

## 11. Kapituluua

# Fourierren garapena

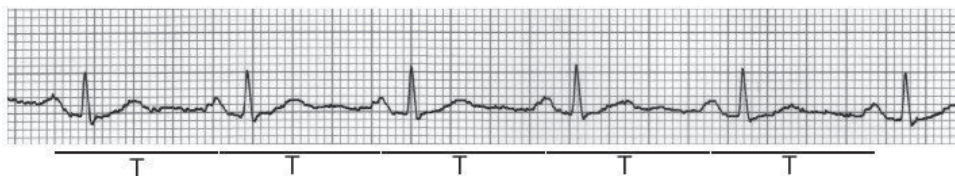


Periodizitateak naturan duen garrantzia begi bistakoa eta ezaguna da. Gure bizitza egunen eta gauen, udaren, neguen, urteen, . . . segidetaz osatuta dago; gure gorputza erritmo fisiologikoen, taupadek eta arnasketek biziarazten dute behin eta berriz; gure espirituak ere, bere erritmo animikoak ditu. Gure jarduera osoa, gure musika, gure jolasak, gure makinak periodizitateak eragiten ditu. Gaur egun ulertzen denez, analisi harmonikoa, naturan errepikatzen diren fenomenoak ikertzeko prozesu matematikoa da. Adimen guztiak, ez matematikoa soilik, errepikapenei erabat lotuta daude. Bera gabe gure pentsaerak ez luke erreferentzia eskemarik egingo. Errepikapenak gure adimen motaren berezko baldintza dira. Kaosa, errepikapenik ez egotearen ondorioa da. Aurkitzen dugun animalia guztiak zeharo ezberdinak balira beraien lokomozio moduetan, organo sententzialetan, elikatzeko moduan, . . . zientzia zoologiko organizaturik edukiko al genuke? Izar bakoitzak bide ezberdina egingo balu, edo, gure egunak eta gauak iraupen ezberdinekoak balira, uniformetasunik gabe, ez genuke daukagun zientzia astronomikoa edukiko. Erreferentziak ulertzeko gure moduak, fenomeno berriak kokatzeko errepikapenezko eskemak eskatzen dizkigu.

*Miguel de Guzmán, Análisi harmonikoaren inpaktuak,  
Zientzia zehatz, Fisiko eta Natura-zientzien errege-akademiara  
sarrerako hitzaldia (Madril, 1983ko Martxoak 23)*

## 11.1 Arazoaren aurkezpena

Miguel de Guzman-en paragrafoak gure inguruan periodizitateak duen garrantziaz hitz egingen du, denbora tarte bakoitzean errepikatzen diren fenomenoetaz, hain zuzen. Ikusi 1 Irudia.



11.1 Irudia: elektrokardiograma baten zatia

Giza elektrokardiograma baten zati bat da, hau da, bihotzak duen jarduera elektrikoaren grafikoa da, denbora aurrera doan heinean. Horrelako grafikoekin bihotzeko gaixotasunak antzematen dira. Ikusten den bezala, bihotzaren jarduera elektrikoaren anplitudearen balioa  $T$  denbora tarte jakin bakoitzean errepikatzen da. Hau da,  $A(t)$ ,  $t$  denboran neurtutako jarduera elektrikoa bada, orduan  $A(t + T) = A(t)$  betetzen da, edozein  $t$  balioetarako.

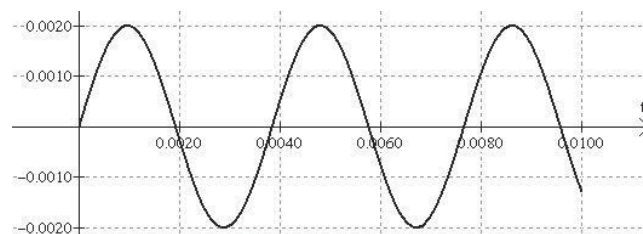
Zientzietan eta ingeniartzan seinale periodiko ugari agertzen dira: argia, soinua, mareak, euriteen periodoak, prezioen gorabeherak, azterketa sismikoen seinaleak, leherketen seinaleak, seinale elektromagnetikoak, etab. Benetako fenomeno baten uhinaren itxura oso konplexua izan daiteke. Aztertu 2 Irudia. Audio digitalaren analisirako software batekin Enya-ren *Marble Halls* abestiaren 0.5 segundo irudikatu ahal izan dugu. Uhinaren anplitudea dezibelioetan adierazitan dago (dB), eta ikus dezakezunez, bere itxura oso nahasia da.



11.2 Irudia: Enya-ren *Marble Halls* abestiaren zatia

Ikusi, aldiz, 3 Irudian agertzen den uhinaren itxura. DO nota da, musika sintetizagailu batek sortutakoa, adierazpen analitiko honen bidez:

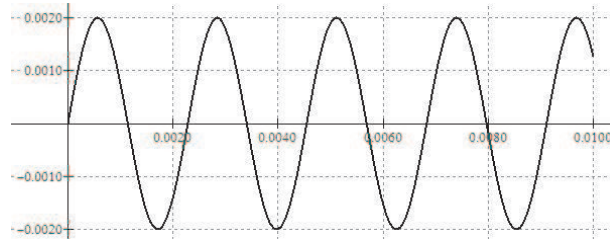
$$A(t) = 0.002 \sin(2\pi 261t).$$



11.3 Irudia: sintetizagailu batek sortutako DO nota

DO nota 261 Hz-ko (ziklo segundoko) frekuentzia duen edozein bibrazioi lotuta dago, eta ez dio eragiten bibrazio hori sortu den moduak. Adibidez, lortuko bazenu mahaian erregela

batekin 261 kolpe segundoko ematea, DO nota lortuko zenuke. Periodoa, uhinak ziklo bat betetzeko behar duen denbora izango da. Kasu honetan,  $T = 1/261 = 0.00383$ . Modu berean, 4 Irudia LA notaren grafikoa da, adierazpen analitikoa  $B(t) = 0.002 \sin(2\pi 438.9t)$  izanik. LA nota 438.9 Hz-ko frekuentzia duen edozein bibrazioari lotuta dago. Kasu honetan, bere periodoa  $T = 1/438.9 = 0.00228$  da.

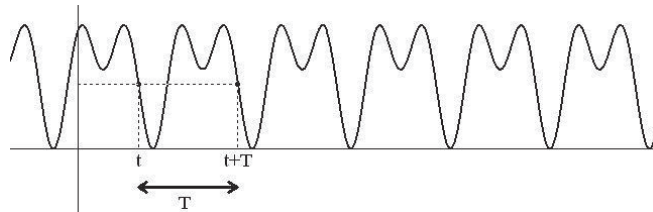


11.4 Irudia: LA nota

Lortu ditugu dagoeneko edozein fenomeno periodiko aztertzeko beharrezkoak izango zaizkigun bi definizio (ikusi 5 Irudia):

**11.1. Definizioa**  $E(t)$  funtzio periodikoa bada,  $E(t)$ -ren oszilazio periodoa  $E(t+T) = E(t)$  betetzen duen  $T$ -ren baliorik txikiena da.

**11.2. Definizioa**  $E(t)$   $T$  periodoko funtzio periodikoa bada,  $E(t)$ -ren  $F$  frekuentzia denbora unitate batean betetzen diren oszilazio kopurua da.

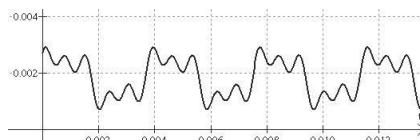


11.5 Irudia: fenomeno periodikoa

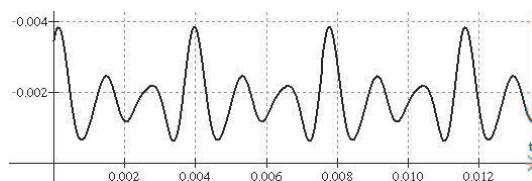
Beraz, seinale periodiko baten  $T$  periodoa, denboraren unitate berdinetan neurtzen da, eta bere  $F$  frekuentzia, berriz, denbora unitateko zikloetan neurtzen da. Denbora unitatea segundoa bada,  $F$  frekuentzia ziklo segundokoetan neurtzen da (Hertzioak, Hz). Orokorrean,

$F = 1/T$  eta  $T = 1/F$ . Adibidez, Lurra bere ardatzarekiko biraka dabil  $F = 1$  bira/eguneko  $= 1/24$  bira/orduko frekuentziarekin. Giza elektrokardiograma arrunt batek 0 eta 100 Hz bitarteko frekuentziak ematen ditu. Demagun momentu jakin batean pertsona baten bihotzaren jarduera elektrikoa 25.6 Hz-koa dela. Horrek esan nahi du periodoa  $T = 1/25 = 0.39$  segundokoa dela. Ondorioz, pertsona horren bihotzaren jarduera elektrikoa 0.39 segundoro errepikatzen da.

Aztertu, orain, 6 eta 7 Irudietan agertzen diren uhinen itxurak; musika sintetizagailu batek sortutako klarinete (6 Irudia) eta fagot (7 Irudia) soinuaren DO notari dagozkie.



11.6 Irudia: klarinetearen DO nota



11.7 Irudia: fagotaren DO nota

Sintetizagailuak erabili ditzakeen bi funtzioen adierazpen analitikoak ondorengoak dira:

Klarinetearen DO notarentzat:

$$A(t) = 0.0007(2.6 + 0.5 \cos(2\pi Ft) + \sin(2\pi Ft) + 0.3 \cos(6\pi Ft) + 0.4 \sin(6\pi Ft) + 0.5 \cos(10\pi Ft) + 0.16 \sin(10\pi Ft)) \quad (1)$$

Fagotaren DO notarentzat:

$$B(t) = 0.0007(2.6 + 0.32 \cos(2\pi Ft) + 0.04 \sin(2\pi Ft) + 0.6 \cos(4\pi Ft) + 0.2 \sin(4\pi Ft) + \cos(6\pi Ft) + \sin(6\pi Ft) + 0.2 \cos(8\pi Ft) + 0.3 \sin(8\pi Ft) + 0.2 \cos(10\pi Ft) + 0.1 \sin(10\pi Ft)) \quad (2)$$

0.0007 eta 2.6 balioak bi adierazpenetan agertzen dira, baina, eskalaren eta translazioaren terminoak besterik ez dira, hurrenez hurren.  $F$  balioak DO nota bereizten du, eta kasu honetan, 261 balio du. Baina ikus dezagun nola eraiki diren  $A(t)$  eta  $B(t)$  funtzioak. 1 eta 2 tauletan funtzio bakoitzak dituen gai ezberdinak agertzen dira, eta baita gai bakoitzaren frekuentzia ere. Gai bakoitza funtzioaren harmonikoa deitzen da, eta  $F$ , berriz, seinalearen oinarritzko frekuentzia.

$A(t)$ -ren gaiak:

Harmonikoa	Frekuentzia
$0.000085 \cos(2\pi Ft) + 0.00017 \sin(2\pi Ft)$	$F$
$0.000051 \cos(6\pi Ft) + 0.000068 \sin(6\pi Ft)$	$3F$
$0.000085 \cos(10\pi Ft) + 0.0000272 \sin(10\pi Ft)$	$5F$

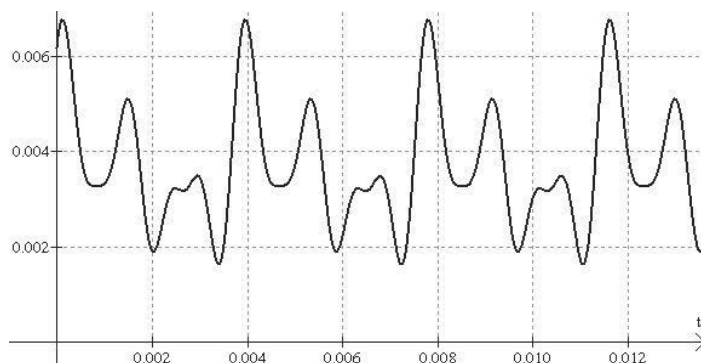
$B(t)$ -ren gaiak:

Harmonikoa	Frekuentzia
$0.0000544 \cos(2\pi Ft) + 0.0000068 \sin(2\pi Ft)$	$F$
$0.000102 \cos(4\pi Ft) + 0.000034 \sin(4\pi Ft)$	$2F$
$0.00017 \cos(6\pi Ft) + 0.00017 \sin(6\pi Ft)$	$3F$
$0.000034 \cos(8\pi Ft) + 0.000051 \sin(8\pi Ft)$	$4F$
$0.000034 \cos(10\pi Ft) + 0.000017 \sin(10\pi Ft)$	$5F$

Ikus daitekeen bezala,  $A(t)$  eta  $B(t)$  notak DO frekuentzia ( $F$ ) duten gaiez osatuta daude eta, gainera, harmoniko batzuen frekuentzia  $F$ -ren multiploa da.  $A(t)$  eta  $B(t)$  funtzioak maiztasunak  $F$ -ren multiploak dituzten harmonikoak batuz lortzen dira, baina azken frekuentzia ere  $F = 261$  Hz-koa da eta periodoa  $T = 1/261 = 0.00383$  segundokoa, edozein DO notatan bezala. Baina ohartu harmoniko bakoitzak notaren doinuan "pisu" bat duela. Adibidez, fagotaren DO notaren laugarren harmonikoa (2 Taularen azken bigarren errenkada)  $\cos(8\pi Ft)$  funtzioari 0.000034-ko pisua emanez eta  $\sin(8\pi Ft)$ -ri 0.000051-ekoa emanez lortzen da. Klarinetearen DO nota, berriz, laugarren harmonikorik gabe sintetizatu da. Fagotaren eta klarinetearen DO notaren arteko ezberdintasuna harmonikoei ematen zaien pisuan datza, maiztasunak  $F$ -ren multiploak dituztelarik.

Adibidez, biolinaren eta flautaren LA notak 438.9 Hz-ko oinarritzko frekuentzia dute, eta, bere harmonikoei 877.8 Hz, 1316.7 Hz, 1755.6 Hz, etab.-eko frekuentziak dituzte. Biolin eta flauta batek LA nota bera jo arren, soinua ezberdina izango da, bere harmonikoei "indar", "pisu" edo anplitude ezberdina dutelako. 3 eta 4 irudietan agertzen diren nota puruak, musikalki aspergarriak eta entzumenarentzat monotonoak dira. Sintetizagailu batek biolinaren edo flautaren imitazio ona lortu dezake, anplitude egokien uhin sinusoidalen konbinazio ezberdinen bidez. Gainera, ideia hauek instrumentu askotako orkestra bat simulatzeko erabili

daitezke. 8 Irudia klarinetaren ((1) ekuazioa eta 6 irudia) eta fagotaren ((2) ekuazioa eta 7 irudia) DO noten batuketarekin lortzen den DO notaren grafikoa da. Lortutako doinu berriak DO izaten jarraitzen du, bere frekuentzia 261 Hz-koa delako orain ere, baina bere harmonikoak eta horien anplitudeak dira soinu berria aurrekoetatik bereizten dituztenak.



11.8 Irudia: aurreko bi DO noten batura

Ikus dezagun zehatzago nola azter daitekeen edozein funtzio senoidalen harmoniko bakoitzaren pisua edota anplitudea. Har dezagun  $F(t)$  funtzio senoidal orokor bat:

$$F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(2k\pi Ft) + b_k \sin(2k\pi Ft) \quad (3)$$

$F(t)$ -ren oinarrizko osagaia  $H_1(t) = a_1 \cos(2\pi Ft) + b_1 \sin(2\pi Ft)$  da; bere frekuentzia  $F$  da. Beste gaiak hauek dira:

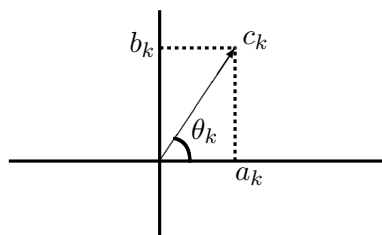
$$H_k(t) = a_k \cos(2k\pi Ft) + b_k \sin(2k\pi Ft), k = 1, \dots, n \quad (4)$$

Orain, harmoniko bakoitzaren anplitudea aurkitzea interesatzen zaigu ((4) ekuazioa). Gure helburua (3) adierazpena kosinu funtzioaren menpe jartzea da:

$$H_k(t) = M \cos(2k\pi Ft + \theta) \quad (5)$$

Hori eginez gero, (3) ekuazioaren anplitudea lortutako  $M$  balioa izango da. Ikus dezagun, beraz, nola bilakatu daitekeen (3) ekuazioa (4). Lehendabizi, kontutan hartu behar dugu,  $a_k$  eta  $b_k$  koefizienteak  $c_k = a_k + ib_k$  zenbaki konplexuaren zati erreal eta irudikari bezala interpretatu daitezkeela (ikus 9 Irudia):





11.9 Irudia: zenbaki konplexuen interpretazio geometrikoa

non:

$$\sin \theta_k = \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}, \quad \cos \theta_k = \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \quad \text{eta} \quad \theta_k = \arctan \frac{b_k}{a_k} \quad (6)$$

Orain, (3) ekuaziotik ondorengoa lortzen dugu:

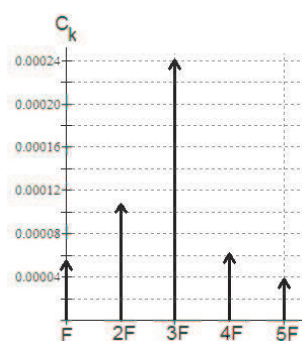
$$\begin{aligned} H_k(t) &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \left( \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \cos(2k\pi Ft) + \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \sin(2k\pi Ft) \right) = \\ &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} (\cos \theta_k \cos 2k\pi Ft + \sin \theta_k \sin 2k\pi Ft) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cos(2k\pi Ft - \theta_k) \quad (7) \end{aligned}$$

Azken berdintza hau  $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$  adierazpen trigonometrikotik lortzen da. Horrela, (3) funtzioaren  $M$  anplitudea  $c_k = a_k + ib_k$  zenbaki konplexuaren moduluaren berdina da. Edo gauza bera dena,  $k$ . harmonikoaren pisua edo anplitudea hauxe da:

$$|c_k| = |a_k + ib_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (8)$$

Guzti honek  $F(t)$  funtzioa grafikoki modu ezberdin batean adierazteko ideia ematen digu. Begiratu 10 irudia. Fagotaren DO notarako ((2) ekuazioa, 7 irudia),  $OX$  ardatzean  $F(t)$ -ren harmonikoen frekuentzien balio ezberdinak kokatu ditugu. Frekuentzia hauek  $F, 2F, 3F, 4F$  eta  $5F$  dira (kasu honetan ez dago beste harmonikorik).  $OY$  ardatzean berriz, harmoniko bakoitzaren anplitudea adierazi dugu, (4) ekuazioaren bidez kalkulatuak. Diagrama honi  $F(t)$ -ren espektroa deitzen zaio eta  $F(t)$ -ren harmonikoen anplitude bakoitzaren ideia bat ematen digu.

**1 Ariketa.** Kalkulatu klarinete eta fagotaren DO notak batuz sintetizatu dugun (7 irudia) DO nota berriaren adierazpen analitiko. Kalkulatu eta bere espektroaren adierazpena

11.10 Irudia:  $F(t)$ -ren frekuentzien balio ezberdinak

eman. Interesatzen bazaizu, aztertutako nota musikalak entzun ditzakezu. Interneten da-  
goen hainbat applets-etako bat erabili dezakezu; horrekin funtzio senoidalak batzean lortzen  
den soinua entzutea posible izango duzu; funtzio horien uhina ondorengo moduan adierazten  
da:

$$F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(2k\pi Ft) + b_k \sin(2k\pi Ft) \quad (9)$$

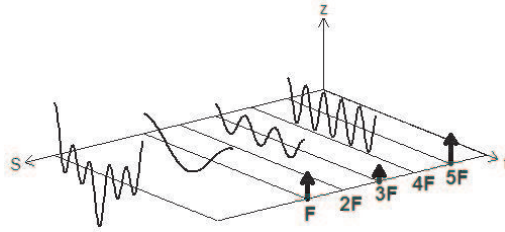
Saiatu adibidez applet honekin:

[http://www.sociedadelainformacion.com/departfqtobarra/ondas/  
SONIDO/SONIDO.HTM](http://www.sociedadelainformacion.com/departfqtobarra/ondas/SONIDO/SONIDO.HTM)

Erabilitako harmonikoen  $n$  kopurua eta  $a_k$  eta  $b_k$  koefizienteen balioak aldatuz, frekuen-  
tzia ( $F$ ) bereko baina doinu ezberdinetako soinuk lortzen dira, harmonikoen anplitudeak  
aldatzen direlako.

Harmoniko bakoitza eta bere anplitudeak ere grafikoki adieraz ditzakegu. Begiratu 11  
irudia, klarinetaren DO notari ((6) ekuazioa eta 5 irudia) dagokio.  $OX$  ardatzean funtzioa-  
ren espektroa kokatu dugu (3 frekuentzia bakarrik daude,  $F$ ,  $3F$  eta  $5F$ );  $OY$  ardatzean be-  
rriz,  $t$  aldagaia dago; eta  $OZ$  ardatzak uhin osoaren balioa eta  $t$  une bakoitzeko harmonikoak  
adierazten ditu.

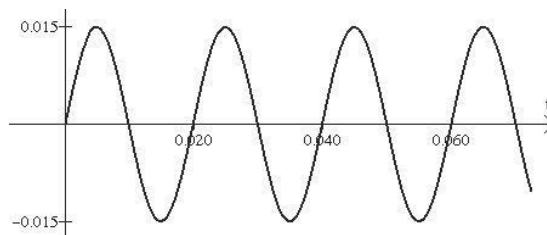
Seinaleen espektroaren azterketak beste hainbat zientzia arlotan ere erabiltzen dira.  
Adibidez, ezberdinak dira bihotz gaixo baten eta osasuntsu baten jardura elektrikoaren  
frekuentziaren osagaiak (ikus 1 irudia); horregatik erabiltzen dira bihotzeko gaixotasunak



11.11 Irudia: klarinetaren DO nota

diagnostikatzeko. Garunaren aktibitate elektrikoaren espektra ere, momentu horretan egiten ari den garuneko jardueraren (lasai egon, problema bat ebatzi, zenbaki zerrenda bat gogoan hartu, etab.) araberakoa da; horrexegatik entzefalograma baten espektraok garunak nola lan egiten duen ezagutzeko balio du.

Ikusi dugunez, nota musikal baten harmonikoen existentziak aberastasuna ematen du, harmonikoen konbinaketan bidez, benetako instrumentu musikalen noten doinuak ederki simulatu ahal direlako. Hala ere, ingeniarietan, harmonikoei tresna mekanikoen edo elektrikoaren funtzionamendurako zailtasunak ekar ditzakete. Ikusi 12 Irudia,  $A(t)$  uhinaren formaren adierazpena da; teorikoki, 0.015 voltiko tentsio alternoa eduki beharko luke eta  $F = 50$  Hz-ko ( $T = 1/F = 0.02s$ ) frekuentzia, hau da,  $A(t) = 0.015 \sin(100\pi t)$ .

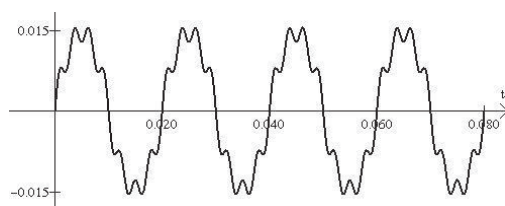
11.12 Irudia:  $A(t)$  uhinaren formaren adierazpena

Egia esanda ordea, konpainia elektrikoek emandako tentsioa ez da zehazki senoidala: distortsio txikiak edo handiak izaten ditu. Baina gainera, ordenagailuak edo motoreen abiadura neurtzaileak bezalako tresnak sarera konektatzen direnean, tresna horiek, sare elektrikorik igortzen diren harmonikoak sortzen dituzte. Adibidez, PC-en alimentazio iturriek 3, 5 eta 7 ordenako harmonikoak bidaltzen dituzte sarera. Sarritan agertzen diren beste harmonikoak 11 eta 13 ordenakoak dira. Aztertu 13 Irudia. 50 Hz-ko aurreko uhina adierazi

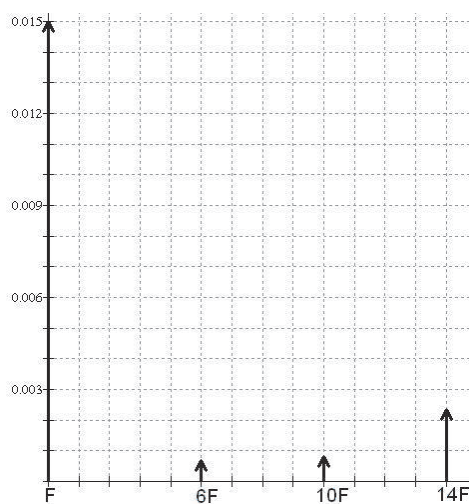
dugu, baina kasu honetan 6, 10 eta 14 ordenako harmonikoekin "kutsatuta".

$$B(t) = A(t) + 0.00068 \sin(600\pi t) + 0.000835 \sin(1000\pi t) + 0.00235 \sin(1400\pi t)$$

(10)



11.13 Irudia: aurreko uhina "kutsatuta"



11.14 Irudia:  $B(t)$ -ren espektroa

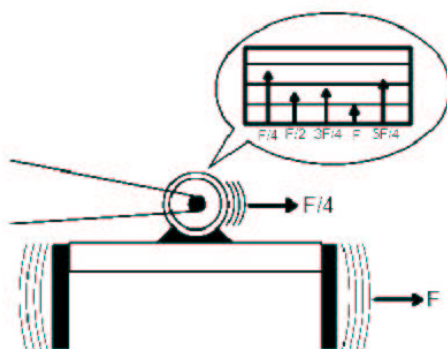
14 Irudian  $B(t)$ -ren espektroa dago. Ikusten denez, bere forma asko alderatzen da  $A(t)$  seinale hutsetik. Harmonikoek askotariko arazoak sortzen dituzte. Adibidez, baterien eta kondentsadoreen gehiegizko kargaren erantzule dira, edo kableen, transformadoreen eta motoren gehiegizko beroketengatik izaten diren galerak eragiten dituzte, edo gaintentsioa,

edo potentzia eta interferentzien galera. Sare elektrikoko harmonikoen existentziaren arazoa konpontzeko, lehendabizi, espektroaren azterketa bat egiten da, sarean zein harmoniko dauden detektatzeko (normalean, 31 ordenarainoko harmonikoak hartzen dira kontutan); ondoren, diseinatutako iragazkiak kokatzen dira, kaltegarriak diren banda frekuentzia jakin baten harmonikoen anplitudea leuntzeko.

#### 1. Arazoaren aurkezpena.

Harmonikoen ondorio kaltegarrien beste adibide bat, sistema mekaniko bibranteetan jasotzen da. Sistema baten (adibidez, kotxe bat) bibrazioa, osagai desberdinen (motorra, engranajeak, transmisio uhalak, haizagailuen hegala, kotxea dabilen errepide mota, etab.) funtzionamenduak eragindako bibrazioen batura da. Ez da erraza, bibrazio esagun batzuk antzematea, beste batzuk berriz, aldizkako kolpeak bezalakoak dira, seinale errepikakorra sortzen dutenak hain zuzen ere. Larria da, batez ere, erresonantziak eragiten duen arazoa. Sistema mekaniko guztiek bibrazio maiztasun naturala dute; maiztasun hau bere egituren ezaugarrien menpekoa da: masa, gogortasuna, indargetze dispositiboak, euskarriak, tutueriak, etb. Kanpo eragile batek sistema mekanikoan bibrazio bat eragiten badu, bibrazio hau bere maiztasun naturalatik gertu dagoelarik, sistemaren bibrazio anplitudea neurrigabe gehitzen da; honek kalte larriak sortu ditzake. Erresonantzi bat bibrazio espektroaren analisiaren bidez antzematen denean beharrezkoa da ezagutzea zein den eragilea eta eragile hau isolatzea. Adibidez, erresonantzia motore batek eragiten badu, agian biraketa abiadura aldatuz konpontzen da. Hemen berriro ere, harmonikoen ondorio kaltegarriak sor ditzakete. Adibidez, demagun sistema mekanikoak  $F$  erresonantzia duen maiztasun naturala duela eta motore batek biratzean  $\frac{F}{4}$  oinarritzko maiztasuna eragiten duela. Motore-biraketaren oinarritzko maiztasunak ez du erresonantziarik eragiten. Hala ere, motorearen bibrazioak harmonikoaren laurdena badu (nahiz eta anplitude gutxiagokoa izan), osagai honek  $\frac{4F}{4} = F$  maiztasuna izango du. Honek sistemaren erresonantzia sortzen du. 15. irudian ikusten da motorearen bibrazio maiztasunen espektro posiblea.  $F$  maiztasuneko harmonikoa intentsitate gutxiagokoa bada ere, sistema mekanikoaren erresonantzi maiztasunarekin bat datorrenez sistemaren erresonantzia lortzen da; kasu honetan bibrazio larriak sortzen dira.

Sistema mekanikoen erresonantziak fenomeno harrigarriak eta baita hondagarriak ere sortzen ditu. Abeslari batzuk kristalezko kopa bat bere ahotsarekin haustearen zergatia erresonantzian dago. Botatzen duten maiztasuna (edo harmoniko batena) eta koparen maiztasun naturala bat datoz. Honen ondorioz, koparen bibrazioa handitzen da kopa hautsi arte. Hau ez da ahotsaren intentsitatearen ondorioa, ahotsaren maiztasunaren ondorioa baizik. Giza ahotsaren maiztasunaren heina 100 eta 400 Hz



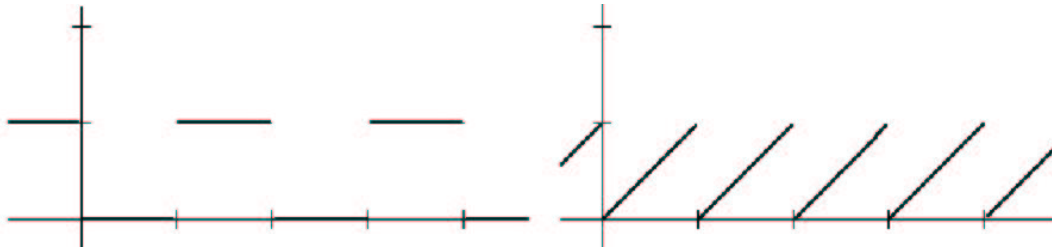
11.15 Irudia: Motorraren erresonantzia

bitartekoa da baina harmoniko ugari ditu; harmoniko hauen maiztasuna gauza desberdinen erresonantzi maiztasunaren berdina izan daiteke; kristalezko koparen maiztasunaren berdina hain zuzen ere. Musika tresnerien ekualizadoreek soinu-seinalearen maiztasun-osagai desberdinen anplitudeak alda ditzakete banda konkretu batzuk biguntzeko (irazi) edo anplifikatzeko. Abibidez, 16 kHz(16000 Hz)-ko bandaren intentsitatea gehituz, soinu arinak agertzen dira: txintak, txintxinak etb. 1 KHz(1000Hz)-ko bandak berriz, abeslariaren ahostsean eragiten du ahotsa entzunezinezkoa izanik. Espeketroaren analisia konpresio algoritmo batzuetan ere erabiltzen da, adibidez mp3-ko kasuan. Algoritmo honen oinarria hau da: giza entzumena mugatua denez, ez du maiztasun banda batzuetatik kanpo dauden soinuak entzutzerik; beraz, entzunezinek diren soinuak baztertu egiten ditu. Azken emaitza, jatorrizko soinuarekiko distortsio gutxi duen soinu seinale da; azkeneko honek gordetze unitatean toki gutxiago betetzen du.

Erresonantziak duen eragin hondagarrien adibide klasikoa, zubi eskita suntsiketarena da; hauxe bera izan zen Tacoman(E.E.B.B.) 1940.eko azaroan gertatu zena. Zubia, 200km/h haizeak jasotzeko disenatua zegoen, baina 60km/h baino zertxobat gehiagoko haize leun batek erresonantzia sortu zuen. Interneten aurki ditzakezu Tacomako zubia erori baino lehen jasotako izugarrizko bibrazioak.

Eraiki baten maiztasun naturala seinale sismiko batean dagoen harmoniko baten maiztasunaren berdina denean eragin hondagarriak ere sor daitezke. Lurrikaren seinale sismikoen heina 0,01 eta 15Hz bitartekoa da; hau dela eta, arrisku gunetan dauden eraikinak egiten dira bere maiztasun naturala heinatik kanpo eta harmonikoetatik kanpo egon dadin.

Ikus dezagun azkeneko adibide hau: ia ia gidari guztiek nabaritu dute bibrazio mota



11.16 Irudia: Funtzio periodikoen adibideak

bitxi bat bere kotxean. Abiadura dexentean, 110km/h adibidez, bolantean nabaritzen den bibrazio bat agertzen da; bibrazio hau abiadura handitzean, 120km/h adibidez, desagertzen da. Ia berriak edo zaharrak diren kotxe gehienek abiadura heina konkretu baterako bibrazioak jasotzen dituzte. Bibrazio hauek errensonantziaren ondorio izan daitezke. Abiadura dexentean, gurpilen biraketa maiztasuna( edo maiztasun honen multiploa) indargetzaileen bibrazio naturalaren maiztasunaren berdina da bolantean bibrazioa sortzen dutelarik. Arazo hau honela konpontzen da: gurpilen hagnetan kontrapisu txiki batzuk jartzen dira oreka lortzeko; modu honetan sistemaren erresonantzi maiztasuna aldatu egiten da.

- (a) Demagun  $F(t)$  seinale periodikoa ondorengo itxurakoa dela:

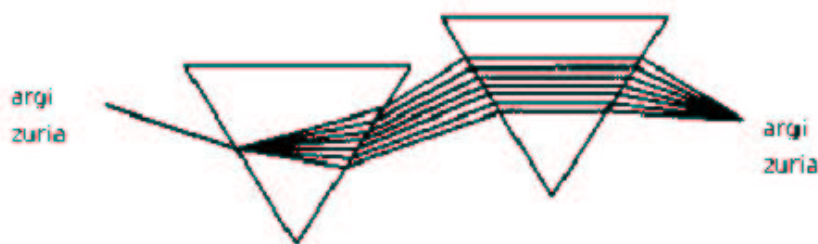
$$F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(2k\pi Ft) + b_k \sin(2k\pi Ft) \quad (11.1)$$

Kasu honetan oso erraza da bere espektroa aztertzea.  $k$ .garren harmonikoaren  $c_k$  anplitudea hau da:

$$|c_k| = |a_k + b_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (11.2)$$

Baina, zer gertatzen da seinale periodikoa sinusoidal ez bada?. 16 irudian, Ingenieritzan erabiltzen diren seinale ez sinusoidalen bi adibide agertzen dira: pulsu errektangularra eta zerra-hortz uhina. Hautazko seinale periodikoek harmonikoak onartuko dituzte?. Hala bada, nola kalkulatu dira beraien koefizienteak?.

- (b) Eta  $F(t)$ -ren balioen lagina besterik ez badugu, hau da, adierazpen analitikoa ezezaguna bada?. Hau, Ingenieritzan askotan gertatzen da. Ikertu nahi dugun magnitudearen balio batzuk neurtzen dira, adibidez, tentsioa edo sare elektrikoa-ren intentsitatea, indarra, motore baten potentzia, malguki baten desplazamen-



11.17 Irudia: Prisma

dua, etb. Balio hauek ordenagailuan gordetzen dira tratamendu bereziren bat aplikatzeko. Nola kalkulatu da seinalearen espektroa kasu honetan? Azaldu diren arazoak hurrengo ataleetan ebatziko ditugu.

## 2. Funtzio periodiko baten Fourierren seriezko garapena.

### (a) $F(t)$ funtzioaren Fourierren seriea.

16 irudian agertzen diren bezalako  $F(t)$  funtzioak ez dira trigonometrikoak; beraz, ez dago ondorengo eran idazterik:

1671 urtean Newton-ek frogatu zuen eguzkiaren argia zazpi kolore desberdinen batura dela; kolore hauek beirazko prisma batetik argi txuria sarraraztean ikusgai dira (ikus 17 irudia). Newton-ek berak koloreetako banda hauek espektro izendatu zituen. Bestalde, 7 koloreetako sorta hori alderantzizkatu prisma batetik sarraraztean, koloreak berriro nahasten dira jatorrizko argi txuria sortzen dutelarik.

Beraz, lehenengo prismak seinalea deskonposatzen du (analisi) eta bigarrenak zatiak nahasten ditu jatorrizko seinalea sortzeko (sintesia). Horietako kolore bati prismara iristen uzten ez badiogu (adibidez, kartoi mehe batekin eskutatuz), sortutako argi berria ez da txuria izango. Argi berri bat sintetizatu egingo dugu. Hauxe bera da aurreko atalan egin genuena soinu-seinaleei buruz hitz egin genuenean: soinua osatzen zituzten harmoniko desberdinak aldatu genituen. Gainera, soinu-seinale eta argi-seinaleen artean dagoen desberdintasun garrantzitsu bat maiztasuna da. Argi-seinaleen maiztasunak askoz handiagoak dira. Adibidez, argi ikusgaiaren uhin-luzera (matematikari periodoa deritza) 400 eta 700 nanometro artean dago (nanometro bat  $10^{-9}$  metro da).



Edozein  $F(t)$  seinale periodikoa funtzio sinusoidalen baturan deskonposatu nahi badugu, segituan konturatzen gera orokorrean ez dagoela batura finituan egiterik. 17. irudian agertzen diren bezalako  $F(t)$  funtzio periodikoak ez dira trigonometrikoak; beraz, ez dago ondorengo eran idazterik

$$F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(2k\pi Ft) + b_k \sin(2k\pi Ft) \quad (11.3)$$

Dagoen aukera bakarra serie infinitu baten bidez idaztea da. Hau ez da  $F(t)$  funtzioa funtziozko serie infinitu baten bidez idazten dugun lehenengo aldia. Adibidez,  $F(t) = e^t$  funtzioa ez dago idazterik  $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$  berredura finituko seriean, bai ordea berredura infinituko seriean. Mc-Laurinen ondorengo seriea da:

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \quad (11.4)$$

Izan bedi  $F(t)$   $T$  (edo  $F = \frac{1}{T}$  maiztasuna) periodoko funtzio periodikoa. Ikus dezagun nola idatz dezakegun  $F(t)$  funtzioa  $a_k \cos(2k\pi Ft) + b_k \sin(2k\pi Ft)$  itxurako funtzio trigonometrikoen batura erabiliz. Hau da:

$$F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(2k\pi Ft) + b_k \sin(2k\pi Ft) \quad (11.5)$$

Serie honi  $F(t)$ -ren Fourierren seriea deritzo.

(b)  $a_k, b_k$  Fourierren seriearen koefizienteen kalkulua.

Koefizienteak kalkulatzeko ondorengo berdintzak erabiliko ditugu:

i.

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2k\pi t}{T} \cos \frac{2n\pi t}{T} dt = 0 \quad (11.6)$$

ii.

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2k\pi t}{T} \sin \frac{2n\pi t}{T} dt = 0 \quad (11.7)$$

iii.

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2k\pi t}{T} \sin \frac{2n\pi t}{T} dt = 0 \quad (11.8)$$

iv.

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 \frac{2k\pi t}{T} dt = \frac{T}{2} \quad (11.9)$$

v.

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 \frac{2k\pi t}{T} dt = \frac{T}{2} \quad (11.10)$$

Izan bedi  $F(t)$  ondorengo funtzioa:

$$F(t) = a_0 + a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi t}{T} \quad (F = \frac{1}{T}) \quad (11.11)$$

$a_0$  koefizientea kalkulatzeko ondorengo integralak ebatzi behar dira:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2k\pi t}{T} dt = \frac{T}{2k\pi} \sin \frac{2k\pi t}{T} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0 \quad (11.12)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2k\pi t}{T} dt = 0 \quad (11.13)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) dt \quad (11.14)$$

$a_k$  koefizientea kalkulatzeko 6.11 ekuazioa  $\cos \frac{2k\pi t}{T}$  faktoreaz biderkatuz gero  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  tartean integratzen dugu:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_0 \cos \frac{2k\pi t}{T} dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_k \cos^2 \frac{2k\pi t}{T} dt + (11.15)$$

$$+ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} b_k \cos \frac{2k\pi t}{T} \sin \frac{2k\pi t}{T} dt \quad (11.16)$$

6.7 eta 6.9 ekuazioak erabiliz eta kontutan hartuz  $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2k\pi t}{T} dt = 0$  dela aurreko ekuazioa ondorengo eran geratzen zaigu:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt = a_k \frac{T}{2} \Rightarrow a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt \quad (11.17)$$

$b_k$  koefizientea antzeko eran kalkulatu da. 6.11 ekuazioa  $\sin \frac{2k\pi t}{T}$  faktoreaz biderkatuz gero  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  tartean integratzen dugu:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_0 \sin \frac{2k\pi t}{T} dt + \quad (11.18)$$

$$+ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_k \sin \frac{2k\pi t}{T} \cos \frac{2k\pi t}{T} dt + \quad (11.19)$$

$$+ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} b_k \sin^2 \frac{2k\pi t}{T} dt \quad (11.20)$$

6.7 eta 6.10 ekuazioak erabiliz eta kontutan hartuz  $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2k\pi t}{T} dt = 0$  dela aurreko ekuazioa ondorengo eran geratzen zaigu:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt = b_k \frac{T}{2} \Rightarrow b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt \quad (11.21)$$

Kontsidera dezagun Fourierren serie osoa:

$$F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi t}{T} \quad (11.22)$$

Aurreko prozedura erabiliz  $a_k$  eta  $b_k$  koefizienteen adierazpenak lortzen dira. Adibidez,  $\cos \frac{2k\pi t}{T}$  faktoreaz biderkatuz gero  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  tartean integratzen dugu:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_0 \cos \frac{2n\pi t}{T} dt + \quad (11.23)$$

$$+ \left( \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} \cos \frac{2n\pi t}{T} dt + \quad (11.24)$$

$$+ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} b_k \cos \frac{2k\pi t}{T} \sin \frac{2n\pi t}{T} dt \right) \quad (11.25)$$

Beraz, 6.7 eta 6.9 ekuazioak erabiliz:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt \quad (11.26)$$

Modu honetan kalkulatzen dira baita ondorengo koefizienteak:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \sin \frac{2n\pi t}{T} dt \quad \text{eta} \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) dt \quad (11.27)$$

**11.1. Ariketa** Frogatu Fourierren  $a_0$ ,  $a_n$  eta  $b_n$  koefizienteak kalkulatzeko integral bakoitza  $[c, c + T]$  itxurako hautazko tarte batean kalkula daitekeela, non  $c$  zenbaki erreal bat den. Beraz,  $F(t)$ -ren Fourierren koefizienteak ondorengo formula orokorrak erabilia kalkula daitezke:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) dt \quad (11.28)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt \quad (11.29)$$

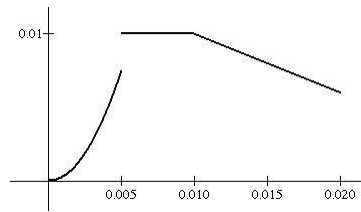
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \sin \frac{2n\pi t}{T} dt \quad (11.30)$$

## 11.2 Fourierren seriearen konbergentzia

Fourierren seriearen  $a_k$  eta  $b_k$  koefizienteak bilatzerakoan gauza bat ez gara arduratu. (11.31) berdinketa lortzerakoan batura infinitu baten integrala eta integralen batura infinitua berdinak direla suposatu dugu. Hau da, berdinketa hau betetzen dela suposatu dugu:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi t}{T} \right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \left( a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi t}{T} \right) dt \quad (11.31)$$

Badakigu integragarriak diren funtzioen batura finitua, funtzio integragarria dela eta baturaren integrala integralak batuz lortzen dela. Baina, propietate hori batura infinitua



11.18 Irudia: Zatika monotonoa den funtzioa

dugunean ere betetzen al da? Ez beti. Batura infinitu bat gaika integratzea edo deribatzea konbergentzia uniformearekin elkartuta dago. Konbergentzia uniformea kontzeptu aurreratu da eta ez dugu hemen aztertuko.

Beste arazo batez arduratuko gara:

$F(t)$  funtzio baten  $a_0, a_k, b_k$   $k = 1, 2, \dots$  Fourierren seriearen koefizienteak lortu ditugunean seguru al da seriea edozein  $t$ -n  $F(t)$ -ra konbergentzen duela? Hau da, (11.32) ekuazioa betetzen den ala ez ezagutzea.

$$F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi t}{T} \quad (11.32)$$

Berehala puntuka konbergentziari buruzko garrantzizko, eta ingeniarietan azaltzen diren ea funtzio guztiekin erabili daiteken, teorema bat enuntziatuko dugu. Baina horren aurretik zatika monotonoa den funtzioa definituko dugu.

**11.3. Definizioa**  $F(t)$  funtzioa zatika monotonoa da  $(a, b)$  tartean,  $F(t)$  funtzioa gorakorra, beherakorra edo konstantea denean era honetako tarte batzuentzat.

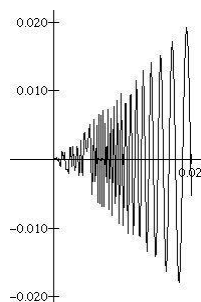
$$\{(a, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_n, b) \mid (a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < b)\}$$

Adibidez, (11.18) irudian adierazten den funtzioa zatika monotonoa da  $(0, 0.02)$  tartean,  $(0, 0.005)$ ,  $(0.005, 0.01)$  eta  $(0.01, 0.02)$   $F(t)$  funtzioa hurrenez hurren gorakorra, konstantea eta beherakorra delako.

Aldiz, (11.19) irudian adierazten den  $F(t) = t \sin(1/t)$  funtzioak  $(0, 0.02)$  tartean infinitu maximo eta minimo ditu. Beraz ez da zatika monotonoa.

Fourierren seriearen konbergentziaren teorema enuntziatuko dugu

### 11.1. Teorema Dirichlet baldintzak



11.19 Irudia: Zatika monotonoa ez den funtzioa

$F(t)$  funtzioa  $T$  periodo duen funtzio periodikoa, bornatua eta zatika monotonoa baldin bada  $(-T/2, T/2)$  tartean

$$S(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi t}{T}$$

$F(t)$ -ren Fourierren seriea konbergentea da edozein  $t$ -n.  $S(t)$  baturaren limitea era honetan lortzen dugu:

- $t_0$  puntuan  $F(t)$  jarraitua baldin bada, orduan  $S(t_0) = F(t_0)$ .
- $t_0$  puntuan  $F(t)$  jarraitua ez bada, orduan  $S(t_0)$ -ren limitea  $F(t)$  funtzioaren  $t_0$  puntuan alboko limiteen batezbestekoa da. Hau da

$$S(t_0) = \frac{F(t_0^+) + F(t_0^-)}{2}$$

### 11.3 Fourierren garapena funtzio bakoiti eta bikoien kasuan

$F(t)$  funtzioaren fourierren koefizienteak era honetan lortu ditugu:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) dt$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt$$

Hiru adierazpen hauetan integralak  $[-T/2, T/2]$  tarte simetrikoan lortzen dira.  $[-L, L]$  tartean definitutako  $G(x)$  edozein funtzioen integrala errazagoa lortzen da funtzioa bakoitia edo bikoitia denean.

Zehazki,  $G(x)$  funtzioa bikoitia denean (ikus (11.20-a) irudia), hau da,  $G(-x) = G(x)$   $[-L, L]$  tartean betetzen duenean,

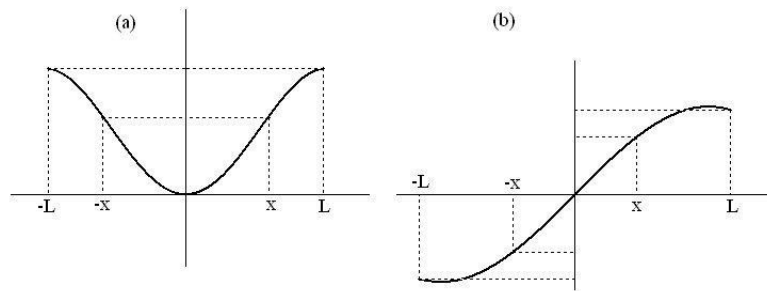
$$\int_{-L}^L G(x) dx = 2 \int_0^L G(x) dx$$

betetzen da.

Eta  $G(x)$  funtzioa bakoitia denean (ikus (11.20-b) irudia), hau da,  $G(-x) = -G(x)$   $[-L, L]$  tartean betetzen duenean,

$$\int_{-L}^L G(x) dx = 0$$

betetzen da.



11.20 Irudia: Funtzio bikoitia eta bakoitia

**11.2. Ariketa** Honako propietate hauek egiaztatu arrazoiak emanaz.

1.  $F(t)$  funtzioa bikoitia bada  $[-T/2, T/2]$  tartean, orduan

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} F(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} F(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt$$

$$b_k = 0 \quad \forall k$$

betetzen dira.

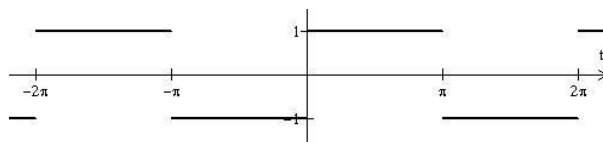
2.  $F(t)$  funtzioa bakoitia bada  $[-T/2, T/2]$  tartean, orduan

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0 \quad \forall k$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} F(t) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt$$

**11.1. Adibidea** (11.21) irudian adierazten den  $F(t)$  funtzioa periodikoa da, eta  $2\pi$  periodoa du. Lortu Fourierren seriea, bere konbergentzia aztertu eta maiztasunen espektroa lortu.



11.21 Irudia: (11.1) adibidearen adierazpen grafikoa

$$F(t) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$T = 2\pi$  da eta funtzioa bakoitia da, beraz  $a_k = 0 \quad \forall k$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin kt dt = -\frac{2}{\pi} \frac{\cos kt}{k} \Big|_{t=0}^{t=\pi} = \\ &= -\frac{2}{k\pi} (\cos k\pi - 1) = -\frac{2}{k\pi} \left( (-1)^k - 1 \right) = \\ &= \begin{cases} 0 & k \text{ bikoitia denean} \\ \frac{4}{k\pi} & k \text{ bakoitia denean} \end{cases} \end{aligned}$$



Beraz

$$S(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \dots \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$$

Konbergentzia aztertzerakoan,  $F(t)$ -k Dirichlet baldintzak betetzen duenez

- $(-\pi, 0)$  eta  $(0, \pi)$  tartetan  $F(t)$  jarraitua denez  $S(t) = F(t)$  da.
- $t = -\pi$  puntuan,  $S(-\pi) = (1 - 1)/2 = 0$
- $t = 0$  puntuan,  $S(0) = (-1 + 1)/2 = 0$
- $t = \pi$  puntuan,  $S(\pi) = (1 - 1)/2 = 0$

$[-\pi, \pi)$  tartean ez dagoen edozein  $t$  punturentzat antzerakoa dugu funtzioa periodikoa delako.

(11.22) irudian Fourierren garapen horren batura hauek adierazita daude.

$$S_1(t) = \frac{4}{\pi} \sin t$$

$$S_3(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin t + \frac{\sin 3t}{3} \right)$$

$$S_5(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} \right)$$

$$S_7(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \frac{\sin 7t}{7} \right)$$

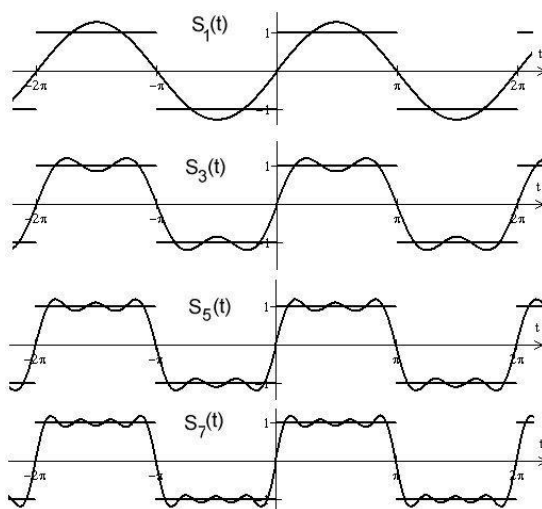
Garbi ikus dezakezu batugaien kopurua handitzen denean hurbilketa hobea dugula. Aipatzekoa da batura hauek jarraituak direla  $F(t)$ -ren etengunetan.

$F(t)$ -ren espektroa aztertzerakoan, zera dugu

$$|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{4}{k\pi}$$

Harmoniko bikoitirik ez dugu eta bakoitien anplitudea txikitzen doa  $k$  handitzen denean. (11.23) irudian  $F(t)$ -ren lehenengo 11 lerro espektralak ditugu.

**11.3. Ariketa** (??) irudian adierazten diren funtzioen Fourierren seriea lortu. Serie horien konbergentzia aztertu.



11.22 Irudia: Fourierren garapenaren bidez hurbilketak

**11.4. Ariketa** Aurreko ariketan eskatzen dena berriro egin  $2\pi$  periodoa duten funtzio periodiko hauekin.

1.  $F(t) = t$  para  $t \in [-\pi, \pi]$
2.  $G(t) = \begin{cases} -t & t \in [-\pi, 0] \\ t & t \in [0, \pi] \end{cases}$  denean

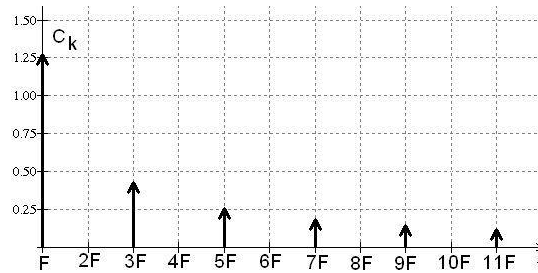
#### 11.4 Fourier-en seriearen koefizienteen interpretazioa

Gogora dezagun Fourierren seriearen koefizienteen adierazpenak,

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) dt$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt.$$



11.23 Irudia: Lerro espektralak

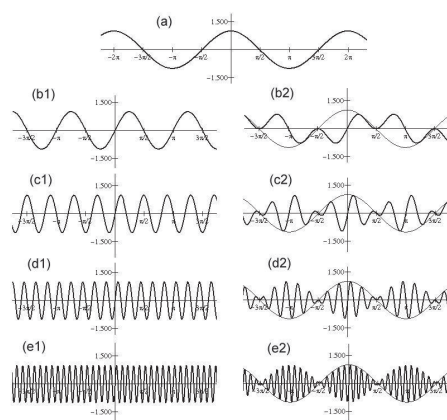
Hiru adierazpen horietan,  $[-T/2, T/2]$  tartean funtzio bat integratzen da eta emaitza  $T$ -z zatitzen da, beraz, funtzioaren batezbesteko balioa lortzen ari gara tarte horretan (edo periodoa luzera bezala duen beste tarte baten  $[0, T]$  tartean adibidez).

1.  $F(t)$ -ren Fourierren seriearen  $a_0$  koefizientea  $F(t)$  funtzioaren batezbestekoa da, periodoa luzera bezala duen tarteren baten.
2.  $F(t)$ -ren Fourierren seriearen  $a_k$  koefizientea  $F(t) \cos(2k\pi t/T)$  funtzioaren batezbestekoaren erdia da, periodoa luzera bezala duen tarteren baten.
3.  $F(t)$ -ren Fourierren seriearen  $b_k$  koefizientea  $F(t) \sin(2k\pi t/T)$  funtzioaren batezbestekoaren erdia da, periodoa luzera bezala duen tarteren baten.

$F(t) \cos(2k\pi t/T)$  eta  $F(t) \sin(2k\pi t/T)$  funtzioen esan nahia gure jakinmina piztu daiteke. Ikus dezagun funtzio horien esanahia.

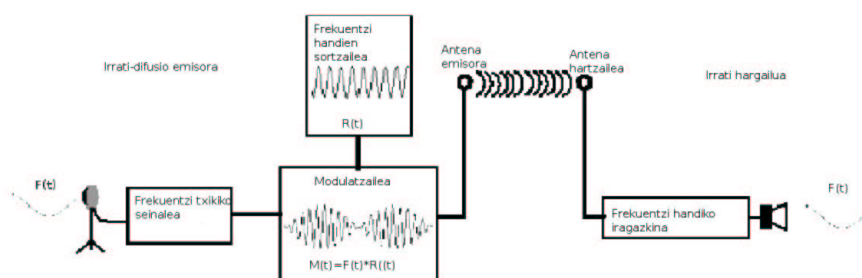
(11.24) irudian (a)-n  $F(t) = \cos(t)$  funtzioaren adierazpena dugu. (b1), (c1), (d1) eta (e1)-n  $\sin(2k\pi t/T) = \sin(kt)$   $k = 2, 5, 10$  eta  $20$ . funtzioak ditugu eta (b2), (c2), (d2) eta (e2)-n  $F(t) \sin(2k\pi t/T) = F(t) \sin(kt)$  funtzioak. Azkenengo irudi hauetan marra finaz  $F(t)$  funtzioa ere ikus dezakegu. Ikus dezakegunez,  $F(t) \sin(2k\pi t/T)$ -ren anplitudea  $F(t)$ -k finkatzen du, eta  $F(t) \sin(2k\pi t/T)$  -k, hala nola,  $F(t)$  'biltzen' du.  $F(t)$ -k  $\sin(2k\pi t/T)$ -ren anplitudea modulatzeko eta  $\sin(2k\pi t/T)$  seinale garraiatzailea eta  $F(t)$  seinale modulatzailerela esaten dugu. Hau era honetan esan dezakegu,  $F(t) \sin(2k\pi t/T)$  seinaleak,  $F(t)$ -ren bidez  $\sin(2k\pi t/T)$  seinale modulatuak, seinale modulatzaileraren informazioa daramala bere barnean.

Eta anplitudearen modulazioaren erabilpen bat irrati-difusioko Anplitude Modulatuan (AM) aurkitzen dugu. (11.25) irudian audio-seinalea,  $F(t)$  emisoraren bidez bidaltzea nahi da.  $F(t)$  seinalea entzungarria da, beraz, frekuentzia txikikoa.  $F(t)$  seinalea (??) iru-



11.24 Irudia: Funtzio modulatuak

dian adierazitako *Marble Halls* gaiaren zatia izan liteke.  $F(t)$  seinale hori ez da irati-frekuentzien seinalea, beraz ezin da transmititu irati-uhinen bidez. Transmititzeko seinale hori irati-frekuentzien garraiatzailea den  $R(t)$  seinale baten sartzen da. Adibidez, AM-n emititzen duen emisoreak  $F = 600$  frekuentzia erabiltzen badu, seinale garraiatzailea  $R(t) = \sin(2\pi Ft)$  izan daiteke. Seinale hau  $F(t)$ -ren bidez modulatu da eta  $M(t) = F(t)R(t) = F(t)\sin(2\pi Ft)$  lortzen dugu. Irratia pitzen dugunean eta dialean 600 KHz aukeratzen dugunean frekuentzia handiko seinalea iragazten da eta entzun dezakegun seinalea lortzen da eta iratiaren bozgafluaren bidez entzuten dugu. Praktikan seinale hori irratira heltzen denean interferentziak eta zarata ditu eta bere espeketroak frekuentzia hein zabala du. Gainera ezinezkoa da zeharo iragaztea entzungarria den seinale hutsa lortzeko. Horregatik batzutan seinalea entzungaitza izan daiteke.



11.25 Irudia: AM Irrati-difusio

Itzul gaitezen Fourierren seriera eta bere  $a_k$  y  $b_k$  koefizienteen esanahira.

1.  $a_k$  koefizienteak  $\cos(2k\pi t/T)$  funtzioak  $F(t)$ -ren bidez modulaturatutako funtzioen batezbestekoen erdiak dira, periodoa luzera bezala duen tarteren baten.
2.  $b_k$  koefizienteak  $\sin(2k\pi t/T)$  funtzioak  $F(t)$ -ren bidez modulaturatutako funtzioen batezbestekoen erdiak da, periodoa luzera bezala duen tarteren baten.

## 11.5 Konputazio arazoak

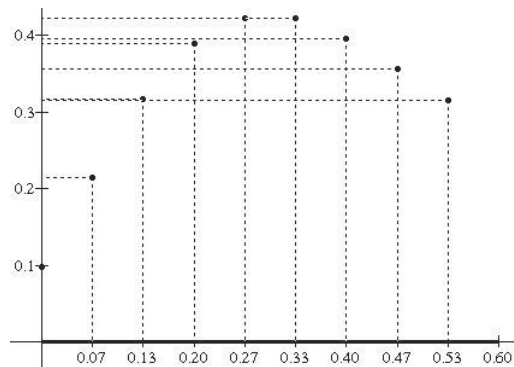
### 11.5.1 Seinaleen laginketa

Praktikan, seinale baten espektroen analisisa egin behar denean, ez dugu ezagutzen  $F(t)$  funtzioaren adierazpen analitikoa, baizik eta  $F(t)$ -ren balioen lagin bat. Demagun  $[0, T]$  tartean  $F(t)$  analisisa egitea nahi dugula. Uniformeki tartekatutako  $N$  puntu edo une hartzen ditugu eta seinalearen balioak neurtzen ditugu. Hau da,

$$t_r = rT/N, \quad y_r = F(t_r), r = 0, \dots, N-1$$

balioak.

(11.26) irudian  $F(t)$  seinale baten  $N = 9$  balioez osatutako lagina dugu. Tartea  $[0, 0.6]$  denez lagineko puntuen arteko tartea  $T_S = 0.6/9 = 0.06667$  edo laginketaren maiztasuna  $F_S = 1/T_S = 15$  lagin segundoko.



11.26 Irudia: Laginketa

(11.1) taulan laginketaren uneak  $t_r$  eta neurtutako balioak  $F(t_r)$ ,  $r = 0, \dots, 8$  azaltzen dira.

$r$	$t_r$	$F(t_r)$
0	0.00000	0.09728
1	0.06667	0.21350
2	0.13333	0.31781
3	0.20000	0.38911
4	0.26667	0.42296
5	0.33333	0.42201
6	0.40000	0.39548
7	0.46667	0.35580
8	0.53333	0.31512

11.1 Taula: Laginketaren balioak

**11.5. Ariketa**  $F(t)$  seinalearen  $[a, b]$  tartean  $N$  balioz osatutako lagina lortzea nahi dugu. Laginketaren maiztasunaren  $F_S$  balioa lortu eta laginketaren periodoa ( $T_S = 1/F_S$ ).  $t_r$  laginketaren puntuak lortzeko adierazpena lortu. Adierazpen hori erabili  $F(t) = 2 \sin(2\pi t)$  funtzioaren 15 balio lortzeko  $[0.25, 0.25 + T]$  tartean.

Normalki  $F(t)$ -ren adierazpen analitikoa eskuragarri ez dugunez ezinezkoa da bere balio guztiak gordetzea, eta laginketa beharrezkoa dugu seinalearen portaera aztertzeko. Baina, zer nolako laginketa-maiztasun erabili behar dugu? Laginketaren bidez  $F(t)$ -ren osagarri frekuentzialak lor ditzakegu? Laginketaren teorema laginketaren maiztasun txikiena ematen digu.

## 11.6 Laginketaren teorema

Suposa dezagun  $F(t)$   $T$  periodoko seinale periodikoa dela ( $F = 1/T$ ) eta  $F(t)$ -ren maiztasun-erakia ezagutu nahi dugula. Hau da,  $a_k \cos(2k\pi F) + b_k \sin(2k\pi F)$   $F(t)$ -ren osagai harmonikoak ezagutu nahi ditugu. Horretarako,  $[0, T]$  tartean  $F(t)$  seinalearen lagin bat aukeratuko dugu, laginketa-maiztasun bat erabiliz,  $F_S = \frac{N}{T} = NF$ , non  $N$  laginaren puntuen kopurua den. Hau da,

$$t_r = \frac{r}{F_S} = \frac{rT}{N}, y_r = F(t_r), r = 0, \dots, N - 1$$

Suposa dezagun  $F(t)$ -ren maiztasun harmonikoen kopurua finitua dela.  $2F, 3F, \dots, nF = F_{max}$  maiztasunak dituzten harmonikoak ezagutu nahi ditugu. Ba, Laginketaren teorema

erabili behar dugun laginketa-maiztasunak  $2F_{max}$  baino handiagoa izan behar duela esaten digu.

Har dezagun, adibidez, honako funtzio hau:

$$F(t) = \sin(20\pi t) + \cos(40\pi t) - \sin(100\pi t)$$

$F(t)$ -ren oinarritzko maiztasuna  $F = 10\text{Hz}$  da ( $T = 1/10 = 0.1$ ), eta 2. harmonikoa (maiztasuna  $20\text{Hz}$ ) eta 5.a (maiztasuna  $50\text{Hz}$ ) agertzen dira ere. Kasu honetan  $F_{max} = 50\text{Hz}$ , eta beraz laginketa-maiztasunak  $2 \times 50 = 100\text{Hz}$  baino handiagoa izan behar du. Orduan, aukeratuko dugun  $N$ -ren balioak balintza hau bete behar du

$$F_S = NF = 10N > 100 \rightarrow N > 10.$$

Horrela dela eta, aukeratzeko baldin badugu, adibidez,  $N = 15$ , seinalearen lagina 15 puntu hauetan hartu beharko dugu:

$$t_r = \frac{rT}{N} = r \frac{0.1}{15} = 0.0067r, \quad r = 0, \dots, 14$$

Laginketa-maiztasunaren balio "kritikoa",  $2F_{max}$ , Nyquist-en maiztasuna deitzen da. Orduan,  $[0, T]$  tartean hartzen dugun laginketa-maiztasuna Nyquisten maiztasuna baino **handiagoa** izango da.  $n$ .harmonikoaren maiztasuna  $F_{max}$  bada, hau da,  $F_{max} = nF$  bada,  $N$  balioa erabili behar dugu non  $F_S = \frac{N}{T} > 2F_{max} = 2\frac{n}{T}$  betetzen den, beraz,  $N > 2n$ . Orduan,  $F(t)$ -ren maiztasunaren informazioa ateratzeko  $n$ . harmonikoraino,  $[0, T]$  tartean hartutako laginaren puntuen kopuruak,  $N$ ,  $n$ -ren bikoitzaren baino handiagoa izan behar du.

Laginketaren teoremak esaten digunez,  $F(t)$  seinalearen lagin bat aukeratzeko, bere maiztasunen informazioa ezagutu behar dugu. Gehienetan informazio hau ezaguna izango da. Adibidez, badakigu gizakiaren abotsaren seinale baten maiztasuneko osagaiak  $F_{max} = 3\text{KHz}$  baino baxuagoak direla. Badakigu ere telebistako seinaleen maiztasuneko osagaiak altuak direla,  $F_{max} = 5\text{MHz}$ -rainokoak ( $1\text{MHz} = 1000000\text{Hz}$ ).  $F(t)$  seinale baten (telebistakoa, abotsa, tentsioa, intentsitatea, e.a.), lagin bat aukeratu ondoren, lagina aztertu behar da  $F(t)$  maiztasuneko informazioa ateratzeko.

### Adibideak

a) Suposa dezagun (11.1) irudian agertzen den  $50\text{Hz}$ -ko tentsio alterno "hutsaren",  $A(t) = 0.015 \sin(100\pi t)$ , seinalearen periodo bat,  $T = 1/50 = 0.02$ , lagindu nahi dugula. Seinale

honek duen maiztasun bakarra 50Hz-koa da, beraz  $F_{max} = 50$ . Laginketaren teoremaren arabera, Nyquist-en maiztasuna  $F_S = 100\text{Hz}$  da. Honek esan nahi du laginketaren periodoak  $T_S = 1/100 = 0.01$  segundukoa baino txikiagoa izan behar duela, eta orduan, lagintzeko tresnak segunduko gutxienez  $A(t)$ -ren 100 balio neurtzeko gai izan behar du. Beraz,  $[0, 0.02]$  tartean gutxienez bi balio hartuko ditugu, uniformeki tartekatuta. Adibidez,  $N = 3$  aukatzen badugu:

$$T = 0.02, t_r \{= rT/3, r = 0, 1, 2\}$$

$$t_0 = 0, t_1 = 0.02/3 = 0.0067, t_2 = 0.04/3 = 0.0133$$

Ikus dezakezunez, hartutako laginketa-maiztasuna Nyquist-en maiztasuna bada,  $N = 2$  eta lagintzeko uneak  $t = 0$  eta  $t = 0.01$  dira, orduan neurtutako balioak  $A(0) = A(0.01) = 0$  izango dira, eta honek ez digu  $A(t)$ -ri buruzko informaziorik ematen. Laginketa-maiztasunak Nyquist-en maiztasuna baino handiagoa izan behar du.

b) Suposa dezagun (11.6) irudian agertzen den sintetizadoreak sortutako DO notaren seinalea lagindu nahi dugula. Seinale jarraituaren adierazpena honako hau zen:

$$A(t) = 0.0007(2.6 + 0.5 \cos(2\pi Ft) + \sin(2\pi Ft) + 0.3 \cos(6\pi Ft) + 0.4 \sin(6\pi Ft) \\ + 0.5 \cos(10\pi Ft) + 0.16 \sin(10\pi Ft)) \quad (F = 261\text{Hz})$$

Kasu honetan, maiztasuneko osagaiak  $F = 261\text{Hz}$ ,  $3F = 783\text{Hz}$  eta  $5F = 1305\text{Hz}$  dira. Beraz,  $F_{max} = 1305\text{Hz}$  (5.harmonikoa). Laginketaren teoremaren arabera, hartu behar den laginketa-maiztasuna  $F_S > 2 \times 1305 = 2610\text{Hz}$  da. Hau da, lagintzeko periodoak,  $T_S$ ,  $1/2610 = 0.000383142$  segundukoa baino txikiagoa izan behar du. Honek esan nahi du  $A(t)$ -ren balioak  $0.000383142$  segundukoa baino txikiagoko periodo batekin lagindu behar direla, edo segunduko  $A(t)$ -ren 2610 baino balio gehiago neurtu behar direla, edo  $5 \times 2 = 10$  balio baino gehiago  $[0, T]$  tartean,  $T = 1/261$  izanik.

c) Suposa dezagun telebistako seinale bat lagindu nahi dugula. Aurreko paragrafoan azaldu dugunez, kasu honetan  $F_{max} = 5\text{MHz}$ . Beraz, seinalearen maiztasuneko informazio osoa lortu nahi badugu, laginketa-maiztasunak  $F_S = 10\text{MHz}$  baino handiagoa izan behar du. Hau da, seinalea  $1/1000000 = 10^{-6}$  segunduro baino maizago neurtu behar da. Honen ondorioz, diska batean bildutako bideo-seinaleak okupatzen duen lekua oso handia da. Horregatik, seinalearen erredundantziak eta funtsezkoak ez diren zatiak eliminatzeko irudi-konprimaketarako algoritmoak daude, hauen bidez diskan betetzen den azkeneko



lekua txikiago izan dadin. Helburu berdinarekin audio-seinalearen konprimaketarako algoritmoak daude, ospetsuenetariko bat mp3 da. Audio-digitalizaziorako softwarean, ohikoa da laginketa-maiztasunaren aukeratzea, adibidez: 44100Hz (CD kalitatea), 96000Hz (kalitate handiko masterizazioa), 32000 Hz (binil diskaren digitalizazioa) edo 8000Hz (soinu telefonikoaren kalitatea). Nabaritu azkeneko laginketa-maiztasun hau nahikoa dela gizakien abotsaren maiztasunen heina, 3000Hz-raino, kontserbatzeko.

**11.6. Ariketa** Kalkulatu (11.7) irudian agertzen den seinale jarraituaren espektroa aztertzeko erabili behar den laginketa-maiztasuna. Kalkulatu seinalea periodo bateko luzerako tarte batean aztertzeko lagindu behar diren balioen kopurua.

## 11.7 Fourierren transformatu diskretua (DFT)

Azaldu dugunez, ordenagailu digitalek informazio diskretu eta finituarekin soilik funtzionatzen dute. Hau da, aztertzen ari den  $F(t)$  seinale jarraituaren lagin finitu batekin lantzeko gai dira. Suposa dezagun  $F(t)$  seinalearen  $N$  puntu lagindu ditugula:

$$y_r = F(t_r), t_r = rT/N, r = 0, \dots, N-1$$

Lehe esan dugu zein izan behar den laginketa-maiztasun minimoa  $F(t)$ -ren maiztasuneko informazio osoa ateratzeko. Seinalean agertzen den harmoniko handiena  $n$  bada, laginketaren teoremaren arabera, aukeratu behar den balioen kopuruak,  $N$ ,  $N/2 > n$  bete behar du (hemendik aurrera  $N$  zenbaki bikoitia dela suposatuko dugu).  $N$  modu honetan aukeratzeko badugu,  $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$  laginatik  $F(t)$ -ren maiztasuneko informazio osoa ateratzeko gai izango gara. Adibidez, seinaleak duen azkeneko harmonikoa 15garrena bada,  $N/2 > 15$  hartuko dugu. Har dezakegu, adibidez,  $N = 32$  balioen lagin bat eta horrela  $F(t)$ -ren maiztasuneko informazio osoa lortuko dugu. Praktikan, seinalean dagoen harmoniko handiena  $n$  bada,  $N/2 > n$  betetzen duen  $N$  balio bat aukeratu dugu eta, ondoren,  $F(t)$  laginduko dugu  $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$  lortzeko. Orain arazoa zera da:  $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$  lagindutako balioak erabiliz, nola lortuko ditugu  $a_0, a_k, b_k \dots k = 0, 1, \dots, N/2$  Fourierren koefizienteak?

(11.4) atalean ikusi genuenez, Fourierren koefizienteak funtzio batzuen batezbesteko balioak bezela interpreta daitezke. Orain, batezbesteko balio hauek hurbildu nahi ditugu  $N$  balioen batezbesteko aritmetikoan bidez. Konkretuki:

$$k = 0, \dots, N/2 \text{ balio bakoitzarentzat:}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt \approx \frac{F(t_0) + \dots + F(t_{N-1})}{N} = \frac{y_0 + \dots + y_{N-1}}{N} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} y_r \\
a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt \approx \frac{F(t_0) \cos \frac{2k\pi t_0}{T} + \dots + F(t_{N-1}) \cos \frac{2k\pi t_{N-1}}{T}}{N} = \\
&= \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N-1} y_r \cos \frac{2k\pi t_r}{T} \\
b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt \approx \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N-1} y_r \sin \frac{2k\pi t_r}{T}
\end{aligned}$$

Tratamendua errezagoa da ezagunak diren zenbaki konplexuen eragiketak erabiltzen badiugu. Lagindu ditugun  $N$  balioetatik,  $y_r, r = 0, \dots, N-1$ , honako  $N/2 + 1$  zenbaki konplexu hauek,  $Y_k, k = 0, \dots, N/2$ , definitzen ditugu:

$$\begin{aligned}
Y_k &= \sum_{r=0}^{N-1} y_r \cos \frac{2k\pi r}{T} - i \sum_{r=0}^{N-1} y_r \sin \frac{2k\pi r}{T} = \sum_{r=0}^{N-1} y_r \left( \cos \frac{2k\pi r}{T} - i \sin \frac{2k\pi r}{T} \right) \Rightarrow \\
Y_k &= \sum_{r=0}^{N-1} y_r e^{-i \frac{2k\pi r}{T}} \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2}
\end{aligned}$$

Beraz, adierazpen hauen bidez,  $Y_k$  balioak erabiliz Fourierren koefizienteen kalkulu hurbildua lor dezakegu:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{N} Y_0 & \bar{c}_k &= a_k - ib_k = \frac{2}{N} Y_k \quad k = 1, \dots, \frac{N}{2} \\
a_k &= \frac{2}{N} \operatorname{Re}(Y_k) & b_k &= -\frac{2}{N} \operatorname{Im}(Y_k)
\end{aligned}$$

**11.2. Adibidea**  $[0, 1.5]$  tartean  $F(t)$  funtzioaren 8 balio lagindu ditugu ((11.2) Taula). Fourierren  $8/2 + 1 = 5$  koefizienteak kalkulatu nahi ditugu.

Kasu honetan,  $N = 8$  eta  $y_0 + y_1 + \dots + y_4 = 16.25$ , orduan,  $a_0 = 16.25/8 = 2.03125$ . (11.3) taulan  $-\operatorname{Im}(Y_k)$  lortzeko kalkuluak azaltzen dira:  $r$ .errenka eta  $k$ .zutabeko elementua  $y_r \cos(2k\pi r/N)$  da, eta zutabe bakoitzeko elementuen batura nahi dugun  $-\operatorname{Im}(Y_k)$  balioa

$r$	$t_r$	$y_r = F(t_r)$
0	0	1
1	0.1875	1.35
2	0.375	1.68
3	0.5625	1.97
4	0.75	2.23
5	0.9375	2.46
6	1.125	2.68
7	1.3125	2.88

11.2 Taula:  $F(t)$ -ren balio laginduak

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$r = 0$	1	1	1	1
$r = 1$	0.955	0	-0.955	-1.35
$r = 2$	0	-1.68	0	1.68
$r = 3$	-1.393	0	1.393	-1.97
$r = 4$	-2.23	2.23	-2.23	2.23
$r = 5$	-1.739	0	1.74	-2.46
$r = 6$	0	-2.68	0	2.68
$r = 7$	2.036	0	-2.036	-2.88
$-Im(Y_k)$	-1.371	-1.13	-1.089	-1.07

11.3 Taula:  $-Im(Y_k)$ -ren balioen kalkulua

da.

(11.4) taulan  $Re(Y_k)$  lortzeko kalkuluak azaltzen dira:  $r$ .errenka eta  $k$ .zutabeko elementua  $y_r \sin(2k\pi r/N)$  da, eta zutabe bakoitzeko elementuen batura  $Re(Y_k)$  da.

(11.5) taulan  $y_r$  ( $r = 0, \dots, N - 1 = 7$ ) balio laginduak erabiliz lortu ditugun  $a_0$ ,  $a_k$  eta  $b_k$  ( $k = 0, \dots, N/2 = 4$ ) balio hurbilduak eta harmoniko bakoitzaren anplitudea azaltzen dira.

Orduan, hasierako funtzioa,  $F(t)$ , ondorengo polinomio trigonometrikoaren bidez hurbildu dugu:

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$r = 0$	0	0	0	0
$r = 1$	0.955	1.35	0.955	0
$r = 2$	1.68	0	-1.68	0
$r = 3$	1.393	-1.97	1.393	0
$r = 4$	0	0	0	0
$r = 5$	-1.739	2.46	-1.739	0
$r = 6$	-2.68	0	2.68	0
$r = 7$	-2.036	-2.88	-2.037	0
$Re(Y_k)$	2.428	1.04	0.428	0

11.4 Taula:  $Re(Y_k)$ -ren balioen kalkulua

$k$	$a_k$	$b_k$	$ c_k $
0	2.031		2.031
1	-0.343	-0.607	0.697
2	-0.282	-0.26	0.384
3	-0.272	-0.107	0.292
4	-0.267	0	0.268

11.5 Taula: Fourier-en koefizienteen kalkulua

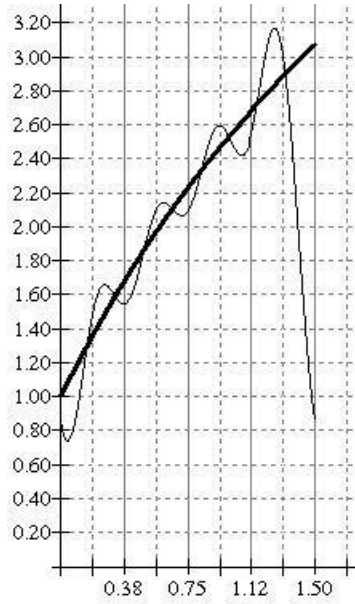
$$T(t) = a_0 + \sum_{k=1}^4 \left( a_k \cos \frac{k\pi t}{4} + b_k \sin \frac{k\pi t}{4} \right)$$

$T(t)$  polinomioa  $F(t)$  hasierako funtziotik oso hurbil egongo al da? Begiratu (11.27) Irudia.

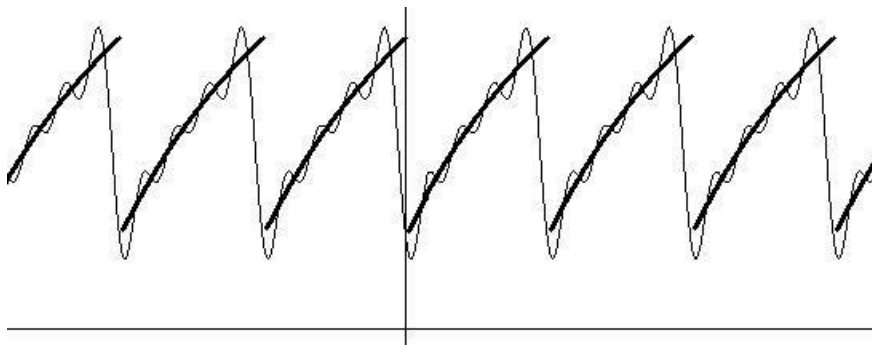
$T(t)$  polinomioa (lerro mehea) eta  $F(t)$  hasierako funtzioa (lerro lodia) marraztu ditugu  $[0, 1.5]$  tartean. Ikus dezakezunez  $T(t)$   $F(t)$ -tik nahiko gertu dago, tartearen muturreko ingurunean ezik ( $t = 0$  eta  $t = 1.5$ ). Zer gertatzen da puntu hauetan? Ba,  $F(t)$  ez dela jarraitua. Begira ezazu (11.28) irudia,  $F(t)$  eta  $T(t)$  funtzioen periodo batzuk adierazi ditugu. Nabaritu  $T(t)$  funtzio jarraituak egin behar duena  $F(t)$ -ren etenak gainditzeko.

**11.7. Ariketa** Aplikatu (11.1) Teorema (Dirichleten baldintzak) aurreko  $F(t)$  funtzioaren Fourierren seriearen limitea kalkulatzeko  $[0, 1.5]$  tartearen muturretan.

Lagindu ditugun  $y_r$  ( $r = 0, \dots, N - 1$ )  $N$  balioak erabiliz lortutako  $N/2 + 1$  balio konplexuak,  $Y_k$  ( $k = 0, \dots, N/2$ ), oso garrantzitsuak dira seinaleen analisisian. Ikusi dugunez,  $Y_k$



11.27 Irudia: Fourierren polinomioaren bidezko hurbilketa



11.28 Irudia: Funtzio ezjarraituaren hurbilketa

balio konplexuen bidez funtzio laginduaren Fourierren koefizienteak estimatzen dira.

**11.4. Definizioa** *Lortu ditugun  $N/2 + 1$  balio konplexuen multzoa,  $Y_k = \text{Re}(Y_k) + i\text{Im}(Y_k)$ ,  $k = 0, \dots, N/2$ ,  $N$  balioen laginaren ( $y_r$  ( $r = 0, \dots, N-1$ )) Fourierren transformatu diskretua (DFT, Discrete Fourier Transform) deitzen da.*

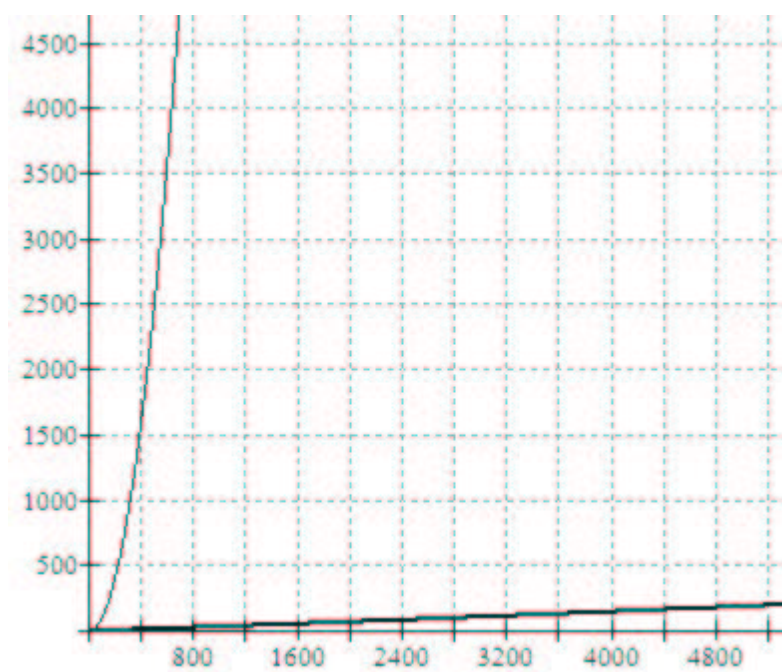
*Froga daiteke ere, DFT-ren  $\{Y_k, k = 0, \dots, N/2\}$   $N/2 + 1$  balio konplexuetatik lagindutako balioak,  $\{y_r, r = 0, \dots, N-1\}$ , berreskura daitezkeela. Hau da, laginaren DFT ezagutzen badugu, lagina berritu daiteke. Alderantzizko kalkulua hau Fourierren Alderantzizko Transformatu Diskretua (IDFT) deitzen da, eta honako hau da bere adierazpena:*

$$y_r = \frac{Y_0}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N/2} \text{Re}(Y_k) \cos \frac{2k\pi r}{N} - \frac{\text{Im}(Y_{N/2})}{N} - \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N/2-1} \text{Im}(Y_k) \sin \frac{2k\pi r}{N} \quad r = 0, \dots, N-1$$

## 11.8 Fourierren transformatu azkarra (FFT)

Funtzio baten Fourierren koefizienteak estimatzeko metodoa ikusi dugu. Metodo hau laginaren Fourierren transformatu diskretuaren kalkuluan oinarritzen da. Baina, laginaren puntuen kopurua  $N$  bada transformatuaren  $N/2 + 1$  zenbaki konplexuak kalkulatzeko beharrezkoa den ahalegina oso handia da. Froga daitekenez,  $N$  tamainuko lagin bat hartzen bada, egin behar diren biderkaketan kopurua  $N^2$ -rekin proportzionala da. Nabaritu kopuru hau oso azkar handitzen dela  $N$  handitzerakoan. Adibidez, laginaren tamainua bikoizten bada, (hau da, laginketa-maiztasuna bikoizta bada), beharrezkoak diren eragiketen kopurua laukoizten da. Kalkuluak ordenagailu baten bidez egiten baditugu ere denborako tarte batean egin behar diren eragiketen kopurua gaindiezinezkoa da. Zorionez, DFT kalkulatzeko, askoz eragiketa gutxiago behar dituzten algoritmoak existitzen dira. Algoritmo hauek FFT algoritmoak (Fast Fourier Transform, Fourierren transformatu azkarra) deitzen dira. Ez dugu algoritmo hauek xehetasun handiarekin aztertuko, baina bi datu emango ditugu. Lehen, aplikatu ahal izateko,  $N$  balioak 2-ren berredura izan behar du. Bigarrena, FFT erabiliz DFT kalkulatzeko beharrezkoak diren eragiketen kopurua askoz txikiagoa da,  $N \log(N)$ -ren ordenakoa. (11.29) Irudian  $N^2/100$  eta  $N \log(N)/100$  funtzioak grafikatu ditugu. Lehenengoa (DFT-ren kalkulu zuzena) bigarrena (DFT-ren kalkulua FFT erabiliz) baino askoz azkarrago handitzen da. Adibidez,  $N = 1024 = 2^{10}$  bada,  $N^2$ -ren balioa milioi bat baino handiagoa da eta  $N \log(N)$  3100 baino txikiagoa.

**11.8. Ariketa** DFT kalkulu zuzenaren bidez ( $N^2$ ) eta FFT algoritmoen bidez ( $N \log(N)$ ) kalkulatzeko beharrezkoak diren eragiketen kopuruaren handitzeko abiadurak kalkulatu, grafikoki adierazi eta konparatu.



11.29 Irudia: Eragiketen kopuruen arteko konparaketa

Era berean, alderantzizko transformatu diskretua kalkulatzeko algoritmo efizienteak existitzen dira ere, IFFT. Azokan FFT eta IFFT kalkulatzeko txipen aukera handia dago. Txipe hauek seinaleen espektroa (tentsioa, korronea, bibrazioak, soinua, bideoa, e.a.) aztertzeke tresna profesionaletan muntatzen dira. Beste aldetik, FFT eta IFFT algoritmoak software pakete batzuetan sartuta daude ere, adibidez, Excel kalkulu orrian (Tresnak/Datu analisia/Fourier analisia)

**11.3. Adibidea** Suposa dezagun  $F(t)$  50Hz-ko tentsioa ( $T=0.02$ ) 14.ordenarainoko harmonikoekin “kutsatuta” dagoela. Orduan, Nyquisten maiztasuna  $2 \times 14 \times 50 = 1400Hz$  da, beraz  $[0, 0.02]$  tartean lagindu behar da  $1/1400 = 0,000714286$  baino txikiagoa den lagintzeke periodo batekin.  $[0, 0.02]$  tartean hartuko ditugun puntuen kopurua,  $N$ , 2-ren berredura izango da  $0.02/N$  lagintzeke periodoa  $0.000714286$  baino txikiagoa izanik.  $N=16$  aukeratzek badugu,  $0.02/16 = 0,00125$  lortzen da, eta hau ez da nahikoa. Baina,  $N = 32$  bai da nahikoa  $0.02/N = 0,000625 < 0,000714286$  betetzen delako. (11.6) Taulan lagindutako 32 balioak ikusten dira. Orain egin behar dena hau da, Excelekin inplementatzen duen FFT erabili  $F(t)$ -ren espektroa aztertzeke eta  $F(t)$  iragazi hamargarrenetik gorako harmoniko guztiak eliminatzeko.

$r$	$t_r$	$F(t_r)$	$r$	$t_r$	$F(t_r)$
0	0.00000	0.19900	16	0.01000	0.22300
1	0.00063	0.31084	17	0.01063	0.32853
2	0.00125	0.18136	18	0.01125	0.19205
3	0.00188	0.25188	19	0.01188	0.25518
4	0.00250	0.24992	20	0.01250	0.24568
5	0.00313	0.25546	21	0.01313	0.24386
6	0.00375	0.31901	22	0.01375	0.30047
7	0.00438	0.19728	23	0.01438	0.17254
8	0.00500	0.30400	24	0.01500	0.27400
9	0.00563	0.19736	25	0.01563	0.16326
10	0.00625	0.33174	26	0.01625	0.29485
11	0.00688	0.26561	27	0.01688	0.22732
12	0.00750	0.27129	28	0.01750	0.23311
13	0.00813	0.26865	29	0.01813	0.23202
14	0.00875	0.20708	30	0.01875	0.17344
15	0.00938	0.32978	31	0.01938	0.30039

11.6 Taula: Laginketaren balioak



Excel erabiliz DFT-ren  $32/2 + 1 = 17$  balio konplexuak,  $Y_k$ , Fourierren koefizienteak eta espektroa kalkulatzeko ditugu. Balio guzti hauek (11.7) Taulan agertzen dira.

$k$	$Re(Y_k)$	$Im(Y_k)$	$a_k$	$b_k$	$ c_k $
0	8.00000	0.00000	0.25000	0.00000	0.25000
1	-0.19200	-0.24000	-0.01200	0.01500	0.01921
2	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
3	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
4	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
5	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
6	0.38400	-0.01086	0.02400	0.00068	0.02401
7	-0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
8	-0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
9	-0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
10	-0.00001	-0.01336	0.00000	0.00084	0.00084
11	-0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
12	-0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
13	-0.00003	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
14	-1.00799	-0.03770	-0.06300	0.00236	0.06304
15	0.00004	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
16	0.00003	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

11.7 Taula: DFT-ren balioak, Fourierren koefizienteak eta espektroa

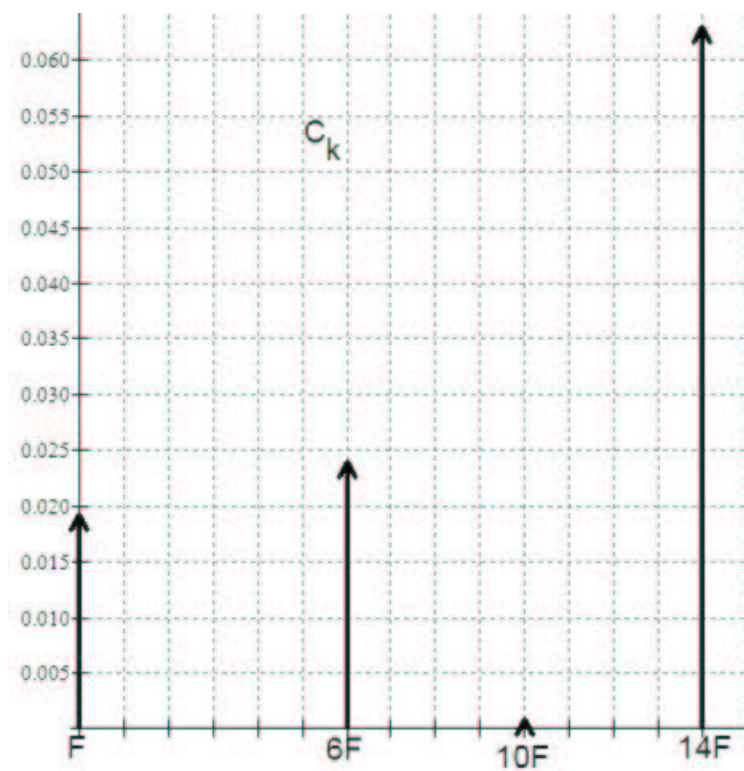
(11.30) Irudian  $R(t)$ -ren maiztasunen espektroa azaltzen da.

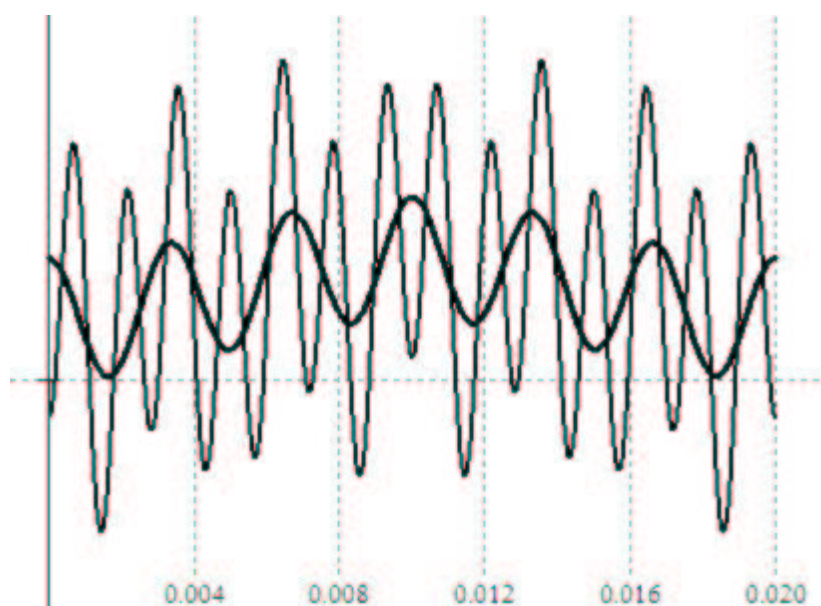
Azterketa hau egin ondoren  $F(t)$  seinalearen osagaiak 6, 10 eta 14garren harmonikoak direla determinatzen dugu (sintesia). Orain nahi ez ditugun maiztasunak iragazten ditugu eta 6 eta 10garren harmonikoak (eta oinarritzko maiztasuna) geldituko zaizkigu. Beraz, seinale "iragazita" (sintesia) ondorengo hau izango da.

$$T(t) = 0.25 + 0.015 \sin(100\pi t) - 0.012 \cos(100\pi t) + 0.00068 \sin(600\pi t) \\ + 0.024 \cos(600\pi t) + 0.00084 \sin(1000\pi t)$$

Zer moduz funtzionatu du prozedura honek? (11.6) Taulan agertzen den lagina ondorengo funtziotik hartu dugu:

$$F(t) = 0.25 + 0.015 \sin(100\pi t) - 0.012 \cos(100\pi t) + 0.00068 \sin(600\pi t) + 0.024 \cos(600\pi t) \\ + 0.000835 \sin(1000\pi t) + 0.00235 \sin(1400\pi t) - 0.063 \cos(1400\pi t)$$

11.30 Irudia:  $R(t)$ -ren maiztasunen espektroa

11.31 Irudia:  $F(t)$  eta  $T(t)$  funtzioak

FFT-ren bidezko maiztasuneko analisia erabiliz,  $F(t)$  seinalearen lagin batetik, funtzio horren osagai harmonikoak kalkulatu ditugu. Irudian  $F(t)$ -ren (lerro lodia) eta  $T(t)$ -ren (lerro mehea) grafikoak  $[0, 0.02]$  tartean adierazi dira. Ikusi zein izan den  $R(t)$ -tik nahi ez ditugun harmonikoak iragazteko ondorioa.

