2. Kapitulua

Segidak

Oharra: ikurrarekin markatutako ariketak ebazteko komenigarria izango da funtzioen adierazpen grafiko eta zenbakizko kalkulurako programa informatiko bat erabiltzea, Winplot adibidez.

2.1. Ariketa Arrazoitu hurrengo baieztapenak zuzenak ala okerrak diren:

1. Edozein n baliotarako $a_n > 0$ bada eta $\{a_n\}$ L-rantz badoa, orduan $L > 0$ da.
2. Edozein n baliotarako $a_n \geq 0$ bada eta $\{a_n\}$ L-rantz badoa, orduan $L \geq 0$ da.
3. Edozein n baliotarako $a_n < 0$ bada eta $\{a_n\}$ L-rantz badoa, orduan $L < 0$ da.
4. Edozein n baliotarako $a_n \leq 0$ bada eta $\{a_n\}$ L-rantz badoa, orduan $L \leq 0$ da.
5. $\{a_n\}$ L-rantz badoa eta $L > 0$ bada, orduan existitzen da segidako gai bat non ondorengo gai guztiak positiboak diren.
6. $\{a_n\}$ L-rantz badoa eta $L < 0$ bada, orduan existitzen da segidako gai bat non ondorengo gai guztiak negatiboak diren.
7. $\{a_n\}$ 0-rantz badoa, ezin dugu ezer ziurtatu an-ren zeinuari buruz.
8. $\{a_n\}$ bornatuta badago orduan konbergentea da.
9. $\{a_n\}$ bornatuta ez badago orduan bere limitea ∞ edo $-\infty$ da.
10. $\{a_n\}$ beherakorra bada orduan konbergentea da.
11. $\{a_n\}$ gorakorra bada orduan konbergentea da.
12. $\{a_n\}$ beherakorra bada eta edozein n-rako $a_n > 0$ bada, orduan konbergentea da.
13. $\{a_n\}$ ez bada ez gorakorra ez beherakorra, orduan limitea $\pm\infty$ da.
14. $\{a_n\}$ L-rantz badoa, a_n inoiz ez da L izango.

2.2. Ariketa Hurrengo segidetatik arrazoitu zein diren konbergenteak eta zein dibergenteak. Kalkulatu limitea segida konbergentea deneko kasuetan:

1. $a_n = \frac{4n^2+7n-1}{n^2+5}$
2. $a_n = \frac{3n^5+13n^2-8n}{14n^9-7n^6-13}$

3. $a_n = \frac{2n^4-7n}{n^2+3}$
4. a_n (gai orokorra) polinomioen arteko zatiketa da.

2.3. Ariketa Segida baten konbergentzi abiaduraren azterketa. Izan bitez ondorengo segida konbergenteak:

$$a_n = 2 + \frac{1}{n}, \quad b_n = 4 + \frac{1}{n^2}, \quad d_n = 1 + \frac{1}{n^4}$$

1. Hiru kasuetan limitearen definizioa aplikatu: L limitetik txiki den distantzia bat hartuta, d, aurkitu segidako m. gaia, non hortik aurrerako gai guztiak $(L-d, L+d)$ tartearen barnean dauden.
2. d balio baterako, konparatu hiru kasuetan lortutako m gaia. Zein ondorio atera daiteke hiru segiden konbergentzi abiadurari buruz?
3. d balio bakoitzerako, lortu dugu m balio bat d-ren menpekoa dena. Beraz, m d-ren funtzio bat da. Adierazi grafikoki $m(d)$ funtzio hori hiru kasuetan eta konparatu bere jokaerak. Zein ondorio atera ditzakegu?
4. Orokorrean m-ren balioa aurkitzea zaila izan daiteke. Bururatzen al zaizu segidarik m-ren balioa zein den aurkitu ezin zaionik?

2.4. Ariketa Hurrengo segiden limitea kalkulatu (existitzekotan). Erabili kalkulagailua behar izanez gero edo L'Hopitalen erregela, posible bada.

1. $n^{\frac{1}{n}}$
2. $\frac{\ln n}{n}$
3. $n \sin(\frac{1}{n})$
4. $\frac{2^n}{n!}$
5. $\frac{n^2}{2^n}$
6. $\frac{n!}{n^n}$
7. $(1 + \frac{A}{n})^n$

2.5. Ariketa Urteberri eguna da eta aurrezteko hurrengo metodoa jarraitzea erabakitzen duzu: lehenengo egunean zentimo bat gordeko duzu, bigarrenean 2, hirugarrenean 3 etb. Urtebete barru aurreztuta edukiko al dituzu 700 euro?

2.6. Ariketa Demagun bi segida dibergente infiniturantz doazela. Zer esan daiteke bi segiden arteko kenketaz?

2.7. Ariketa Demagun segida dibergente bat infiniturantz doala eta beste konbergente bat 0rantz. Zer esan daiteke bien arteko biderkaduraz?

2.8. Ariketa Demagun $\{b_k\}$ segida dibergentea infiniturantz doala eta $\{a_k\}$ bornatua dela. Zer esan daiteke $\left\{\frac{a_k}{b_k}\right\}$ eta $\left\{\frac{b_k}{a_k}\right\}$ segidetaz?

2.9. Ariketa Demagun $\{a_k\}$ segida dibergentea infiniturantz doala. Hurrengo segidaren konbergentzia aztertu:

$$\left(1+\frac{A}{a_k}\right)^{a_k}$$

2.10. Ariketa Demagun $\{a_k\}$ eta $\{b_k\}$ segida dibergenteak infiniturantz doazela. Aztertu hurrengo segidaren konbergentzia:

$$\left(1+\frac{A}{a_k}\right)^{b_k}$$

2.11. Ariketa Hurrengo azterketa egin ondorengo segida errekurtsiboetan $a_{n+1} = f(a_n)$:

1. Kalkulatu limitea, konbergentea dela suposatuz.
2. Aukeratu lehenengo balio bat, a_1, eta kalkulatu ondorengo gai batzuk.
3. Konbergentea al dirudi? Nola eragiten dio konbergentziari a_1-en aukeraketak? Aztertu puntu finkoaren teoremaren bidez.
4. Interpretatu grafikoki aurreko egoera sare-diagrama baten bidez.

   (a) $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{B}{a_n}\right)$

   (b) $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$

   (c) $a_{n+1} = a_n^2 - 2$

   (d) $a_{n+1} = 3^{-a_n}$

   (e) $a_{n+1} = 2 + \frac{5}{{a_n}^2}$

2.12. Ariketa $\{a_n\} = n!$ eta $\{b_n\} = e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}$ segida dibergenteak infiniturantz doaz. Bietatik zein doa azkarrago?

2.13. Ariketa Estimatu batuketaren balioa hurrengo serie konbergenteetan, aldez aurretik gelditze irizpide bat ezarriz. Konparatu kasu bakoitzean beharrezkoa den iterazio kopurua.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3+2}$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k+2}$
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^3}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

2.14. Ariketa Kalkulatu hurrengo serieen balio zehatza:

1. $\sum_{n=3}^{\infty} r^n$
2. $\sum_{n=2}^{\infty} nr^{n+1}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)r^{n+1}$

2.15. Ariketa Konprobatu esperimentalki $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ seriearen dibergentzia. Kalkulatu $M = 10$ balioa gainditzeko zenbat batugai hartu behar diren.

2.16. Ariketa Estimatu ln(3)-ren balioa, $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$ dela jakinik $\forall x \in (-1,1)$.

2.17. Ariketa Estimatu $e^{2.1}$-ren, $\sin(4.25)$-ren eta $\cos(1.32)$-ren balioak, bakoitzari dagokion seriearen garapena erabiliz ($e^x, \sin(x)$ eta $\cos(x)$, hurrenez hurren).