai kopurua handitzen goazen heinean.

2.17. Ariketa
π eta e-ren garapenak erabiliz, kalkulatu hurrengo hurbilketak e $\approx$ 2.71828 eta π $\approx$ 3.14159 lortu arte.

batugai kopurua	e-ren hurbilketa	π-ren hurbilketa
1		
2		
5		
10		
$\vdots$		

Badakigu zer esan nahi duen seriea ”moztu” eta batugai kopuru finitu batekin bakarrik geratzea:

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \quad \Rightarrow \quad A \approx a_1 + a_2 + a_3$$

Baina zer esan nahi du serie guztia batzeak? Nola egiten da? Hauxe da arazoa.
Arazoa konpontzeak bere zailtasunak ditu, adibidez:
$A = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$ bada, zenbat balio du A-k?

$$A = \begin{cases} (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 0 \\ \\ -1 + (1-1) + (1-1) + (-1+1) + \cdots = -1 \end{cases} \qquad \text{kontraesana!!}$$

Adibide honekin ikusten da, batura finituekin erabilitako propietateak beti ez direla baliozkoak; kasu honetan, propietate elkarkorra da betetzen ez dena:

$$(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3)$$

Baina

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \cdots$$

eta

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots$$

balio ezberdinak har ditzakete.
Nola definitu daiteke $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots ?$
Defini dezagun batura partzialen segida:

$$\begin{aligned} S_1 =& a_1 \\ S_2 =& a_1 + a_2 \\ S_3 =& a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n =& \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

S_n segida bat denez, bere konbergentzia azter dezakegu:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \overset{\text{Notazioa}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

2.7. Adibidea
Har dezagun hurrengo serie geometrikoa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

Bi serie hauen arteko kenketa egingo dugu:
$$\begin{array}{rl} S_n & = 1 + \; r \; + r^2 + \ldots + r^n \\ rS_n & = r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n+1} \\ \hline S_n(1-r) & = 1 - r^{n+1} \end{array}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Beraz, seriearen limitea:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-r} \;, \quad |r| < 1 \text{ denean}$$

Eta ondorioz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-r} & |r| < 1 \text{ denean} \\ \text{dibergentea} & |r| \geq 1 \text{ denean} \end{cases}$$

2.18. Ariketa Aztertu hurrengo kasuak: $r = 1$, $r > 1$ eta $r < 1$.

2.8. Adibidea Zenbat balio du $0.9999999\ldots$ zenbakiak?

$$\begin{aligned} 0.999999999\cdots =& 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots = 9\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \cdots\right) = \\ =& 9\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n \overset{\text{geometrikoa}}{=} 9\left(\frac{1}{1-1/10} - 1\right) = 1 \Rightarrow 0.99999\ldots = 1 \end{aligned}$$

2.19. Ariketa Kalkulatu:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot r^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot r^k \quad (\text{Laguntza: } \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \text{ deribatu})$$

2.20. Ariketa Aztertu hurrengo seriearen konbergentzia:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

2.9. Adibidea Idatzi hurrengo funtzioen serieak batukarien notazioa erabiliz:

$$\mathrm{e}^x, \ \cos x, \ \sin x, \ \mathrm{e}^{x^2}, \ \sin 2x$$

Ebazpena:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\mathrm{e}^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}, \quad \sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, 2^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$