11. Kapitulua

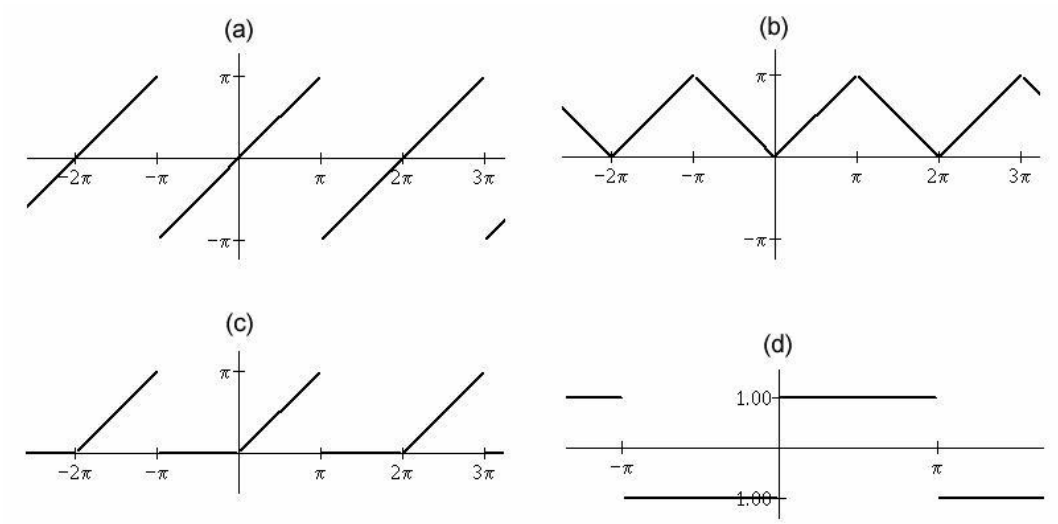
Fourierren Analisia

ikurra duten ariketak ebazteko komenigarria izango da funtzioen adierazpen grafiko eta zenbakizko kalkulurako programa informatiko bat erabiltzea, Winplot adibidez.

11.1. Ariketa Frogatu ondorengo irudietan agertzen diren funtzioen Fourierren koefizienteak hurrengoak direla:

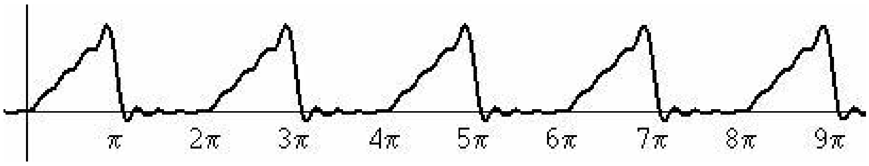
1. $a_n = 0, \quad b_n = (-1)^{n+1}\dfrac{2}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$
2. $a_0 = \dfrac{\pi}{2}, \quad a_{2n+1} = \dfrac{-4}{\pi(2n+1)^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$
3. $a_0 = \dfrac{\pi}{4}, \quad a_{2n+1} = \dfrac{-2}{\pi(2n+1)^2} \quad b_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$
4. $a_n = 0, \quad b_n = \dfrac{4}{2n+1}\pi \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

Seriearen konbergentzia, kasu bakoitzean, aztertu.



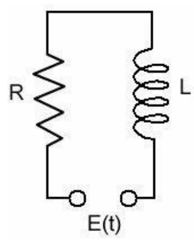
11.2. Ariketa Izan bedi $y' + py = Q(t)$ ekuazio lineala non p konstante erreala eta $Q(t)$, T periodoko funtzio periodikoa diren. Ondorengo ideia aztertu: (1) $Q(t)$-ren $S(t)$ Fourierren seriea kalkulatu; (2) $Q(t)$ funtzioa $R(t)$ hurbilketaz ordezkatu; $R(t)$, $S(t)$-ren batugai batzuen batura finitua izanik. Hurrengo irudian funtzio baten Fourierren seriearen lehenengo 9 batugai hartuz lortutako hurbilketa azaltzen da. Funtzio hori 1. ariketan agertzen da.

Zein da?; (3) lehen ordenako ekuazio diferentzial linealak ebazteko erabilitzen den metodoa aplikatuz $y' + py = R(t)$ E.D.A. ebatzi.

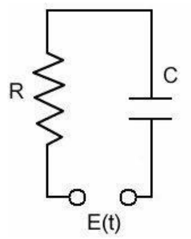


OHARRA: Gogora ezazu ondorengo berdintzak betetzen direla:

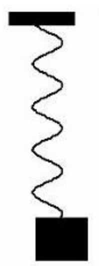
$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin bx\, dx = \frac{\mathrm{e}^{ax}(a\, \sin bx - b\, \cos bx)}{a^2+b^2} + k, \quad \int \mathrm{e}^{ax} \cos bx\, dx = \frac{\mathrm{e}^{ax}(a\, \cos bx + b\, \sin bx)}{a^2+b^2} + k$$



11.3. Ariketa Ezaguna da RL zirkuitu batetik ibiltzen den $I(t)$ intentsitatea, $LI' + RI = E$ ekuazio diferentziala betetzen duela non L induktantziaren balioa, R erresistentziarena eta E aplikatutako tentsioaren balioak diren. 2. ariketa erabiliz, eta jakinik $E(t)$ 1. ariketan agertzen den grafiko bakoitzari dagokion funtzioa dela, $I(t)$ aztertu.

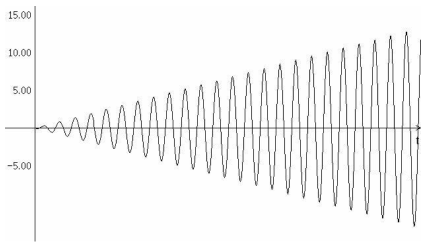


11.4. Ariketa Aurreko ariketan egindakoa errepikatu baina orain seriean dagoen RC zirkuitua kontsideratuz. Kasu honetan kondentsadoreak une bakoitzean duen $q(t)$ karga, $Rq' + q/C = E(t)$ E.D.A.-ren bidez adierazten da. R erresistentziaren balioa eta C kapazitatearena dira.



11.5. Ariketa Geldirik dagoen m masa malguki batetik esekita dago (ikusi irudia). $F(t)$ periodikoa den indarra bertikalki aplikatzen dugu eta horren ondorioz masa oszilatzen hasten da. Suposatuz indargetze indarrik ez dagoela, $y'' + w^2 y = F(t)$ ekuazio diferentzialak masaren oszilazioak adierazten ditu. $w^2 = k/m$ da non k malgukiaren elastikotasuna adierazten duen konstantea den. Adibidez, 10 Kg-ko masa eskegitzean malgukia 20 cm luzatzen da. Orduan, $k = 10/20 = 0.5$ Kg/cm. k-ren balioa gero eta handiagoa bada malgukia gero eta gogorragoa izango da.

1. 2.ariketan dauden ideia berberak erabiliz, masaren $y(t)$ oszilazioa aztertu.



2. Kontsidera dezagun 1. ariketan (c) grafikoan agertzen den funtzioa. Malgukiaren elastikotasun konstantea $k = 1$ bada, funtzio honi aurreko atalan lortutako emaitza aplikatu. Oszilazioak, $m = 4$ eta $m = 1/9$ kasurako aztertu. Frogatu azkeneko kasu honetan badagoela harmoniko bat (irudian azaltzen da) zeinen oszilazioak ez dauden bornaturik t infiniturantz doanean. m-ren zer balioetarako aurkitu dezakegu beti anplitude bornaturik gabeko harmonikoren bat?

11.6. Ariketa Funtzio ez-periodikoen Fourierren seriea.

Izan bedi $F(t)$, $[0, L]$ tartean definitutako funtzioa. $F(t)$ periodikoa ez denez, ez dago $F(t)$ funtzioaren Fourierren serieari buruz hitzegiterik. Hala ere, ondorengo idea aztertuko dugu: (1) $F(t)$ funtzioan oinarriturik $H(t)$ beste funtzio bat $[-L, L]$ tartean definitu non $H(t)$ eta $F(t)$ funtzioa, $[0, L]$ tartean berdinak diren. $H(t)$ funtzio berria bikoitia edo bakoitia izateko defini daiteke; (2) $H(t)$ hedatu $\mathbb{R}$-en periodikoa izan dadin; (3) $H(t)$-ren Fourierren seriea kalkulatu.

Ideia hauek ondorengo funtzioei aplikatu:

1. $F(t) = pt + q \quad 0 \leq t \leq L$
2. $F(T) = t^2 \quad 0 \leq t \leq 2$