

1. Kapitula

Zenbaki konplexuak

1.1 Bektoreak

1.1. Ariketa Frogatu hurrengo baieztapenak betetzen direla:

1.

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

2.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ (desberdintza triangeluarra)}$$

Noiz betetzen da berdintza?

1.2. Ariketa Heron-en formula erabiliz ($A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$), kalkulatu hurrengo moduan definitzen den hirukiaren azalera:

hirukiaren erpinak $z^3 - (5 + 2i)z^2 + (3 + 9i)z + (4 - 4i) = 0$ ekuazioaren erro konplexuen afixuak dira. (Laguntza: i erroetako bat da)

1.3. Ariketa Hurrengo eragiketen esanahi geometrikoa eman:

1. Bektore baten konjokatua
2. Bektore baten aurkakoa
3. Bektore baten konjokatuaren aurkakoa
4. Bektore baten aurkakoaren konjokatua
5. Konplexu bat eta bere konjokatuaren arteko biderketa

1.2 Eragiketak

1.4. Ariketa Frogatu \mathbb{C} multzoan hurrengo propietateak betetzen direla:

1. $e^0 = 1$
2. $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$
3. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
4. $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}, \forall z \in \mathbb{C}$

5. $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$

6. $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$

1.5. Ariketa Zein baldintza bete behar dute bi zenbaki konplexuen argumentuek bi zenbaki horien biderketa zenbaki erreala izan dadin?

1.6. Ariketa Zein baldintza bete behar dute bi zenbaki konplexuen argumentuek bi zenbaki horien zatiketa zenbaki irudikari hutsa izan dadin?

1.7. Ariketa Izan bitez $a \in \mathbb{R}$ eta $z = \frac{3-2ai}{4-3i}$. Kalkulatu a hurrengo kasuetan:

1. z zenbaki irudikari hutsa izan dadin.
2. z zenbaki erreala izan dadin.
3. z lehenengo koadranteko erdikarian egon dadin.

1.8. Ariketa Kalkulatu a hurrengo kasuetan:

1. $\frac{a+i}{a-i}$ erreala izan dadin.
2. $\frac{a+i}{a-i}$ irudikari hutsa izan dadin.

1.9. Ariketa Hurrengo berdintzak betetzen direla jakinik, kalkulatu A eta B :

$$A = 1 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

$$B = \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

(Laguntza: $A + Bi = \sum_{k=0}^{n-1} r_k$ non $r_k = \sqrt[n]{1}$)

1.10. Ariketa Frogatu $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ eta $\forall z \in \mathbb{C}$ baldintzetarako z -ren n . erroen batura 0 dela. Zer esan daiteke erroen biderkaduraz?

1.11. Ariketa Esan hurrengo baieztapenak zuzenak ala okerrak diren, erantzuna arrazoi-tuz:

1. $|e^z| = e^{|z|}, \forall z \in \mathbb{C}$
2. $e^{\bar{z}} = \bar{e^z}, \forall z \in \mathbb{C}$
3. $|z_1 - z_2|$, z_1 eta z_2 konplexuen afixuen arteko distantzia da

4. $i^i \in \mathbb{R}$

5. $z = \ln e^z, \forall z \in \mathbb{C}$

6. $\ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

1.12. Ariketa Aztertu hurrengo arrazoiketa (J. Bernoulli-ren paradoxa izenekoa):

$$(-z)^2 = z^2 \Rightarrow 2 \ln(-z) = 2 \ln z \Rightarrow \ln(-z) = \ln z \Rightarrow -z = z$$

1.3 Aplikazioak: biraketak, translazioak eta homoteziak

1.13. Ariketa Hurrengo eragiketen esanahi geometrikoa eman:

1. Biderkatu konplexu bat zenbaki erreal positibo batez. Aztertu zenbakia 1 baino handiagoa edo txikiagoa den kasuak.
2. Biderkatu konplexu bat zenbaki erreal negatibo batez.
3. Biderkatu konplexu bat 1_θ zenbakiaz.
4. Biderkatu konplexu bat ρ_θ zenbakiaz.

1.14. Ariketa Demagun (2, 3) eta (2, 5) puntuak oktagon erregular baten aurkako erpinak direla. Kalkulatu beste erpinak.

1.15. Ariketa Demagun hiruki aldeak batek zentroa (1, 1) puntuan duela eta (1, 3) puntuan erpin bat. Kalkulatu beste bi erpinak.

1.4 Beste aplikazioak

1.16. Ariketa Demagun erresistentzia bat, bobina bat eta kondentsadore batek osatutako korrante alternoko zirkuitua dugula, w frekuentziaduna. Zirkuituaren inpedantzia hurrengo zenbaki konplexu moduan definitzen da:

$$Z = R + \left(Lw - \frac{1}{Cw} \right) i$$

non R ohmiotan neurtutako erresistentzia den, L henriotan neurtutako bobinaren indukzioa den, eta C farad-etan neurtutako kondentsadorearen kapazitatea den. $E = E_0 \sin wt$ indar elektroeragilea bada eta $I = \frac{E}{Z}$ zirkuituaren intentsitatea:

1. Kalkulatu I eta E bektoreek osatzen duten angelua (desfaseko angelua).
2. R -ren balio zehatz baterako kalkulatu L eta C -ren arteko erlazioa I maximoa izan dadin (erresonantzi zirkuitua).

1.5 Funtzio trigonometrikoak eta hiperbolikoak

1.17. Ariketa Esan hurrengo baieztapenak zuzenak ala okerrak diren, erantzuna arrazoi-tuz:

1. $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$
2. $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$
3. $\cot(iz) = i \coth z$
4. $\sin(iz) = i \sinh z$
5. $\cos z = \sqrt{\frac{1 - \cos 2z}{2}}$

1.18. Ariketa Ebatzi ondoko ekuazioak:

1. $\sin z = 3$
2. $\sin(iz) + 2i \cosh(z) = -1$
3. $\cot z = 1 + i$
4. $\sin z + \cos z = 1$

1.6 Leku geometrikoak

1.19. Ariketa Hurrengo z zenbaki konplexuen afixuen leku geometrikoak identifikatu eta grafikoki adierazi, kasu bakoitzean:

1. $\bar{z} = \frac{1}{z}$
2. $|z - 1 + i| < 2$
3. $\arg(z) = \frac{\pi}{6}$
4. $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z}$

