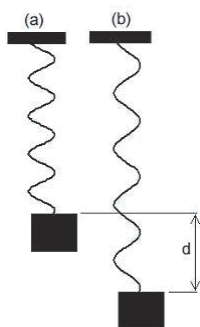


10. Kapituluu

Laplaceren transformatua

10.1 Arazoaren aurkezpena

Kurtsoan zehar, aldagai anitzen aldaketa ezberdinak agertzen diren fenomeno fisikoak aztertzeke eredu matematikoak eraiki ditugu; adibidez, partikula eta solidoen abiadura eta azelerazioa. Eredu matematiko horiek, sarritan, ekuazio diferentzial arruntak (EDA) erabiliz eraiki dira. Behin EDA ebatzi ondoren, $y(t)$ funtzio bat lortuko dugu; horren bidez y aldagaiaren (t -ren menpean) eboluzioaren berri izango dugu.



10.1 Irudia: m masako gorputza malgukian zintzilik

Adibidez, 9. gaian (Ekuazio Diferentzial Arruntak), gorputz baten mugimendu oszilakorraren problema ebatzi ahal izan genuen:

Demagun m masako gorputz bat malguki batetik zintzilik dagoela orekan (ikus 10.1(a) irudia); gorputzetik beheraka tiratzen dugu, malgukia d distantziara luzatu arte (10.1(b) irudia); gero askatu eta $F(t)$ indar aldakor bat eragiten diogu. Badakigu hurrengo EDAn, masaren oszilazioa (denboran zehar) aztertzeke eredutzat balio digula:

$$my'' + \beta y' + ky = F(t) \quad (1)$$

(1) eredu horretan:

$y(t)$: solidoaren posizioa t unean.

$F(t)$: gorputzari aplikatutako indarra t une bakoitzean.

m : solidoaren masa.

β : ingurune fisikoaren (gasa, ura, olio, etab.) menpekoa den amortiguazio konstantea.

k : malgukiaren zurruntasunaren ezaugarrien menpekoa den konstantea.

Gogoratu (1) ekuazioa, Zientziaren eta Ingeniaritzaren aplikazio praktiko askotan agertzen diren ekuazio diferentzialen modukoa dela; hau da, koefiziente konstanteko eta 2 orde-

nako EDA lineala da:

$$ay'' + by' + cy = F(t) \quad (2)$$

Aurreko gaian, (2) itxurako ekuazio diferentzial arruntak, kasu batzuetan ebazteko prozedura bat garatu genuen. Hurrengo da prozedura:

1. GO PAUSOA: (2) ekuazioari elkartutako EDA homogeenaren $y_{gh}(t)$ soluzio orokorra kalkulatzeko; hau da, EDAREN soluzio orokorra kalkulatzeko:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (3)$$

Badakigu (3) ekuazioaren soluzio orokorra kalkulatzeko (2)-ren ekuazio karakteristikoaren m_1 eta m_2 erroak kalkulatzeko nahiko dela:

$$am^2 + bm + c = 0$$

2. PAUSOA: (2) ekuazioaren $y_{pc}(t)$ soluzio partikular bat kalkulatzeko. Kalkulu hau ez da hain erraza, baina ebazteko bi metodo dauzkagu: koefiziente indeterminatuen metodoa eta eragileen metodoa.

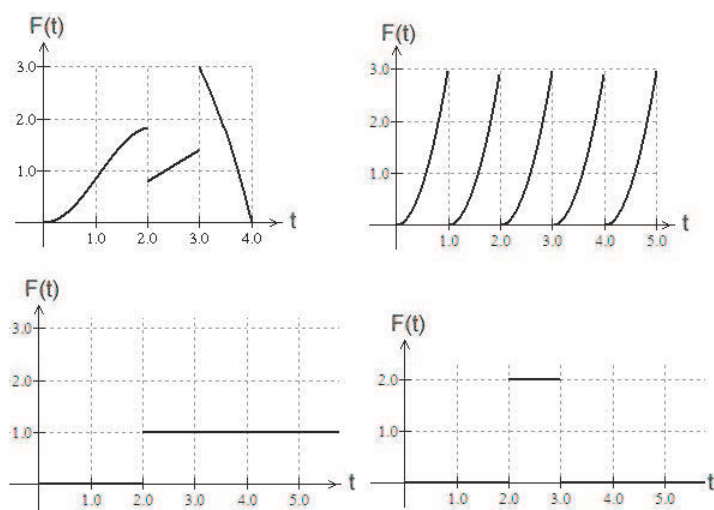
3. PAUSOA: Behin $y_{gh}(t)$ eta y_{pc} aurkituta, erraza da (2) ekuazio osoaren $y_{gc}(t)$ soluzio orokorra lortzea: $y_{gc}(t) = y_{gh}(t) + y_{pc}(t)$.

Prozedura honetan, pausorik zailena bigarrenkoa da, (2) ekuazioaren edozein $y_{pc}(t)$ soluzio partikularra kalkulatzeko, alegia. Zergatik da zaila ordea? $F(t)$ funtzio jakin batzuei bakarrik aplikatzea posible delako. Demagun $F(t)$ funtzioa 10.2 irudian agertzen diren funtzio horietako bat dela; $F(t)$ -ren adibide horiek Ingeniaritzan eta Zientzian askotan agertzen diren funtzioak dira, zirkuitu elektrikoari aplikatutako tentsio etenak edo mugikorrei aplikatutako indarrak adierazten baitituzte, adibidez. Hala ere, funtzio hauetariko inori ezin zaie aplikatu koefiziente indeterminatuen metodoa, eta eragileen metodoa aplikatzea, berriz, zaila izan daiteke. Laburbilduz, 9. gaian EDA (2)-ren ebazpenerako garatutako prozedurak, funtzio jakin batzuetarako bakarrik balio digu, eta sarritan agertzen diren aplikazio garrantzitsuetarako ez da baliozkoa.

Beraz, (2) problema ebazteko balioko digun prozedura lortu nahi dugun, baina aurrekoa baino hobea dena; hau da, $F(t)$ funtzio gehiagotarako balioko digun prozedura.

10.2 $y(t)$ funtzio baten Laplace-en transformatua

Nondik hasiko gara? 9. gaiaren hasieran aplikatzen saiatu ginen metodo batetik abiatuko gara; orduan ez zigun ezertarako lagundu, baina orain bai: EDA-ren integrazio zuzena. (2)

10.2 Irudia: $F(t)$ funtzio ezberdinak

ekuazioaren gai guztiak integratuko ditugu:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = F(t) \Rightarrow a \int y''(t)dt + b \int y'(t)dt + c \int y(t)dt = \int F(t)dt$$

Ezin dugu gehiago egin. Ezin dugu kalkulatu

$$\int y(t)dt$$

ez dugulako $y(t)$ ezagutzen. Hain zuzen $y(t)$ da zehaztu nahi dugun funtzioa. Horregatik utzi genuen alde batera ebazpeneko "metodo" eskas hura. Metodo hori, noski, $y''(t) = F(t)$ ekuazioak ebazteko balio digu, $F(t)$ bi aldiz integratzeko kapaz garen heinean.

Jarraian erabiliko ditugun ideiak oso landuak dira eta segur aski inori ez litzaizkiguke bururatuko milioi bat urtetan ere, baina benetan egokiak eta erabilgarriak dira. Ea ulertzen dituzun.

Lehenengo ideia: (2) EDAREN gaiak integratu aurretik, biderkatu $h(t) = e^{st}$ esponentzial funtzioagatik, non s edozein zenbaki erreal den. Eta nondik dator ideia hori? Funtzio esponentzialak oso erraz integratzen direla gogoratzetik.

Lehendabizi biderka dezagun:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = F(t) \Rightarrow ae^{st}y''(t) + be^{st}y'(t) + cy(t)e^{st} = e^{st}F(t)$$

Eta ondoren $[p, q]$ tarte batean integratzen dugu:

$$a \int_p^q e^{st} y''(t) dt + b \int_p^q e^{st} y'(t) dt + c \int_p^q e^{st} y(t) dt = \int_p^q e^{st} F(t) dt \quad (4)$$

Behin erabakitzen dugunean zein p eta q balio erabili, eskuineko gaia kalkulatu ahal izango dugu, $F(t)$ funtzioa ezaguna delako. Baina ezkerreko hiru batugaiak ezin daitezke kalkulatu, $y(t)$ ezezaguna delako (zehaztu nahi dugun funtzioa baita). Ez du ematen gauza asko konpondu dugunik, eta badirudi lehenengo ideia hori ez dela uste genuen bezain ona.

Bigarren ideia: Metodo hau alde batera utzi beharrean, gogoratzen dugu funtzio esponentzialak integratzea oso erraza dela eta zatitako integrazio metodoa aplikatzen dugu. (4) ekuazioko bigarren batugaitik hasiko gara, errazena dela ematen du-eta:

$$\begin{aligned} \int_p^q y'(t) e^{st} dt &= (u = e^{st} \Rightarrow du = s e^{st} dt \quad \text{eta} \quad dv = y'(t) dt \Rightarrow v = y(t)) = \\ &= y(t) e^{st} \Big|_{t=p}^{t=q} - s \int_p^q y(t) e^{st} dt \quad (5) \end{aligned}$$

Dirudienez ez dugu ezer aurreratzen, (5) ekuazioak $y(t) e^{st}$ ebaluatzeraz behartzen baikaitu $t = p$ eta $t = q$ puntuetan (ezagutzen ez duguna) eta baita $[p, q]$ tartean integratzeraz ere. Dirudienez, ideia hau ere ez da hain ona.

Hirugarren ideia: p eta q -ren balio egokiak aukeratuz, (5) ekuazioa sinplifikatzen saiatuko gara. $p = 0$ aukera ona da, $y(t) e^{st}$ -ren balioa $t = 0$ puntuan $y(0)$ delako; beraz, nahikoa dugu $y(0)$ ezagutzearekin; gainera, normalean hori hasierako baldintzetako bat izaten da. Eta q -ren zein balio aukera dezakegu?

Saiatu behar dugu $y(q) e^{sq} = 0$ betetzen. $q = \infty$ aukeratuz badaukagu. Noski, horretarako suposatuz behar dugu $y(t) e^{st}$ funtzioa 0-rantz doala $t \rightarrow \infty$ denean, hau da:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) e^{st} = 0 \quad (6)$$

(6) hipotesi horrek lor ditzazkegun $y(t)$ funtzioen multzoa mugatzen du, noski, ez delako beti egia izango. Adibidez, $s < 0$ eta $y(t) = t^2$ balira, hipotesia beteko litzateke, zeren:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 e^{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{e^{-st}} = 0$$

Aldiz, $s < 0$ hartuta $y(t) = e^{t^2}$ funtziorako, ez da (6) hipotesia betetzen zeren:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{t^2 + st} = \infty$$

Hala ere, beti $s < 0$ aukeratuz, (6) hipotesia funtzio askotarako betetzea lortzen dugu, e^{st} faktorea 0-rantz oso azkar doalako $t \rightarrow \infty$ denean. (6) hipotesi hori ez da horren murriztailea; Zientzian eta Ingeniaritzan erabiltzen diren $y(t)$ funtzio gehienak baldintza hori betetzen baitute, hau da, funtzio esponentzial batzuk baino mantsoago hazten dira.

10.1. Aztertu ea hurrengo $y(t)$ funtzioek (6) hipotesia betetzen duten ala ez:

a) $y(t) = e^{kt}$

b) $y(t) = t^t$

d) $y(t)$ funtzio polinomikoa da

e) $y(t)$ funtzio bornatua da $[0, \infty)$ tartean

$s < 0$ hartzea interesatzen zaigunez, s -ren ordez $-s$ aukeratuko dugu eta $s > 0$ hartuko dugu. Lehen lortu dugunagatik, (4) eta (5) adierazpenak horrela geldituko dira:

$$a \int_0^{\infty} e^{-st} y''(t) dt + b \int_0^{\infty} e^{-st} y'(t) dt + c \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (s > 0) \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} y'(t) e^{-st} dt = s \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt - y(0) \quad (8)$$

Beraz, (8) ekuazioa (7)an ordezkatur:

$$a \int_0^{\infty} e^{-st} y''(t) dt + b \left(s \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt - y(0) \right) + c \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (9)$$

Ohartu (9) adierazpenean gai bat errepikatuta agertzen dela:

$$\int_0^{\infty} y(t) e^{st} dt \quad (10)$$

eta (9) adierazpeneko azken gaia ere oso antzekoa dela

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$$

(10) berdintzan $F(t)$ -ren ordez $y(t)$ ordezkatur lortzen baita. Gai hori ebaluatu daiteke, $F(t)$ ezaguna delako. Hurrengo ariketan $F(t)$ ezberdinetarako ebaluatuko dugu.

10.2. Kalkulatu (10) adierazpenaren balioa hurrengo $F(t)$ funtzioetarako ondorengo eragiketa eginez: lehendabizi biderkatu e^{st} -gatik eta gero integratu $[0, \infty)$ tartean. Ohartu emaitza $H(s)$ moduko funtzio bat dela ($s > 0$ izanik), t aldagaiarekiko integratzen dugulako. Marratzu $H(s)$ funtzioei dagozkien grafikoak.

- a) $F(t) = k$
- b) $F(t) = t$
- d) $F(t) = t^2$
- e) $F(t) = e^{at}$

Orain, (7) adierazpenean geratzen den batugaia zatika integratzen badugu, benetan ona litzateke (10) adierazpena berriz agertuko balitz. Ikus dezagun:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} y''(t) dt &= (u = e^{-st} \Rightarrow du = -se^{-st} \text{ eta } dv = y''(t) dt \Rightarrow v = y'(t)) = \\ &= y'(t) e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} y'(t) dt = -y'(0) + s \left(s \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt - y(0) \right) = \\ &= s^2 \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt - sy(0) - y'(0) \end{aligned} \quad (11)$$

Aurreko ideiak erabiliz lortu dugu (11) adierazpena: suposatu dugu $y'(t)e^{-st}$ biderkagaia 0-rantz doala $t \rightarrow \infty$ denean. Beraz, (7) horrela geratuko da:

$$\begin{aligned} a \left(s^2 \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt - sy(0) - y'(0) \right) + b \left(s \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt - y(0) \right) + \\ + c \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \end{aligned} \quad (12)$$

Ohartu lehengo gaia ("biderkatu e^{-st} -gatik eta gero integratu emaitza $[0, \infty)$ tartean") berriz agertu zaigula. Izen bat emango diogu honi:

10.1. $[0, \infty)$ tartean definitutako $y(t)$ funtzio bat emanda, $y(t)$ -ren **Laplace-en transformata**, $\mathcal{L}(y(t))$, hurrengo moduan kalkulatzen den (existitzen bada) s aldagaiko funtzio berriari deitzen zaio:

$$\mathcal{L}(y(t)) = Y(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt, \quad (s > 0)$$

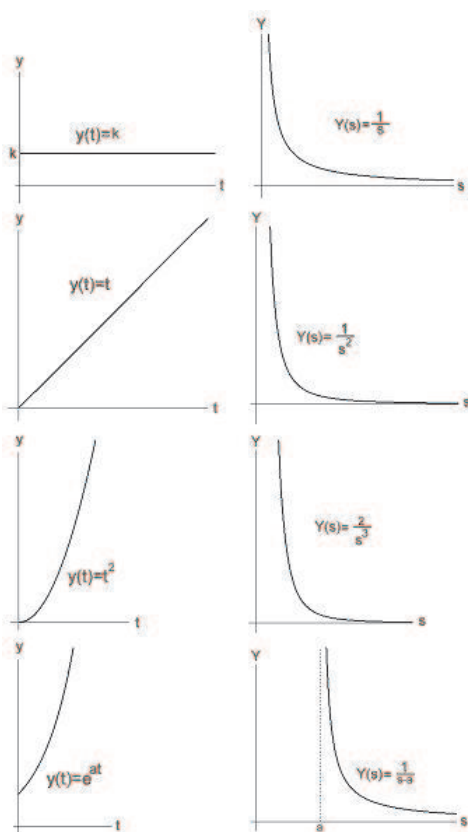
Adibidez, 10.2 ariketan ikusitakoagatik:

$$y(t) = k \Rightarrow \mathcal{L}(y(t)) = Y(s) = \mathcal{L}(k) = k/s, \quad s > 0$$

$$y(t) = t \Rightarrow \mathcal{L}(y(t)) = Y(s) = \mathcal{L}(t) = 1/s^2, \quad s > 0$$

$$y(t) = t^2 \Rightarrow \mathcal{L}(y(t)) = Y(s) = \mathcal{L}(t^2) = 2/s^3, \quad s > 0$$

$$y(t) = e^{at} \Rightarrow \mathcal{L}(y(t)) = Y(s) = \mathcal{L}(e^{at}) = 1/(s - a), \quad s > a$$



10.3 Irudia: Funtzio ezberdinen Laplace-en transformatuak

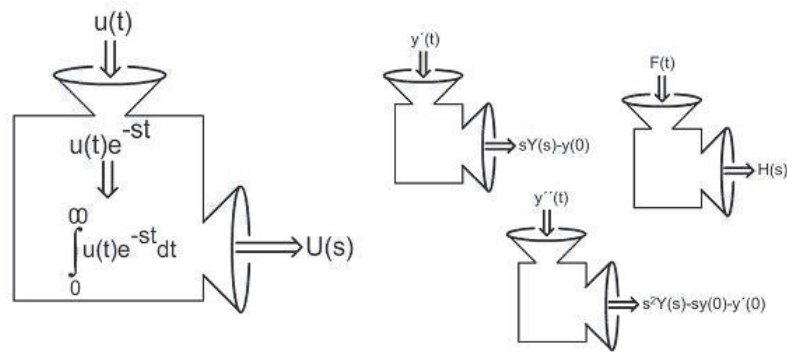
10.3 irudian $y(t)$ eta $Y(s)$ bikoteen grafikoak agertzen dira. Ikus daitekeenez, Laplace-en transformatua, $y(t)$ funtzio batzuetatik abiatuz $Y(s)$ funtzioak definitzeko modu bat da. $[0, \infty)$ tartean definitutako $y(t)$ funtzio batetik, $Y(s)$ funtzio ezberdin bat, beste D eremu batean definitutakoa, eraikitzen dugu. Adibidez, $Y(s) = \mathcal{L}(t^2) = 2/s^3$ funtzioa $s > 0$ balioetarako dago definituta; $Y(s) = \mathcal{L}(e^{4t}) = 1/(s - 4)$ funtzioa, aldiz, $s > 4$ balioetarako.

EDA (2) ekuazioari Laplace-en transformatua aplikatzen badiogu, EDA hori funtzio ezezaguna $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$ den ekuazioan bilakatzen da:

$$a(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + b(sY(s) - y(0)) + cY(s) = \mathcal{L}(F(t)) \quad (13)$$

Baina garrantzitsua zera da, (13) ekuazio berri hori ez dela ekuazio diferentzial bat, dagoneko ez baitira deribatuak agertzen. Laplace-en transformatuak $y'(t)$ eta $y''(t)$ deribatuak ezabatu ditu. Orain, (13) ekuazioaren ezezaguna $Y(s)$ da. Hala ere, ekuazioan agertzen diren $y(t)$ -ren datu batzuk ezagutu behar ditugu: $y(0)$ eta $y'(0)$.

10.4 irudian, $u(t)$ funtzio bati Laplace-en transformatua, $U(s)$, lortzeko aplikatzen zaion prozedura agertzen da. EDA-ko gai bakoitzari Laplace-en transformatua aplikatuz lortzen diren emaitzak ere agertzen dira bertan.



10.4 Irudia: Laplace-en transformatua lortzeko prozedura

Laugarren ideia: (13) ekuazio aljebraikoa dela ohartzen gara, eta beraz, hortik erraz askatu daiteke $Y(s)$.

10.3. Ariketa (??) ekuazioatik $Y(s)$ askatu.

Aplika dezagun hau guztia ondorengo adibidean. Izan bedi ondorengo hastapen baldin-

tzetako problema:

$$\begin{aligned}y'' + y' &= t \\y(0) &= 0 \\y'(0) &= 0\end{aligned}\tag{10.1}$$

(10.1) ekuazioan Laplaceren transformatua aplikatuz eta ??(b) ariketa kontutan hartuz:

$$s^2 \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt + s \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} t dt = \frac{1}{s^2}$$

Orduan:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt = \frac{1}{s^3(s+1)}\tag{10.2}$$

Beraz, (10.1) problemaren $y(t)$ soluzioa (10.2) ekuazioa betetzen duen $y(t)$ funtzioa da. (10.2) ekuazioak erakusten digu zein den $y(t)$ funtzioaren $Y(s)$ Laplaceren transformatua. Bilatzen ari garena ordea, $y(t)$ da eta ez bere transformatua. Orain gure problema hau da: $y(t)$ funtzioaren $Y(s)$ transformatua ezagutzen badugu, nola kalkula dezakegu $y(t)$?. Nola askatzen dugu $y(t)$ (10.2) ekuazioan?

Orokorrean, ondorengo probleman lortutakoa aplikatzen badugu

$$\begin{aligned}ay'' + by' + cy &= F(t) \\y(0) &= y_0 \\y'(0) &= m_0\end{aligned}\tag{10.3}$$

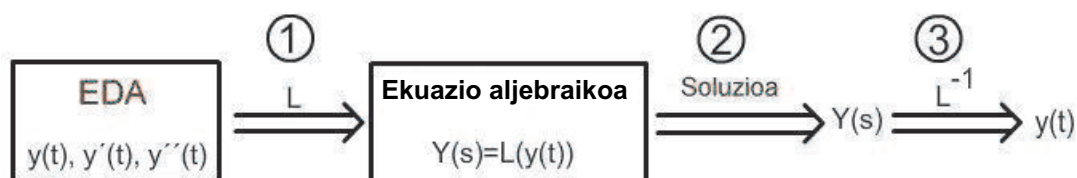
bilatutako $y(t)$ funtzioaren $Y(s)$ transformatua lortuko dugu:

$$\mathcal{L}(y) = \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt = Y(s) \Rightarrow y(t) = ?\tag{10.4}$$

Eta orain nola askatzen dugu $y(t)$ (10.4) ekuazioan?. Laplaceren alderantzizko eragiketa beharko dugu. Defini dezagun kontzeptu berri hau:

10.2. Definizioa $Y(s)$ -ren **Laplaceren alderantzizko transformatua** $\mathcal{L}(y(t)) = Y(s)$ betetzen duen $y(t)$ funtzioa da.

$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = y(t)$$



10.5 Irudia: Hiru pausu.

(10.3) problema hiru pausuetan ebatz daiteke, pausu horiek 10.5 irudian agertzen direlarik:

Falta zaigu jakitea nola kalkulatzen den $y(t)$ funtzioa $Y(s)$ -tik abiatuz.

Bostgarren ideia:

$y(t)$ funtzio batzuen $Y(s)$ transformatuen taula erabiliko dugu. Taula horren bidez $y(t)$ -ren $Y(s)$ transformatua ezagutuz gero $y(t)$ kalkulatuko dugu. Adibidez, 1. taula ?? ariketaren emaitzen bidez osatu da:

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$	$F(s) = \mathcal{L}(y(t))$
k	$\frac{k}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

10.1 Taula: 10.1 taula.

Taula hau erabiliz, erraza da ondorengo berdintzak frogatzea:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s}\right) = 6$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-4}{s^2}\right) = -4t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{s^3}\right) = \frac{5}{2}t^2$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s-5}\right) = 4e^{5t}$$

10.4. Ariketa

$$Y(s) = \frac{6}{s} - \frac{3}{s^2} + \frac{4}{s^3} + \frac{2}{s-5}$$

funtzioaren Laplaceren alderantzizko transformatua kalkulatu.

Praktikan, 10.1 taulan agertzen diren baino funtzio gehiago erabiltzen dira, adibidez 10.2 taulan agertzen direnak. Taulak, $y(t)$ -ren $Y(s)$ transformatua kalkulatzeko edota $Y(s)$ -ren alderantzizko transformatua $y(t)$ kalkulatzeko erabiltzen dira.

10.2 taularen bidez, aplikazio praktikoetan agertzen diren funtzioen transformatuak eta alderantzizko transformatuak kalkula ditezke. Horrez gain, oso erraza da bi eragile hauen linealtasuna frogatzea. Edozein A eta B zenbaki errealeentzat:

$$\mathcal{L}(Au(t) + Bv(t)) = A\mathcal{L}(u(t)) + B\mathcal{L}(v(t))$$

$$\mathcal{L}^{-1}(AU(s) + BV(s)) = A\mathcal{L}^{-1}(U(s)) + B\mathcal{L}^{-1}(V(s)) = Au(t) + Bv(t)$$

Orduan, taulan agertzen diren funtzioen konbinazio linealen transformatuak eta alderantzizko transformatuak kalkula ditzakegu.

10.5. Ariketa

1. $y(t) = 3\sin(4t) - 5e^{-6t} + 3t^2 - t + 2$ funtzioaren transformatua kalkulatu.
2. $F(s) = \frac{1}{s^4} + \frac{5}{2s-3} - \frac{6}{2s^2+3}$ funtzioaren alderantzizko transformatua kalkulatu.

10.6. Ariketa (10.2) ekuazioan egiteke utzi genuen (10.1)ariketa bukatu:

$$\mathcal{L}(y(t)) = \frac{1}{s^3(s+1)} \Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s+1)}\right)$$

$y(t)$	$Y(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$t^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s + \alpha}$
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
$\cos \omega_0 t$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
$\sinh \beta t$	$\frac{\beta}{s^2 - \beta^2}$
$\cosh \beta t$	$\frac{s}{s^2 - \beta^2}$

10.2 Taula: 10.2 taula: Laplaceren transformatuak.

10.3 Transformatuen existentzia eta bakartasuna.

Orain arte suposatu dugu erabilitako funtzioen $Y(s)$ Laplaceren transformatua existitzen zela. Adibidez, $\mathcal{L}(e^{t^2})$ eta $\mathcal{L}^{-1}(2s + 1)$ adierazpenekin eragiketak egin ditzakegu baina ez dira existitzen. Zer baldintzetan $y(t)$ -ren transformatua $Y(s)$, eta $Y(s)$ -ren alderantzizko

transformatua, $y(t)$ existitzen dira?

Aurreko atalan (ikus hirugarren ideia), $y(t)$ funtzioak Laplaceren transformatua onartzeko bete behar diren baldintza nahikoak agertu ziren. Gogora ezazu kasu horretan behar genuen baldintza hau zela:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) e^{-st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{e^{st}} = 0 \quad (s > 0) \quad (10.5)$$

(10.6) baldintzak ondorengoa esan nahi du: $y(t) \rightarrow \infty$ $t \rightarrow \infty$ doanean gertatzen bada, bere ordena e^{st} ($s > 0$) esponentzial baten ordena baino txikiagoa izan behar duela. Idatz dezagun formalki ideia hau ondorengo teoreman:

10.1. Teorema [Laplaceren transformatuaren existentzia.] *Izan bedi $y(t)$ $[0, \infty)$ tartean zatika jarraia den funtzioa. Ondorengo baldintza betetzen duten eta negatiboak ez diren a , M eta T konstanteak badaude:*

$$|y(t)| \leq M e^{at} \quad \forall t \geq T$$

Orduan $y(t)$ funtzioaren $Y(s)$ Laplaceren transformatua onartzen du.

Teorema honen frogapena erraza da:

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(y(t))| &= \left| \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-st} |y(t)| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \\ &= M \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = M \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{(a-s)t} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \Bigg|_{t=0}^{t=A} \stackrel{s \geq a}{=} \frac{1}{s-a} \quad \text{Bornatua} \end{aligned}$$

Beraz, 10.1 teoremaren hipotesia betetzen bada, integral inpropioa konbergentea da $s > a$ denerako. Ohar zaitez, $y(t)$ funtzioa bete behar duen baldintza bakarra $[0, \infty)$ tartean zatika jarraia izatea dela. $[0, \infty)$ tartean zatika jarraia den funtzioa, $[0, b]$ itxurako tarte guztietan jarraia da puntuen kopuru finitu batean ezik non saltu finituko etenguneak dituen. 10.2 irudian zatika jarraiak diren funtzio batzuk agertzen dira. Zatika jarraia izatearen baldintza ez ditu asko murrizten funtzioaren propietateak; Zientzietan eta Ingenieritzan erabiltzen diren funtzio askok betetzen dute baldintza hori. Adibidez, funtzio jarraiak zatika jarraiak dira.

10.7. Ariketa 10.1 teoremaren frogapenean ikusi dugu $F(s)$, $f(t)$ -ren transformatua denean ondorengoa betetzen dela:

$$|F(s)| \leq \frac{1}{s-a} \quad (s > a)$$

orduan:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0 \quad (10.6)$$

Beraz, $f(t)$ -ren transformatua $F(s)$ izateko beharrezkoa da baina ez da nahikoa (10.6) baldintza betetzea. (10.6) baldintzak ez du balio $F(s)$ funtzioak alderantzizko transformatua onartzen duela frogatzeko, baina erabil daiteke alderantzizko transformatua onartzen ez duela frogatzeko. Noiz egin dezakegu baieztapen hau?.

3. atal honen hasieran esan genuen ez dagoela $\mathcal{L}^{-1}(2s+1)$; esan dezakezu orain zergatik gertatzen den hau?. Eman dezakezu alderantzizko transformatua onartzen ez duten beste $F(s)$ funtzioen adibideak?.

10.8. Ariketa 10.1 teoremako baldintzak betetzen dituen $y(t)$ funtzioari **ordena esponentzialeko funtzioa** deritzo. Ondorengo $y(t)$ funtzioak ordena esponentzialeko funtzioak direla frogatu.

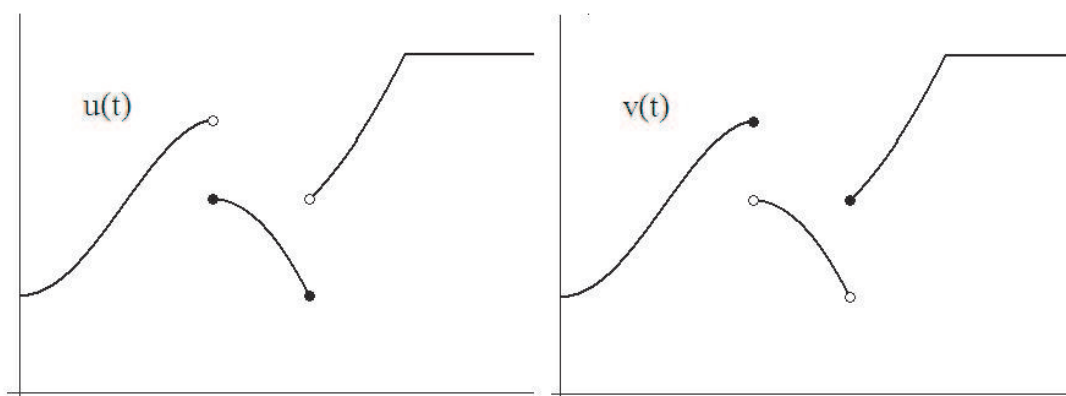
1. $y(t) = ke^{bt}$
2. $y(t) = k \sin(bt)$
3. $y(t) = k \cos(bt)$

10.9. Ariketa [Transformatuen bakartasuna.] Gerta daiteke $u(t)$ eta $v(t)$ funtzio desberdinak transformatu berdinak izatea?. Froga daiteke $u(t)$ eta $v(t)$ funtzioak ezin direla desberdinak izan luzera positibodun tarte bateko puntu guztietan. Bereziki, jarraiak diren funtzio desberdinak transformatu berdinak dituzte. Baina, $u(t)$ eta $v(t)$ puntu isolatu batzuetan desberdinak izan daitezke eta transformatu berdinak izan. Konproba ezazu, azkeneko hau, 10.6 irudian agertzen diren funtzioek betetzen dutela.

Aurreko ariketan ikus daiteke zatika jarraiak diren bi funtzio desberdinak bere Laplace-ren transformatua berdina izanik, puntu isolatuetan bakarrik desberdinak izan daitezkeela. Beraz, alderantzizko transformatua funtsean bakarra da; aplikazioetan desberdintasun horiek orokorrean garrantzitsuak ez direlako.

10.4 Laplaceren transformatuen propietateak.

Ikusi dugunez 10.2 taula eta linealtasunaren propietatea erabiliz, aplikazio praktikoetan agertzen diren funtzio batzuen transformatuak eta alderantzizko transformatuak kalkula daitezke. Hala ere, 10.2 taulako funtzioen konbinazio linealak ez diren funtzioak. Adibidez,



10.6 Irudia: Transformatuen bakartasuna.

10.7 irudian tentsioen edo indarren grafikoak agertzen dira eta ez ditugu funtzio hauen transformatuak.

Batzuetan $u(t)$ funtzioaren transformatua $U(s)$ ezagutzen dugu, baina ezagutu behar dugu, $u(t)$ -rekin lortzen diren funtzio berrien transformatuak.

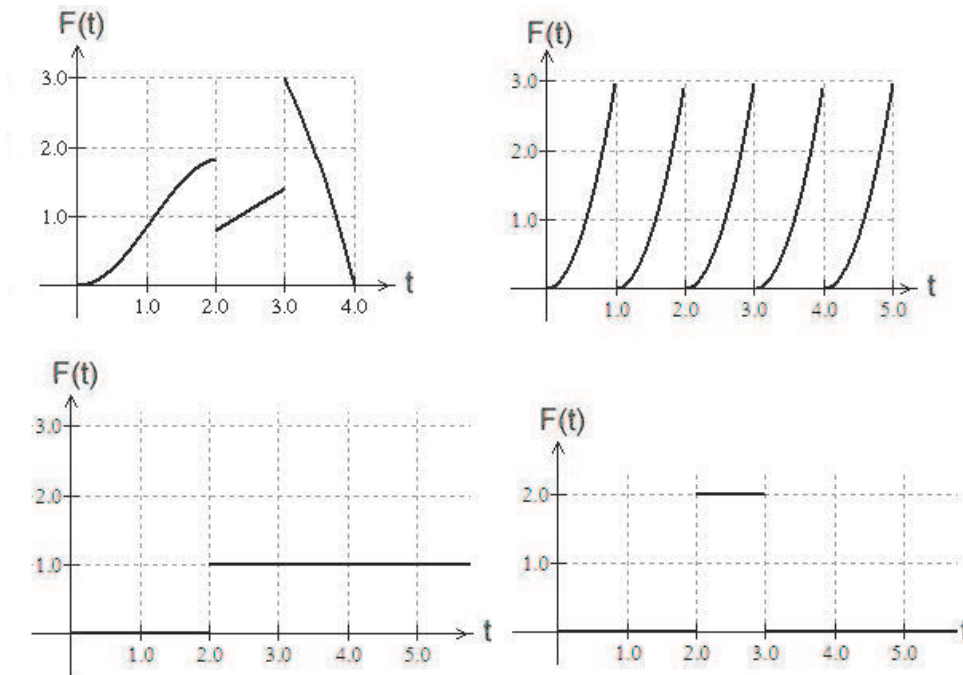
Adibidez, $\mathcal{L}(u(t))$ ezaguna bada, zein izango da $v(t) = e^{at}u(t)$ eta $v(t) = t^n u(t)$ funtzio berrien transformatua?. 10.8 irudian $u(t) = \cos(2t)$ eta bere transformatua $U(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$ agertzen dira. $v(t) = u(t)e^{-0.2t}$ eta $v(t) = u(t) \cdot t$ funtzio berriak ere marraztu ditugu. Zeintzuk dira funtzio hauen transformatuak?.

$v(t)$ funtzio berri baten transformatua kalkulatzeko Laplaceren transformatuaren definizioa aplika daiteke:

$$\mathcal{L}(v(t)) = V(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} v(t) dt$$

baina kalkulu hau zaila izan daiteke integral inpropio baten balioa kalkulatu behar delako. Adibidez, ez da erraza $v(t) = t^3 e^{-t} \sin(2t)$ funtzioaren transformatua kalkulatzeko definizioa aplikatzen badugu. Eta alderantzizkoak kalkulatzeko metodo bakarra dugu: 10.2 eta linealtasuna aplikatzea. Adibidez, zein izango da $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s+1}$ funtzioaren alderantzizko transformatua?

Askotan, transformatuen kalkulua egiteko taulak erabiltzeaz gain, transformatua eta alderantzizko transformatuaren propietateak ere erabiltzen dira. Ondoren propietate ga-



10.7 Irudia: Zatika jarraiak diren funtzioak.

rrantzitsuenak enuntziatuko ditugu.

Demagun $U(s)$ eta $V(s)$, $u(t)$ eta $v(t)$ funtzioen Laplaceren transformatuak direla hurrenez hurren.

10.10. Ariketa [linealtasuna]

A eta B hautazko kontante errealak badira:

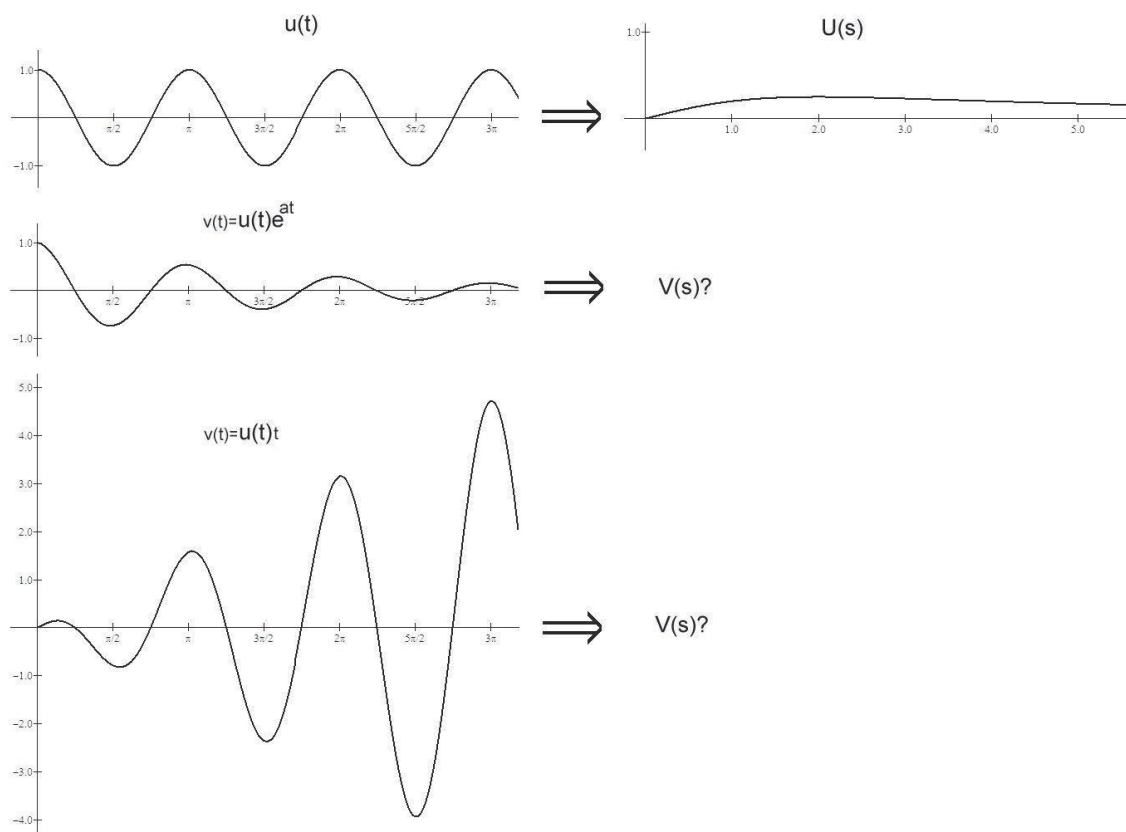
$$\mathcal{L}(Au(t) + Bv(t)) = A\mathcal{L}(u(t)) + B\mathcal{L}(v(t))$$

Antzeko eran, alderantzizko transformatuarentzat:

$$\mathcal{L}^{-1}(AU(s) + BV(s)) = A\mathcal{L}^{-1}(U(s)) + B\mathcal{L}^{-1}(V(s)) = Au(t) + Bv(t)$$

10.11. Ariketa [lehenengo traslazio propietatea]

$$\mathcal{L}(e^{at}u(t)) = U(s - a) \quad (s > a)$$



10.8 Irudia: Funtzio gehiago.

Antzeko eran, alderantzizko transformatuarentzat:

$$\mathcal{L}^{-1}(U(s-a)) = e^{at}u(t) \quad (s > a)$$

10.12. Ariketa [bigarren traslazio propietatea]

$$\text{Si } h(t) = \begin{cases} u(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases} \quad \text{orduan } \mathcal{L}(h(t)) = e^{-as}U(s)$$

Antzeko eran, alderantzizko transformatuarentzat:

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}U(s)) = \begin{cases} u(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

10.13. Ariketa [eskala aldaketa]

$$\mathcal{L}(u(at)) = \frac{1}{a} U\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0)$$

Antzeko eran, alderantzizko transformatuarentzat:

$$\mathcal{L}^{-1}(U(as)) = \frac{1}{a} u\left(\frac{t}{a}\right)$$

10.14. Ariketa [n. ordenako deribatua]

$$\mathcal{L}(u^{(n)}(t)) = s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0)$$

10.15. Ariketa [funtzio integrala]

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t u(z) dz\right) = \frac{U(s)}{s}$$

Antzeko eran, alderantzizko transformatuarentzat:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{U(s)}{s}\right) = \int_0^t u(z) dz$$

10.16. Ariketa [t^n -rekiko biderkaketa]

$$\mathcal{L}(t^n u(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} (U(s))$$

Antzeko eran, alderantzizko transformatuarentzat:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{d^n}{ds^n} (U(s))\right) = (-1)^n t^n u(t)$$

10.17. Ariketa [funtzio periodikoa.]

$u(t)$, T periodoko funtzio periodikoa bada(hau da, $u(t+T) = u(t)$ edozein t -rako):

10.18. Ariketa 10.11 propietatea frogatu eta grafikoki interpretatu.

10.19. Ariketa 10.12 propietatea grafikoki adierazi.

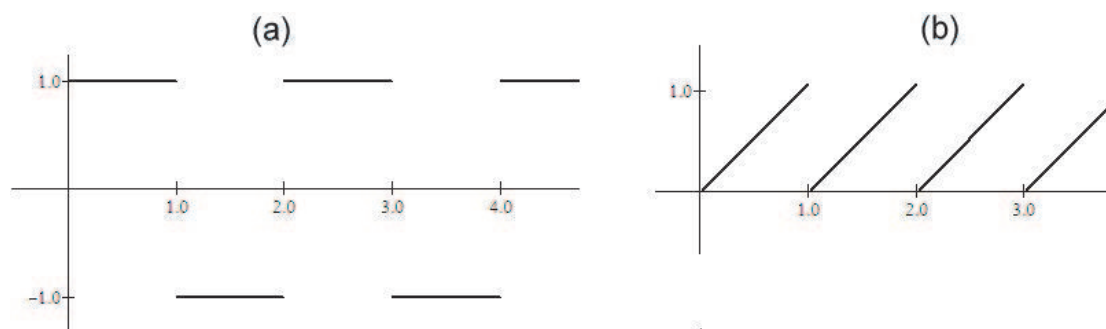
10.20. Ariketa 10.14 propietatea frogatu. Ohar zaitez propietate honen bidez, koefiziente konstantedun eta $n > 2$ dueneko E.D.A. ebatzi ahal dugula.

10.21. Ariketa 10.15 propietatea frogatu.

LAGUNTZA: Funtzio integrala deribatu eta gero deribatuaren Laplaceren transformatua kalkulatu.

10.22. Ariketa 10.8 irudian agertzen diren $v(t)$ funtzioen transformatua lortu.

10.23. Ariketa 10.9 irudian agertzen diren funtzioen Laplaceren transformatua kalkulatu.



10.9 Irudia: Funtzio periodikoak.

10.24. Ariketa Ondorengo transformatuak kalkulatu:

1. $\mathcal{L}(e^{-t} \cos t)$

2. $\mathcal{L}(t^2 e^{2t})$

3. $\mathcal{L}\left(\int_0^t \sin z \, dz\right)$

4. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right)$

5. $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{4s + 12}{s^2 + 8s + 16} \right)$

6. $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{6s - 4}{s^2 - 4s + 20} \right)$

7. $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2(s + 1)^2} \right)$

10.25. Ariketa Kalkulatu:

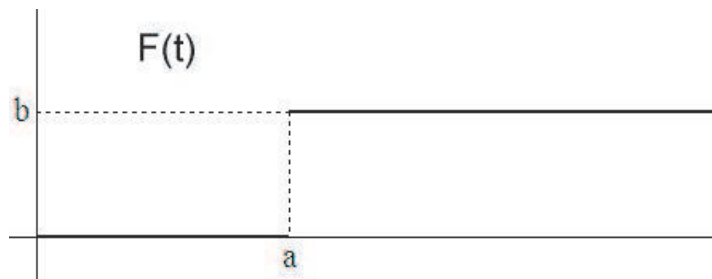
a) $\mathcal{L}(e^{-t} \cos t)$	e) $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{4s + 12}{s^2 + 8s + 16} \right)$
b) $\mathcal{L}(t^2 e^{2t})$	f) $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{6s - 4}{s^2 - 4s + 20} \right)$
c) $\mathcal{L} \left(\int_0^t \sin 2z dz \right)$	g) $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2(s + 1)^2} \right)$
d) $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-5s}}{(s - 2)^4} \right)$	

10.26. Ariketa Honako problema hau ebatzi:

$$y'' + y = F(t)$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

non $F(t)$ (10.10) irudian agertzen den funtzioa den.

10.10 Irudia: (10.26) ariketako funtzioa

10.27. Ariketa Laplaceren transformatua erabiliz honako problema honen soluzioa aurki dezakegu:

$$ay'' + by' + cy = F(t)$$

$$y(0) = y_0$$

$$y'(0) = m_0$$

Batzuetan, ordea, hasierako baldintzak ez daude $t = 0$ puntuan emanda, baizik eta t_0 beste puntu desberdin batetan diferente: $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = m_0$. Edo, agian, ditugun datuak mugalde-baldintzak dira: $y(t_0) = y_0$, $y(t_1) = y_1$. Gerta daiteke ere kalkulatu nahi duguna ez dela $ay'' + by' + cy = F(t)$ EDA-ren soluzio partikular, soluzio orokorra baizik. Hala ere, $y'(t)$ eta $y''(t)$ funtzioen transformatuak kalkulatzeko $y(0)$ eta $y'(0)$ -ren balioak ezagutu behar ditugu. Pentsa ezazu problema hau ebazteko bide batetan eta aplikatu ezazu ondorengo egoeraetan:

a) Problema honen soluzioa aurkitu

$$y'' - 3y' + 2y = 4t - 6$$

$$y(1) = y'(1) = 2 + e$$

b) Ekuazio honen soluzio orokorra aurkitu:

$$y'' - 3y' + 2y = 4t - 6$$

10.5 Konboluzioaren propietatea

Transformatuen taula eta propietateak erabiltzen funtzio ugarien Laplaceren alderantzizko transformatua kalkulatzeko gai gara. Orain saiaturiko gara $H(s) = s/(s^2 + 1)^2$ funtzioaren alderantzizko transformatua kalkulatzeko. Lortzeko, oinarritzko frakzioen baturan deskonposaturiko dugu:

$$\frac{s}{(s^2 + 1)^2} = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 1)^2}$$

Egiazta dezakegu $A = B = 0$, $C = 1$ eta $D = 0$ lortzen dela. Hau da, deskonposaketa ez da baliagarria. Askotan, $H(s)$ funtzioa, zeinen alderantzizko transformatua $h(t)$ behar dugun, bi funtzioen biderkadura bezala idaz daiteke, $H(s) = F(s)G(s)$. Gure kasuan, har dezakegu:

$$H(s) = s \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \quad F(s) = s \quad G(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$$

baina ez da aukera on bat (ba al dakizu zergatik?). Ordea, hartzen badugu

$$H(s) = \frac{s}{s^2+1} \frac{1}{s^2+1} \quad F(s) = \frac{s}{s^2+1} \quad G(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

hau lortuko da:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2+1} \right) = \cos t$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2+1} \right) = \sin t$$

Zein eroso litzateken $F(s) \cdot G(s)$ biderkaduraren alderantzizko transformatua alderantzizko transformatuen biderkadura izango balitz, hau da, beteko balitz:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) \cdot \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = f(t) \cdot g(t) \quad (10.7)$$

(10.7) erlazioa egiazkoa izango balitz, orduan:

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{(s^2+1)^2} \right) = \cos t \sin t$$

Beraz, egiten dugun galdera hau da: orokorrean, (10.7) erlazioa egiazkoa al da? Ba, zoritxarrez, EZ. Izan ere, har ditzakegun $F(s)$ eta $G(s)$ funtzioen adibide gehienetan ez da betetzen.

10.28. Ariketa $F(s) = 1/s$ eta $G(s) = 1/s$ funtzioak erabili (10.7) erlazioa ez dela betetzen frogatzeko.

Erosoa izango litzateke, aldagai bateko funtzioen integralarekin gertatzen den bezala, biderkaduraren alderantzizko transformatua alderantzizko transformatuen biderkadura izango balitz; baina hau, orokorrean, ez da betetzen.

Orduan, gure lanaren helburua hau izango da: $H(s) = F(s) \cdot G(s)$ biderkaduraren $h(t)$ Laplaceren alderantzizko transformatua kalkulatzeko, $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$ eta $g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s))$ faktoreen alderantzizko transformatuak erabiliz.

Has gaitezen $F(s) \cdot G(s)$ idazten, transformatuaren definizioa erabiltzen eta biderkadura hau integral bikoitzaren bidez adierazten (dotorea da bi kontzeptuen arteko erlazioa!):

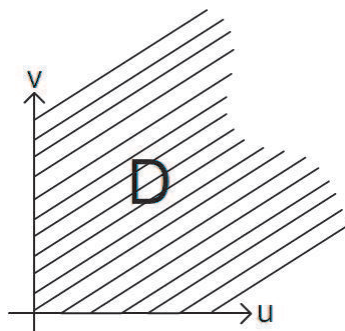
$$F(s) \cdot G(s) = \left(\int_0^\infty e^{-su} f(u) du \right) \left(\int_0^\infty e^{-sv} g(v) dv \right) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u) g(v) du \right) dv$$

(10.8)

(10.8) adierazpena honako funtzio honen integral bikoitzaren kalkulua da:

$$R(u, v) = e^{-s(u+v)} f(u)g(v)$$

$D = \{(u, v)/u \in [0, \infty), v \in [0, \infty)\}$ eremuan. (10.11) irudian D integrazio-eremua azaltzen da.



10.11 Irudia: Integrazio-eremua

Adibidez, aurreko adibidearen funtzioak hartzen baditugu:

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 1}, \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad f(t) = \cos t, \quad g(t) = \sin t$$

$$R(u, v) = e^{-s(u+v)} \cos(u) \sin(v)$$

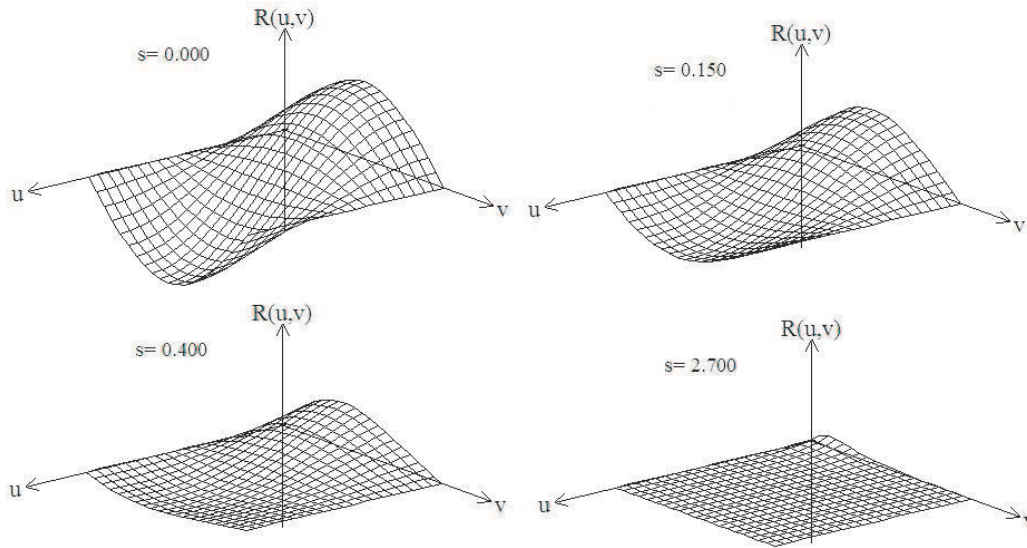
Orain, s -ren balio finko bakoitzarentzat, $F(s) \cdot G(s)$ biderkaduraren balioa $F(u, v)$ -ren integrala D eremuan da. Adibide honentzat, (10.12) irudian s parametroaren balioak finkatuz lortzen diren $z = R(u, v)$ gainazalen zatiak azaltzen dira. $F(s) \cdot G(s)$ biderkaduraren balio zehatza $R(u, v) = e^{-s(u+v)} \cos(u) \sin(v)$ funtzioaren D eremuan integral bikoitzaren balioa da.

Orain (10.8) erlazioa aldagai-aldaketa honekin aplikatuko dugu:

$$v = v$$

$$u = t - v$$

Hau da, v aldagaia ez da aldatzen eta u aldagaia $t-v$ aldagaiaz ordezkutzen da, t aldagai berri bat izanik. Gogora ezazu integral bikoitzan aldagai-aldaketa aplika ahal izateko aldaketaren Jacobiarra behar dugula.

10.12 Irudia: $R(u, v) = e^{-s(u+v)} \cos(u) \sin(v)$

10.29. Ariketa Aldagai-aldaketa honen Jacobiarraren balio absolutua $|J| = 1$ dela frogatu.

Orain integrazioko muga berriak kalkulatu ditugu:

Kanpoko integralean, v aldagaia $[0, \infty)$ tartean aldatzen da.

Barruko integralean, v -ren hautazko balio bat hartuko dugu:

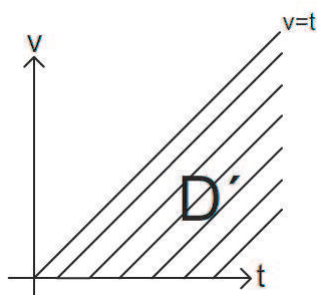
Beheko muga: $u = 0 \Rightarrow t = v$

Goiko muga: $u = \infty \Rightarrow t = \infty$

Orduan, (10.8) geldituko da:

$$F(s) \cdot G(s) = \int_0^\infty \left(\int_v^\infty e^{-st} f(t-v)g(v)dt \right) dv \quad (10.9)$$

(10.13) irudian integrazio eremu berria, D' , azaltzen da. Ikus ezazu zein den integrazio ordena (10.9) adierazpenan.



10.13 Irudia: Integrazio-eremu berria

Orain (10.9) integralean integrazio ordena aldatuko dugu (froga dezakegu hau ezinezkoa dela f eta g ordena esponenzialekoak badira):

$$F(s) \cdot G(s) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^t e^{-st} f(t-v)g(v)dv \right) dt \quad (10.10)$$

(10.10) adierazpenan e^{-st} faktorea kanpoko integraletik ateratzen dugu, v -ren menpekoa ez delako:

$$F(s) \cdot G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\int_0^t f(t-v)g(v)dv \right) dt \quad (10.11)$$

Nabaritu barruko integrala t -ren funtzio bat dela, $f(t-v)g(v)$ funtzioa v -rekiko $[0, t]$ tartean integratzen delako. Barruko integralaren emaitze horrela definiturik dagoen $h(t)$ funtzio bat da:

$$h(t) = \int_0^t f(t-v)g(v)dv$$

Orduan, (10.11) adierazpenan daukaguna $h(t)$ -ren Laplaceren transformatua da. Beraz:

$$F(s) \cdot G(s) = \mathcal{L} \left(\int_0^t f(t-v)g(v)dv \right) \quad (10.12)$$

Edo, baliokieki:

$$\mathcal{L}^{-1} (F(s) \cdot G(s)) = \int_0^t f(t-v)g(v)dv \quad (10.13)$$

Ondorioz, $F(s) \cdot G(s)$ biderkaduraren $h(t)$ alderantzizko transformatua kalkulatzeko egin beharrekoa hau da:

1. $F(s)$ eta $G(s)$ funtzioen $f(t)$ eta $g(t)$ alderantzizko transformatuak kalkulatu.
2. $h(t)$ funtzioa modu honetan lortuko da:

$$h(t) = \int_0^t f(t-v)g(v)dv \quad (10.14)$$

Ikus dezagun prozesu hau aplika dezakegun aurreko adibidearen funtzioekin, $F(s) = s/(s^2 + 1)$, $G(s) = 1/(s^2 + 1)$, $f(t) = \cos t$ eta $g(t) = \sin t$. (10.13) erlazioa kontutan hartuz:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{(s^2 + 1)^2} \right) = \int_0^t \cos(t-v) \sin v dv$$

eta $\cos B \sin A = \frac{1}{2} (\sin(A+B) + \sin(A-B))$ betetzen denez, honako hau lortzen da:

$$h(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \sin t + \sin(2v-t) dv = \frac{1}{2} \left(v \sin t - \frac{\cos(2v-t)}{2} \right) \Big|_{v=0}^{v=t} = \frac{1}{2} t \sin t$$

Emaitzaren egiaztapena erraza da, transformatuaren zazpigarren propietatea (t^n -rekiko biderkaketa, $n = 1$ kasuan) aplikatzen bada:

$$\mathcal{L} \left(\frac{1}{2} t \sin t \right) = \frac{(-1)^1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2}$$

Beraz, $F(s) \cdot G(s)$ biderkaduraren alderantzizko transformatua aaurkitzeko gakoa f eta g funtzioen artean egiten den (10.14) eragiketa da. Eragiketa garratzitsu hori izen bat emango diogu.

10.3. Definizioa *Izan bitez $f(t)$ eta $g(t)$ ordena esponentzialeko bi funtzio. Ondoren azaltzen den bi funtzioen arteko eragiketari funtzioen konboluzioa deitzen zaio, eta $f(t) * g(t)$ adierazten da:*

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-v)g(v)dv \quad (10.15)$$

Erraza da (10.15) eragiketa trukakorra dela egiaztatzea, hau da,

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

Orduan, definizio honen ondorioz:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = f(t) * g(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) * \mathcal{L}^{-1}(G(s))$$

Edo, baliokideki:

$$F(s) \cdot G(s) = \mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(f(t) * g(t))$$

Laburbilduz:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t) * g(t)) &= \mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t)) \\ \mathcal{L}^{-1}(F(s)) * \mathcal{L}^{-1}(G(s)) &= \mathcal{L}^{-1}(F(s) \cdot G(s)) \end{aligned} \quad (10.16)$$

Aurreago adibide batean ikusi dugunez, biderkaduraren transformatua ez da, orokorrean, transformatuen biderkadura. Hau da, orokorrean:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t) \cdot g(t)) &\neq \mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t)) \\ \mathcal{L}^{-1}(F(s)) \cdot \mathcal{L}^{-1}(G(s)) &\neq \mathcal{L}^{-1}(F(s) \cdot G(s)) \end{aligned} \quad (10.17)$$

Baina (10.16) erlazioek esaten dutenez, (10.17) erlazioetako ezkerreko gaietan biderkadurak gure biderkaketa berria (konboluzioa) erabiltzen kalkulatzen badira, orduan bai betetzen dela propietate hau: *“biderkaduraren transformatua transformatuen biderkadura da”*.

10.30. Ariketa Konboluzioa erabiliz, kalkulatu $ay'' + by' + cy = F(t)$ EDA-ren soluzio orokorra.

LAGUNTZA: Transformatua aplikatu, $Y(s)$ askatu eta alderantzizko transformatua aplikatu $y(t)$ lortzeko. Ikusiko duzunez, $as^2 + bs + c = 0$ ekuazioaren erroak aztertu beharko dituzu, eta ekuazio hau EDA-ren ekuazio karakteristiko da.

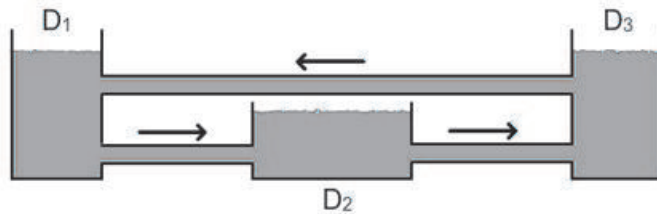
10.6 Ekuazio diferentzial arrunten sistema linealak

Aurreko gaien (Ekuazio Diferentzial Arruntak), $y(t)$ funtzio ezezagun bat eta bere deribatuetan erlazionatzen zituzten ekuazioak ebazteko metodo batzuk aztertu genituen.

Baina aplikazio askoetan aurkitu behar ditugun funtzio ezezagun batzuk agertzen dira, ekuazio diferentzial arrunt batzuen bidez erlazionaturik daudenak. Orduan, ekuazio diferentzialen sistema bat ebatzi beharko da. Ikus ditzagun adibide batzuk.

10.1. Adibidea (Hartzidura-tangak.)

(10.14) irudian muztioa hartziduraz ardo bihurtzeko sistema bat azaltzen da. Sistema edukiera berdineko hiru tangez osatuta dago, eta beraien artean likidoa abidura konstantez (*litro/egun*-etan neurtuta) zirkulatzen da. Muztioa hartitzen den neurrian, tanga bakoitzean dagoen alkohol-kantitatea (*Kg*-etan) aldatzen da. Irabiatuz, tanga bakoitzean alkohol-kontzentrazio konstantea lortzen dugu, baina kontzentrazio hori tanga batetik bestera desberdina izan daiteke, alkohol-kantitateak ere desberdinak izan daitezkelako. Aztertu nahi duguna une bakoitzean tanga bakoitzean egongo den alkohol-kantitatea da.



10.14 Irudia: Hartzidura-tangak

Izan bitez $x_1(t)$, $x_2(t)$ eta $x_3(t)$ tanga bakoitzean t unean dauden alkohol-kantitateak (*Kg*-etan). Hiru funtzio hauek kalkulatzeko eredu bat lortuko dugu.

$x_1(t)$ D_1 -ean dagoen alkohol-kantitatea (*Kg*-etan) denez, tanga bakoitzaren edukierari (*litro*-etan) C deitzen badiogu, orduan $x_3(t)/C$ D_3 tangen t unean dagoen alkohol-kontzentrazioa izango da. Likidoa zirkulatzeko abiadura v (*litro/egun*-etan) bada, orduan alkohola D_1 -era $v x_3(t)/C$ abiaduran (*Kg/egun*-etan) sartuko da. Orain D_2 -ra joateko alkoholaren ateratzeko abiadura kentzen badiogu, $x_1(t)$ aldatzeko abiadura (*Kg/egun*-etan) lortuko dugu:

$$x_1'(t) = v \frac{x_3}{C} - v \frac{x_1}{C}$$

Prozesu berdina D_2 eta D_3 tangak kontsideratuz errepikatzen badugu, ondorengo eredu

lortuko dugu:

$$x_1'(t) = v \frac{x_3}{C} - v \frac{x_1}{C}$$

$$x_2'(t) = v \frac{x_1}{C} - v \frac{x_2}{C}$$

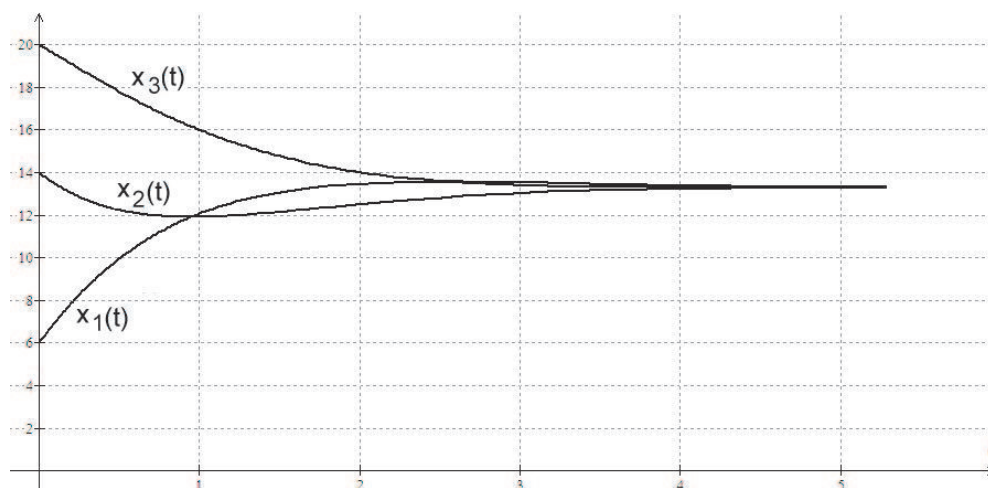
$$x_3'(t) = v \frac{x_2}{C} - v \frac{x_3}{C}$$

$$x_1(0) = C_1$$

$$x_2(0) = C_2$$

$$x_3(0) = C_3$$

Eredu honetan C_1 , C_2 eta C_3 balioak tanga bakoitzeko hasierako alkohol-kantitateak dira. (10.15) irudian Winploten bidez lortutako soluzioaren grafikoak azaltzen dira, hasierako baldintza hauekin: alkoholeko $C_1(0) = 6$ gramo, $C_2(0) = 14$ gramo, $C_3(0) = 20$ gramo, $v = 5.4$ litro/egun eta $C = 7.3$ litro. Ikusten denez, tanga bakoitzeko alkohol-kantitatea balio berberantz joaten da, eta balio hau gutxi gora behera 13.32 gr da $t = 5.7$ egun pasatzen direnean.

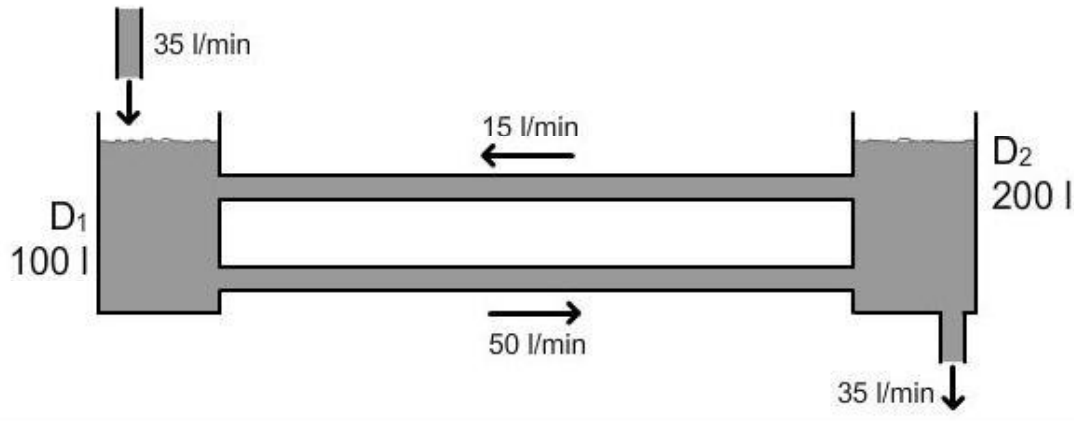


10.15 Irudia: Alkohol-kantitatea tanga bakoitzean

10.31. Laplaceren transformatua erabiliz problema ebazteko metodo analitiko bat adierazi.

10.32. 100 l eta 200 l-ko kapazitatea dituzten bi tanga gatzunez (ura eta gatza) beteta ditugu eta (10.16) irudian adierazitako eran elkar konektatuta daude. Lehenengo tangan 30

l/m ur geza sartzen da, eta bigarren tangatik ura irteten da abiadura berdinekin. Tanga bakoitzean t unean dagoen gatza (kg) adierazten duen ereduak lortu. Zer nolako baliotara konbergitu dute tanga bakoitzeko gatz kantitateak? Egiaztatu ekuazio-sistema ebatziz.



10.16 Irudia: Gatzun tangak

10.2. Adibidea

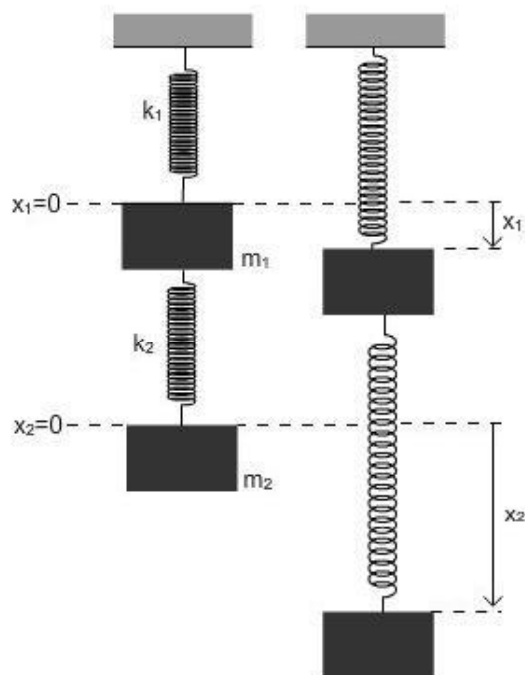
(10.17) irudian bertikalki mugitzen diren bi malguki eta euren lotutako bi masa adierazita ditugu. k_1 eta k_2 dira malgukien konstanteak eta m_1 eta m_2 masek $x_1(t)$ eta $x_2(t)$ -ko desplazamenduak dute.

Malguki eta masa horiek osatzen duten sistemaren ereduak honako hau da:

$$\begin{aligned}
 m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\
 m_2 x_2'' &= -k_2 (x_2 - x_1) \\
 x_1(0) &= d_1 \\
 x_1'(0) &= v_1 \\
 x_2(0) &= d_2 \\
 x_2'(0) &= v_2
 \end{aligned}
 \tag{10.18}$$

Hastapen baldintzetan d_1 , eta d_2 masen hasierako desplazamenduak dira eta v_1 , v_2 hasietako abiadurak.

10.33. (10.32) ariketan adierazitako prozedura erabil daiteke kasu hau ebatzeko?

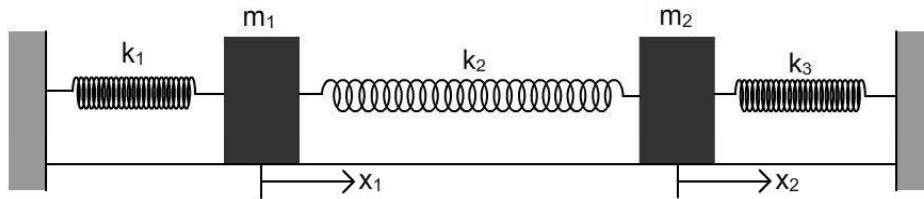


10.17 Irudia: Malgukiak

10.3. Adibidea Aurreko kasuaren antzerako bidearekin (10.18) irudian dugun bi masa eta hiru malgukiek osatzen duten sistemaren mugimenduaren eredua (10.19) ekuazioen bidez adieraz dezakegu.

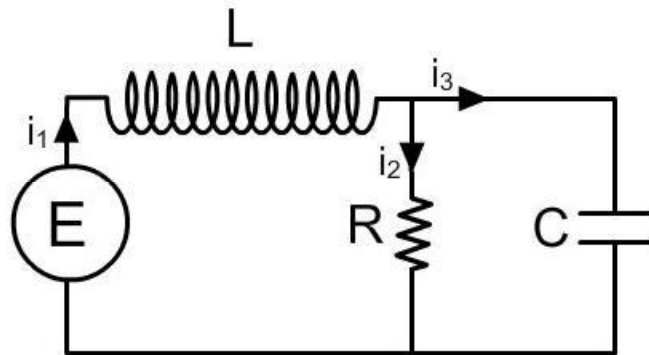
$$\begin{aligned}
 m_1 x_1'' &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 \\
 m_2 x_2'' &= k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 \\
 x_1(0) &= d_1 \\
 x_1'(0) &= v_1 \\
 x_2(0) &= d_2 \\
 x_2'(0) &= v_2
 \end{aligned}
 \tag{10.19}$$

10.34. Aurreko ariketaren prozedurarekin ebatz dezakegu (10.19) ekuazio sistema?



10.18 Irudia: Malgukiak

10.4. Adibidea (10.19) irudian adierazita dugu zirkuitu elektrikoak $E(t)$ tentsio aldakorra sortzen duen elikatze-iturria, R erresistentzia, L induktantzia eta C kondentsadoreaz osatuta dago.



10.19 Irudia: Zirkuitua

$i_1(t)$, $i_2(t)$ eta $i_3(t)$ intentsitateen balioak t unean lortzea nahi dugu. Intentsitate horietatik bi ezagutuz hirugarrena lortuko dugu $i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$ betetzen delako. $i_1(t)$ eta $i_2(t)$ intentsitateen aldaketa denborarekiko, honako ekuazioen bidez adierazten dira.

$$\begin{aligned} L \frac{di_1}{dt} + Ri_2 &= E(t) \\ RC \frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 &= 0 \\ i_1(0) &= v_1 \\ i_2(0) &= v_2 \end{aligned}$$

10.35. Eredu matematiko horretan 1. ordenako bi ekuazio diferentziazalez osatuta dago. Kasu honetan, berriro prozedura berdina erabil dezakegu?

8. gaian (Lerro integrala) ekuazio diferentzialetako sistemak azaldu ziran. Koefiziente konstatatuenak eta linealak ziren horietako batzuk, adibidez

$$\begin{aligned}x' &= x - 2y \\y' &= -y \\x(0) &= 2 \\y(0) &= 1\end{aligned}\tag{10.20}$$

(10.20) hastapen baldintza duen problemaren soluzioa $x(t) = e^t + e^{-t}$, $y(t) = e^{-t}$ dela egiaztatu genuen, baina ez genuen erebili, ebazpena lortzeko, metodo analitikorik. Orain Lapaceren transformatuaten bidez lor dezakegu soluzioa.

10.36. (10.20) hastapen baldintza duen problema ebatzi eta $x(t) = e^t + e^{-t}$, $y(t) = e^{-t}$ soluzioa lortzen dela egiaztatu.

10.7 Linealak ez diren EDA-n sistemak

8. gaian linealak ez ziren sisteman azaldu ziren eta zenbakizko metodoak erabiliz ebatzi genuen. (Winplot erabiliz) $F(x, y) = x^2y$ funtzio potentziala harturik, $V = (F_x, F_y) = (2xy, x^2)$ eremu egonkorra lor dezakegu eta $x(t)$, $y(t)$ soluzioa diren lerroen adierazpen grafikoak lortu.

$$\begin{aligned}x' &= 2xy \\y' &= x^2\end{aligned}\tag{10.21}$$

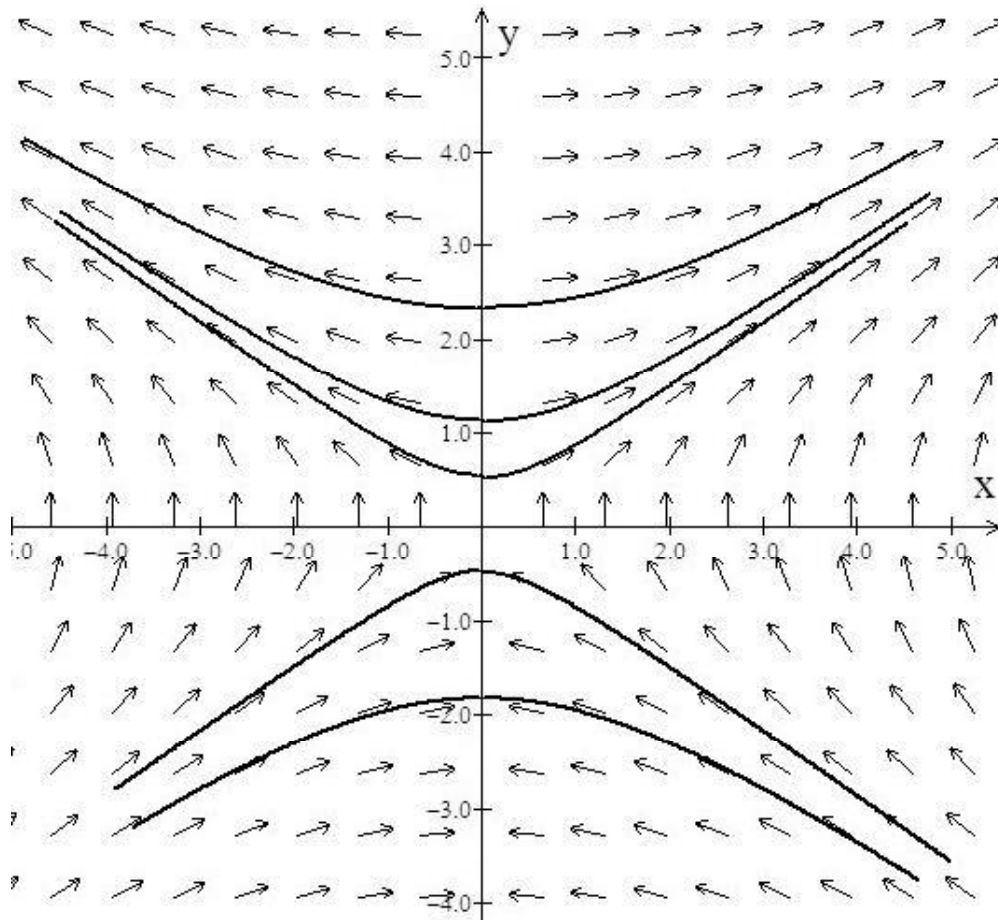
(10.21) sistema ez da lineala eta Laplaceren transformatua erabiltzerakoan

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x') = 2\mathcal{L}(xy) &\implies s\mathcal{X}(s) - x(0) = 2\mathcal{L}(xy) \\ \mathcal{L}(y') = 2\mathcal{L}(x^2) &\implies s\mathcal{Y}(s) - y(0) = \mathcal{L}(x^2)\end{aligned}$$

lortzen dugu, baina ezin ditugu $x(t)y(t)$ eta $x^2(t)$ funtzioen transformatuak lortu $\mathcal{X}(s)$, $\mathcal{Y}(s)$ transformatuen bidez.

Sarritan sistemaren soluzioa lortzeko aukera bakarra zenbakizko metodoren bat erabiltzea izango da. (10.20) irudian V eremua adierazita dugu eta eremu-lerro batzuk, (10.21)-n soluzioak direnak.

Ekuazio ez linealen sistemak interesatzen zaizkigu, problema fisiko errealak linealak ez direlako. Erabiltzen ditugun sistema linealak urbilketak dira, eta urbilketa horiekin fenomeno fisikoak aztertu eta analitikoki ebatzi egiten ditugu. Askotan urbilketa horiek nahiko



10.20 Irudia: Eremu bektoriala eta ebazpen lerro batzuk

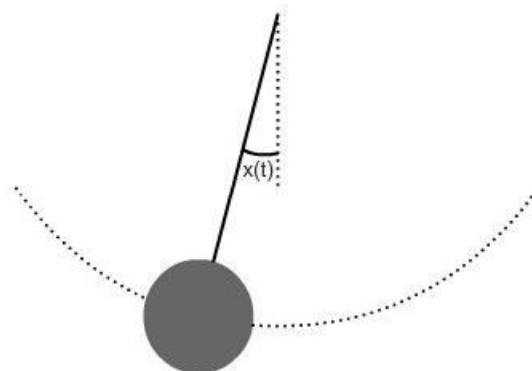
onak dira eta azterketa zehatza egiteko aukera ematen diguta. Hala eta guztiz, Eisteinek esan zuen Fisikaren oinarrizko ekuazioak linealak ez direnez, fisika matematikoa osoa berriro eraiki behar liratekela.

Adibidez, azter dezagun indarra aplikatu gabe oszilatzen duen pendulua

$x(t)$ oszilazioaren uneko angelua baldin bada (ikus (10.21) irudia) sistema fisikoaren eredua hau izan daiteke:

$$x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{g}{L}\sin x = 0 \quad (10.22)$$

non g grabitatearen azelerazioa, c ingurune fisikoaren araberako konstantea, m penduluaren masa eta L hariaren luzera diren.



10.21 Irudia: Pendulua

(10.22) ekuazioak da lineala $\sin x$ batugaia duelako, beraz ikusi ditugun ebazpen metodoak ez dira erabilgarriak. Ohiko linealizazioan $\sin x$ batugaiaren ordean x ipinten da, x txikia denean, hau da, oszilazioak txikiak direnean, urbilketa egokia da. ($\sin x \simeq x$)

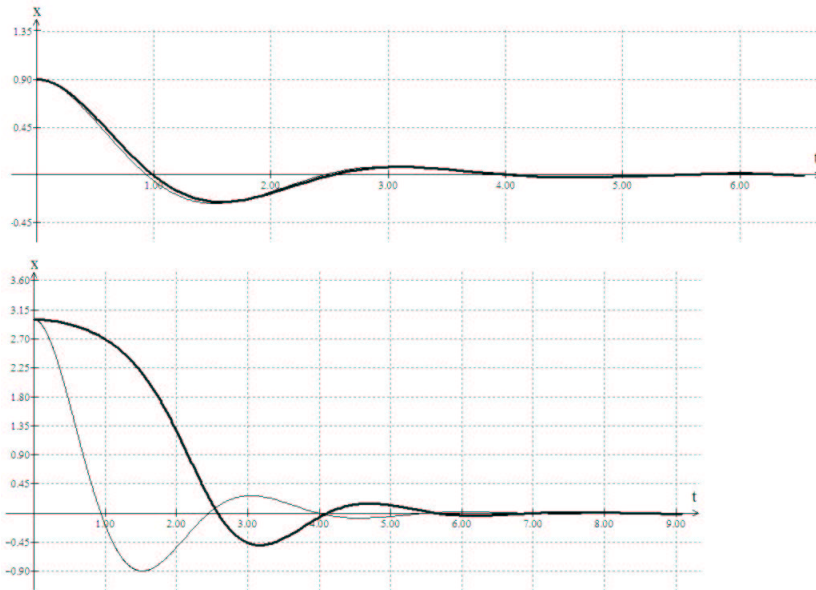
$$x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{g}{L}x = 0 \quad (10.23)$$

Baina x handia denean (10.23) eredu linealak distortsio handiak sortzen ditu, hau da, penduluaren higidura errealearen iragarpen eskaxak egiten ditu. (10.22) irudian ekuazio bien soluzioen adierazpenak ditugu. (marra lodiaz (10.22) ekuazioaren soluzioak eta marra meheaz (10.23) ekuazioarenak. Soluzioak bilatzerakoan $c = 4.6$, $L = 2$ y $m = 2.9$ parametroak eta goikoak $x(0) = 0.9$, $x'(0) = 0$ hastapen baldintzak erabili dira, aldiz behekoak lortzeko $x(0) = 3$, $x'(0) = 0$ hastapen baldintzak erabili dira eta $x(t)$ -ren oszilazio handiagoak lortzen dira. Lehenengo kasuan, goikoan, grafikak antzerakoak dira baina bigarren kasuan, behekoan, oso ez berdinak dira.

(10.23) lineala, homogenea eta koefiziente konstanteak dituena da eta 9.gaila ikusitako metodoa edo Laplaceren transformata erabiliz ebatzi dezakegu.

Ekuazio diferentzialen sistemekin ere gauza berdina gertatzen da. 8. gailan eraiki genuen eremu grabitazionala gogoratuz, (x, y) puntuan

$$F(x, y) = \frac{M}{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$



10.22 Irudia: Penduluaren bi eredu

non M eremua sortzen duen masa da eta (a, b) masa kokatuta dagoen puntuaren koordena-tuak. Eraiki genuen eremu bektoriala $V = \text{grad } F = (F_x, F_y)$, eta eremu-lerroak sistemaren soluzioan dira.

$$\begin{aligned} x' &= F_x(x, y) \\ y' &= F_y(x, y) \end{aligned} \quad (10.24)$$

Nabaria da (10.24) lineala ez dela.

10.37. (10.24) erraz ebatzi dezakegu $dy/dx = F_y(x, y)/F_x(x, y)$ eran adierazten dugunean. Nola? Lor dezakezu V eremuarekin elkartut den U eremuaren lerroak?

10.38. Bigarren ordenako (10.25) ekuazio diferentzial arruntarekin baliokidea den bi ekuazio diferentzial dituen sistema lor daitekela frogatu.

$$y'' = F(t, y(t), y'(t)) \quad (10.25)$$

Horretarako lagungarri diren $u = y$, $v = y'$ funtzioak definitu.

Idea hori erabiliz, (10.22) EDA ez linealarekin baliokidea den sistema lortzeko eta Winplot programaren bidez ebatzi eta (10.22) irudiko antzerako adierazpena lortu.

