

# Tema 7: SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS EN TENSIONES.

## 7.0 OBJETIVOS

- 7.1 SISTEMAS TRIFASICOS, EQUILIBRADOS Y DESEQUILIBRADOS. SECUENCIA DIRECTA E INVERSA.
- 7.2 SISTEMAS TRIFASICOS A CUATRO HILOS. RELACIÓN EXISTENTE ENTRE LAS TENSIONES SIMPLES Y COMPUESTAS.
- 7.3 SISTEMAS TRIFASICOS A CUATRO HILOS. CONEXIÓN DE CARGAS EN ESTRELLA.
  - 7.3.1 CARGAS EN ESTRELLA Y EQUILIBRADAS.
- 7.4 SISTEMAS TRIFASICOS CON CONEXIÓN DE CARGAS EN TRIÁNGULO.
  - 7.4.1 CARGAS EN TRIÁNGULO Y EQUILIBRADAS.
- 7.5 POTENCIA EN LOS SISTEMAS TRIFASICOS EQUILIBRADOS CON CARGAS EQUILIBRADAS.
- 7.6 CALCULO DE LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS.
  - 7.6.1 CARGA EN ESTRELLA.
  - 7.6.2 CARGA EN TRIANGULO.
  - 7.6.3 CARGA EN ESTRELLA Y EN LA LÍNEA
  - 7.6.4 CARGA EN TRIÁNGULO Y EN LA LÍNEA
  - 7.6.5 CARGA EN ESTRELLA Y EN TRIÁNGULO
- 7.7 DETERMINACIÓN DEL ORDEN DE SUCESIÓN DE FASES.
- 7.8 MEDIDA DE POTENCIAS A 4 HILOS.
- 7.9 MEDIDA DE POTENCIAS A 3 HILOS.
  - 7.9.1 MÉTODO DE ARON
- 7.10 MEDIDA DE POTENCIA REACTIVA CARGAS DESEQUILIBRADAS.
- 7.11 BIBLIOGRAFIA

## 7.0 OBJETIVOS

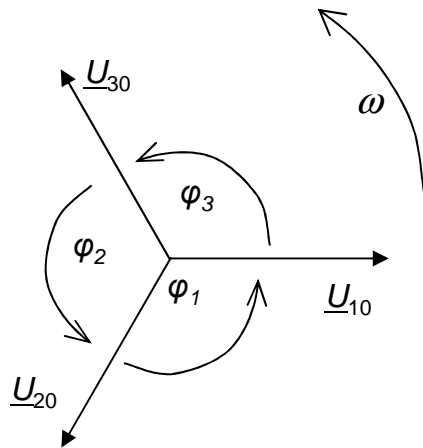
- Saber las posibles conexiones de fuentes y cargas en sistemas trifásicos.
- Comprender la importancia de la secuencia en un sistema trifásico.
- Conocer métodos particulares de análisis en la resolución de circuitos trifásicos.
- Estudiar la resolución de circuitos trifásicos equilibrados mediante su equivalente monofásico.
- Estimar la importancia del Teorema de Kenelly en la resolución de estrellas a tres hilos por métodos de sustitución.
- Valorar la importancia de la medida de potencia activa y reactiva en circuitos trifásicos.
- Analizar el método de Aron y todas las consecuencias que de él se derivan.

## 7.1 SISTEMAS TRIFASICOS, EQUILIBRADOS Y DESEQUILIBRADOS. SECUENCIA DIRECTA E INVERSA (1)

### DEFINICIÓN:

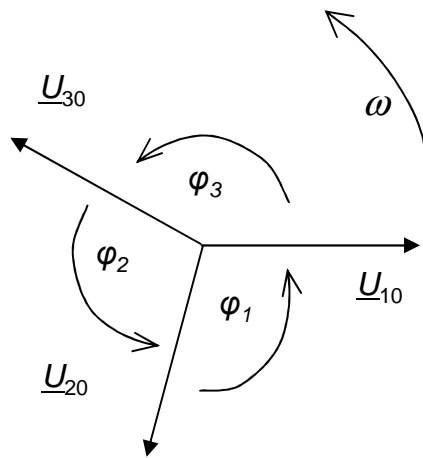
Se denomina sistema trifásico al que se compone de tres tensiones.

Si las tres tensiones tienen el mismo modulo y están desfasadas entre si  $120^\circ$ , se dice que el sistema es trifásico equilibrado en tensiones, cuando no se cumple un de las dos condiciones entonces decimos que el sistema es desequilibrado en tensiones



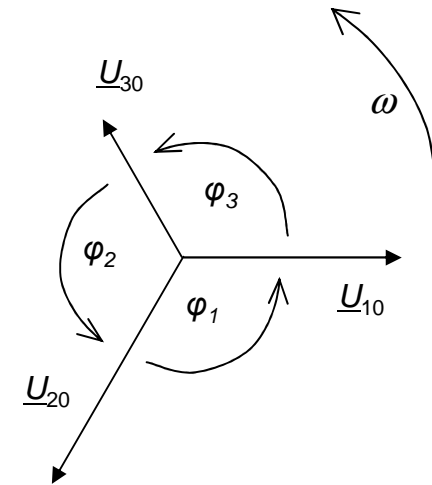
**Sistema trifásico equilibrado**

$$|U_{10}| = |U_{20}| = |U_{30}| \text{ y } \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$$



**Sistema trifásico desequilibrado**

$$|U_{10}| = |U_{20}| = |U_{30}| \text{ pero } \varphi_1 \neq \varphi_2 \neq \varphi_3$$



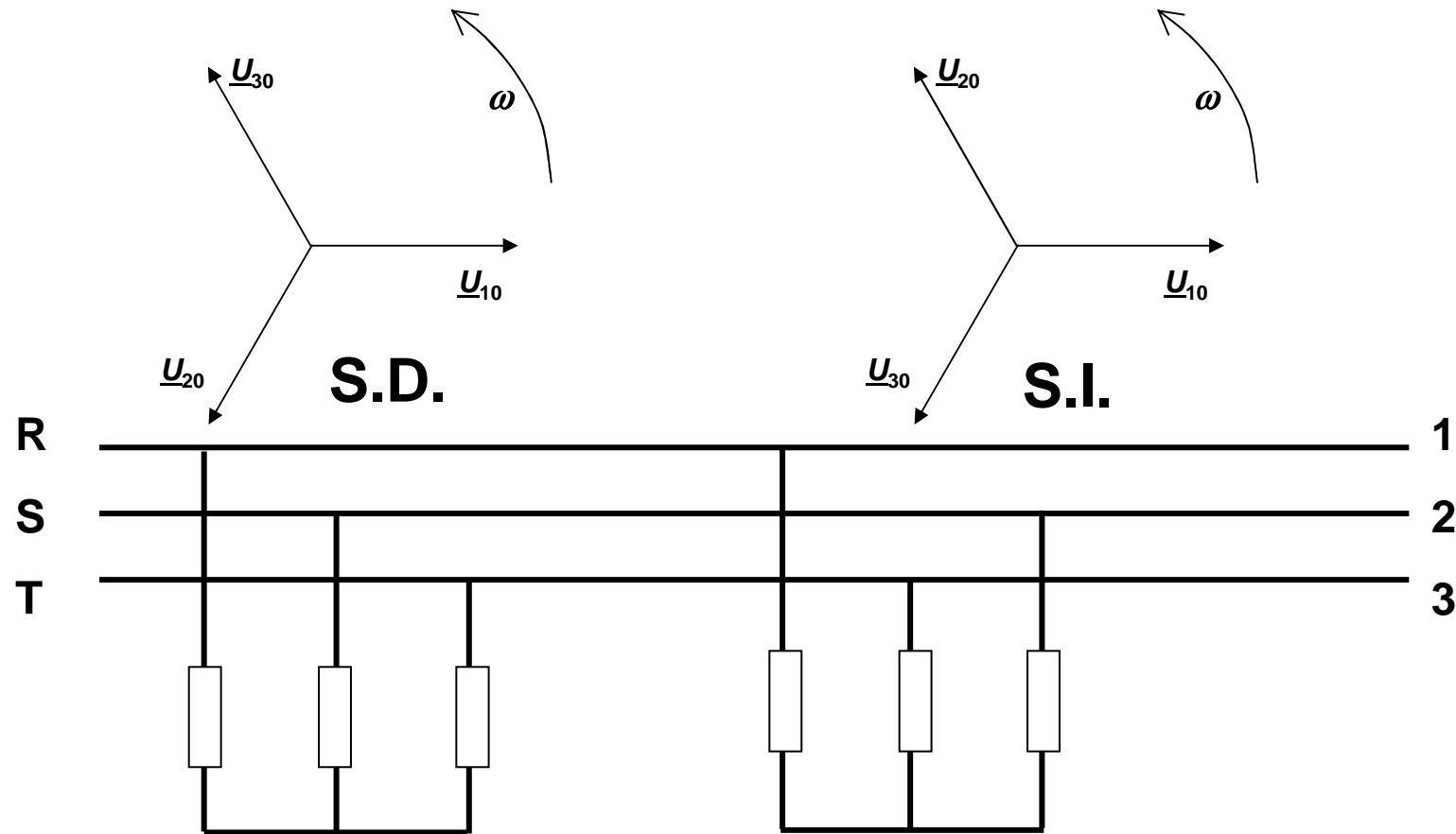
**Sistema trifásico desequilibrado**

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 \text{ pero } |U_{10}| \neq |U_{20}| \neq |U_{30}|$$

Nosotros en este tema solo estudiaremos los circuitos trifásicos equilibrados en tensiones

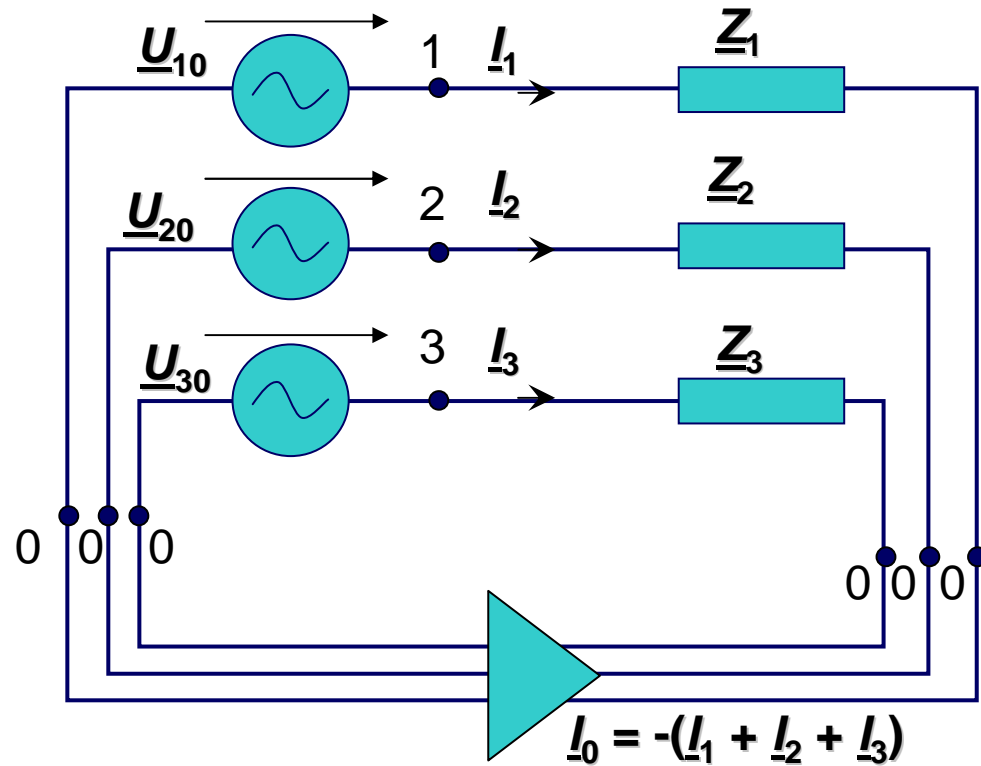
## 7.1 SISTEMAS TRIFASICOS, EQUILIBRADOS Y DESEQUILIBRADOS. SECUENCIA DIRECTA E INVERSA (2)

Si al recorrer el diagrama vectorial de las tensiones encontramos que pasan según el orden 1-2-3, entonces decimos que la secuencia es directa, si por el contrario pasan según el orden 1-3-2, entonces a la secuencia le llamamos inversa.



Para pasar de un sistema directo a un sistema inverso o viceversa bastaría con permutar el orden de llegada de dos fases

## 7.2 SISTEMAS TRIFASICOS A CUATRO HILOS. RELACIÓN EXISTENTE ENTRE LAS TENSIONES SIMPLES Y COMPUESTAS (1)



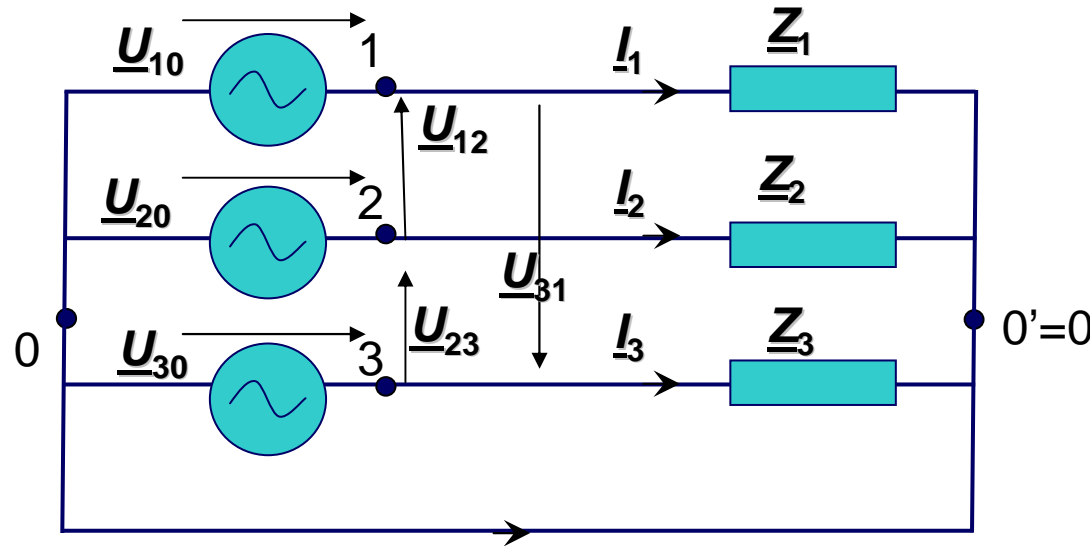
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_{10}}{Z_1 \angle \phi_1}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_{20}}{Z_2 \angle \phi_2}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{30}}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_{30}}{Z_3 \angle \phi_3}$$

Este sistema de seis hilos puede reducirse a uno de cuatro hilos si tenemos en cuenta que la diferencia de potencial entre los seis puntos 0 es de 0 V.

## 7.2 SISTEMAS TRIFASICOS A CUATRO HILOS. RELACIÓN EXISTENTE ENTRE LAS TENSIONES SIMPLES Y COMPUESTAS (2)



$$\underline{I}_0 = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_{10}}{Z_1 \angle \phi_1}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_{20}}{Z_2 \angle \phi_2}$$

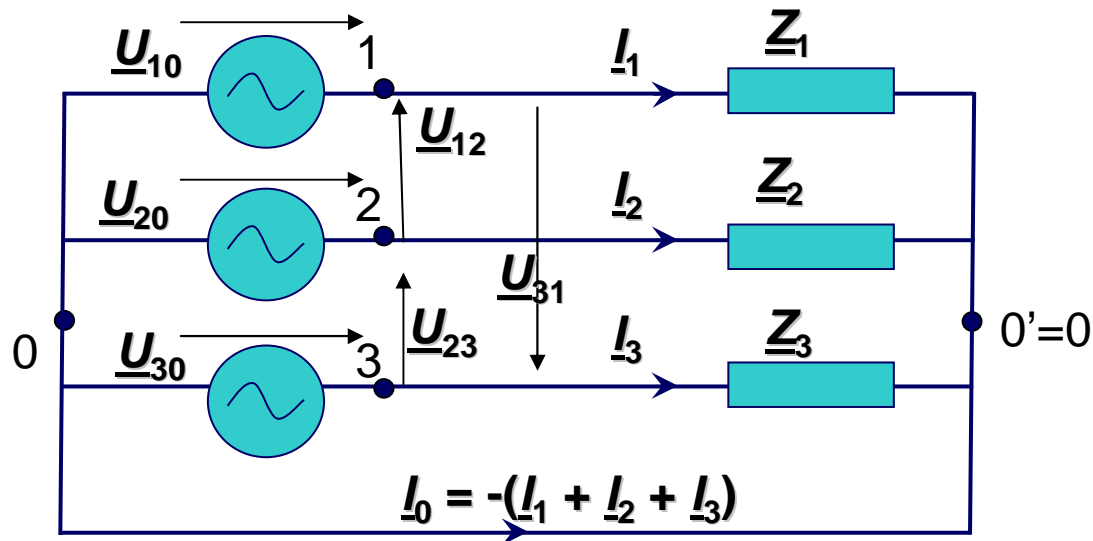
$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{30}}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_{30}}{Z_3 \angle \phi_3}$$

En este sistema de cuatro hilos se siguen cumpliendo las mismas condiciones que en el de seis, además podemos decir que:

- 0 es el neutro del generador
- 0' es el neutro de la carga
- $\underline{U}_{10}$ ,  $\underline{U}_{20}$ ,  $\underline{U}_{30}$  son las tensiones simples
- $\underline{U}_{12}$ ,  $\underline{U}_{23}$ ,  $\underline{U}_{31}$  son las tensiones compuestas

## 7.2 SISTEMAS TRIFASICOS A CUATRO HILOS. RELACIÓN EXISTENTE ENTRE LAS TENSIONES SIMPLES Y COMPUESTAS (3)

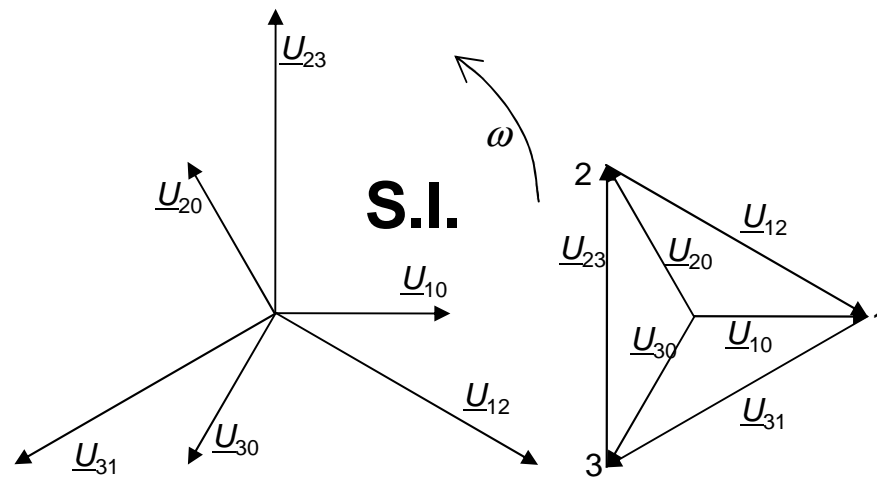
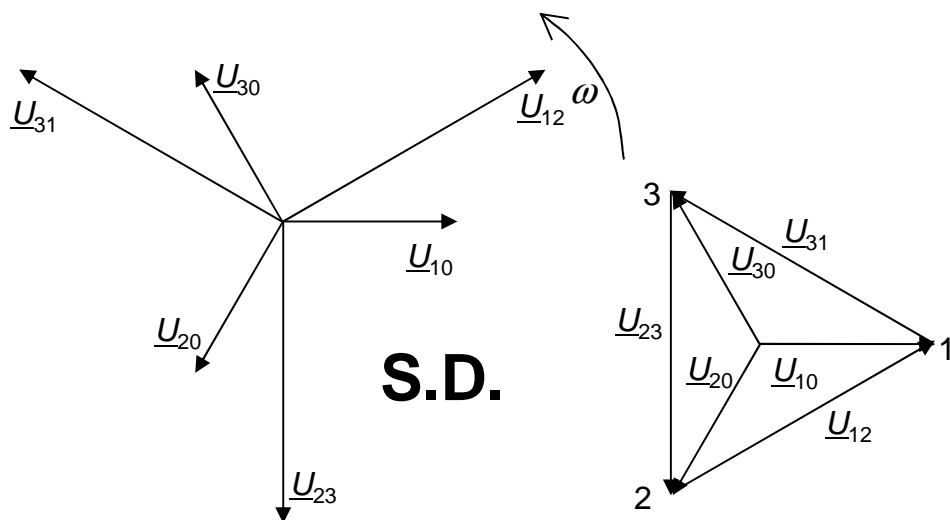
De la aplicación de la 2ª ley de Kirchhoff a las tensiones simples y compuestas



$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{20}$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{30}$$

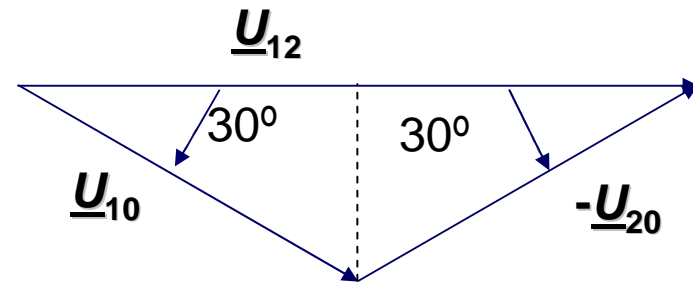
$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{10}$$



## 7.2 SISTEMAS TRIFASICOS A CUATRO HILOS. RELACIÓN EXISTENTE ENTRE LAS TENSIONES SIMPLES Y COMPUESTAS (4)

De la observación de las ecuaciones y teniendo en cuenta que las tensiones simples formaban un sistema trifásico equilibrado en tensiones, se puede afirmar que las compuestas también lo forman, y teniendo en cuenta que la representación gráfica de la suma vectorial coincide en todos los casos formando triángulos de las mismas dimensiones, si llamamos al modulo de las tensiones simples  $U_s$ , se puede decir que:

Sec. Directa	Sec. Inversa	
$\underline{U}_{10} = U_s \angle 0^\circ$	$\underline{U}_{10} = U_s \angle 0^\circ$	$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{20}$
$\underline{U}_{20} = U_s \angle -120^\circ$	$\underline{U}_{20} = U_s \angle 120^\circ$	$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{30}$
$\underline{U}_{30} = U_s \angle 120^\circ$	$\underline{U}_{30} = U_s \angle -120^\circ$	$\underline{U}_{31} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{10}$



$$|\underline{U}_{12}| = |\underline{U}_{10}| \cdot \cos 30^\circ + |\underline{U}_{20}| \cdot \cos 30^\circ = U_s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + U_s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot U_s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot U_s$$

**SD**

$$\underline{U}_{12} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{10} \angle 30^\circ$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{12} \angle -120^\circ$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_{12} \angle 120^\circ$$

**SI**

$$\underline{U}_{12} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{10} \angle -30^\circ$$

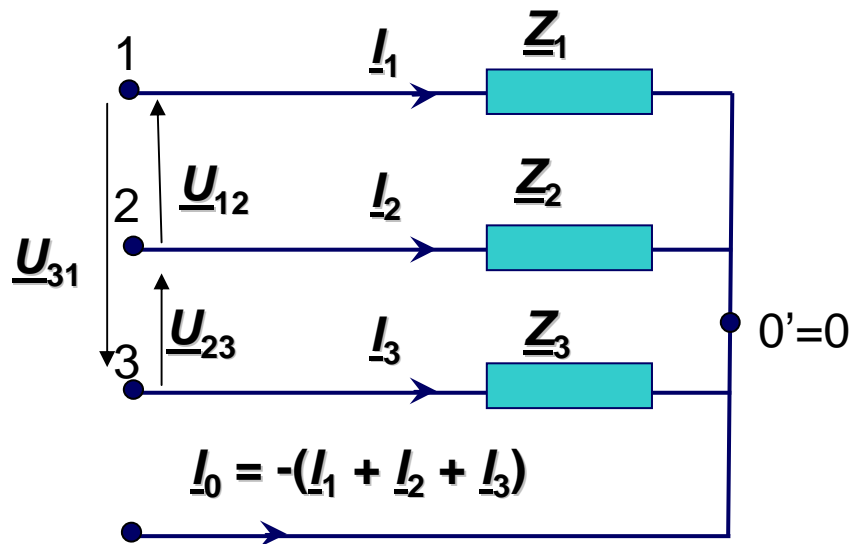
$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{12} \angle 120^\circ$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_{12} \angle -120^\circ$$



### 7.3 SISTEMAS TRIFASICOS A CUATRO HILOS. CONEXIÓN DE CARGAS EN ESTRELLA (1)

Cuando a cada una de las fases se conecta una carga y estas se unen entre si y al hilo neutro, se dice que las cargas están cerradas formando una estrella para S.D.



$$\underline{I}_1 = \frac{U_{10}}{\underline{Z}_1} = \frac{U_{10}}{Z_1 \angle \varphi_1} \quad \underline{I}_2 = \frac{U_{20}}{\underline{Z}_2} = \frac{U_{20}}{Z_2 \angle \varphi_2}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{U_{30}}{\underline{Z}_3} = \frac{U_{30}}{Z_3 \angle \varphi_3}$$

Además, cuando las tres cargas son idénticas entre si se dice que la estrella es equilibrada y en este caso se cumple que:

$$Z_1 \angle \varphi_1 = Z_2 \angle \varphi_2 = Z_3 \angle \varphi_3 = Z_\lambda \angle \varphi_\lambda$$

$$\underline{I}_1 = \frac{U_{10}}{\underline{Z}_1} = \frac{U_{10}}{Z_\lambda \angle \varphi_\lambda} = \frac{Us}{Z_\lambda} \angle -\varphi_\lambda \quad \underline{I}_2 = \frac{U_{20}}{\underline{Z}_2} = \frac{U_{20}}{Z_\lambda \angle \varphi_\lambda} = \frac{Us}{Z_\lambda} \angle -120 - \varphi_\lambda \quad \underline{I}_3 = \frac{U_{30}}{\underline{Z}_3} = \frac{U_{30}}{Z_\lambda \angle \varphi_\lambda} = \frac{Us}{Z_\lambda} \angle 120 - \varphi_\lambda$$

$$|\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = |\underline{I}_3| = I_\lambda \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = -\underline{I}_0 = 0$$

### 7.3 SISTEMAS TRIFASICOS A CUATRO HILOS. CONEXIÓN DE CARGAS EN ESTRELLA (2)

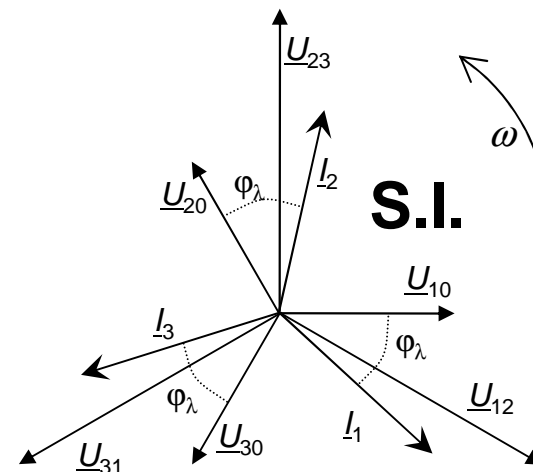
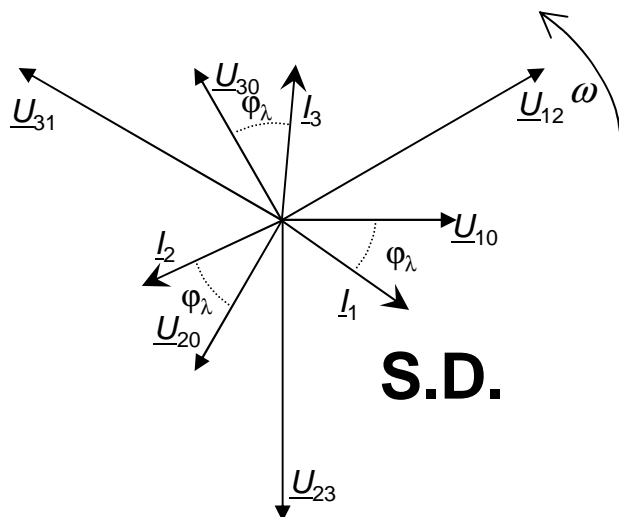
Con las consideraciones expuestas anteriormente se puede decir que el diagrama vectorial del sistema se corresponde con:

$$\underline{Z}_1 \angle \varphi_1 = \underline{Z}_2 \angle \varphi_2 = \underline{Z}_3 \angle \varphi_3 = \underline{Z}_\lambda \angle \varphi_\lambda$$

$$\text{S.D.} \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_\lambda \angle \varphi_\lambda} = \frac{U_S}{Z_\lambda} \angle -\varphi_\lambda \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{Z}_\lambda \angle \varphi_\lambda} = \frac{U_S}{Z_\lambda} \angle -120^\circ - \varphi_\lambda \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{30}}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_{30}}{\underline{Z}_\lambda \angle \varphi_\lambda} = \frac{U_S}{Z_\lambda} \angle 120^\circ - \varphi_\lambda$$

$$\text{S.I.} \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_\lambda \angle \varphi_\lambda} = \frac{U_S}{Z_\lambda} \angle -\varphi_\lambda \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{Z}_\lambda \angle \varphi_\lambda} = \frac{U_S}{Z_\lambda} \angle 120^\circ - \varphi_\lambda \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{30}}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_{30}}{\underline{Z}_\lambda \angle \varphi_\lambda} = \frac{U_S}{Z_\lambda} \angle -120^\circ - \varphi_\lambda$$

$$|\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = |\underline{I}_3| = I_\lambda \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = -\underline{I}_0 = 0$$



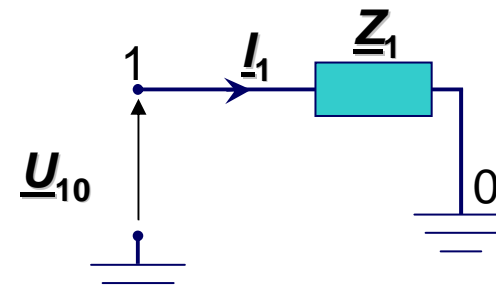
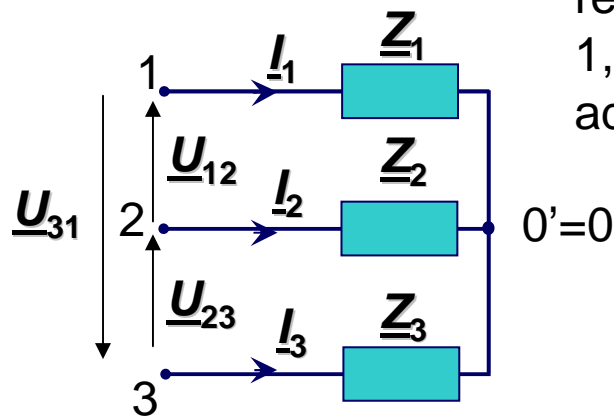
7.3 SISTEMAS TRIFASICOS A CUATRO HILOS. CONEXIÓN DE CARGAS EN ESTRELLA (3)  
 7.3.1 CARGAS EN ESTRELLA Y EQUILIBRADAS.

Como se cumple que para el caso de cargas equilibradas:

$$|\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = |\underline{I}_3| = I_\lambda \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = -\underline{I}_0 = 0$$

Se puede pasar de un sistema a cuatro hilos a uno de tres hilos ya que por el neutro no circula corriente y puede eliminarse.

Este tipo de circuitos pueden estudiarse mediante la reducción al equivalente monofásico, generalmente de la fase 1, desfasando  $120^\circ$  las corrientes obtenidas, en retraso o adelanto para las otras fases



S.D. 
$$\underline{I}_1 = \frac{U_{10}}{Z_1} = \frac{U_{10}}{Z_\lambda \angle \varphi_\lambda} = \frac{U_s}{Z_\lambda} \angle -\varphi_\lambda$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cdot 1 \angle -120 \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_1 \cdot 1 \angle 120$$

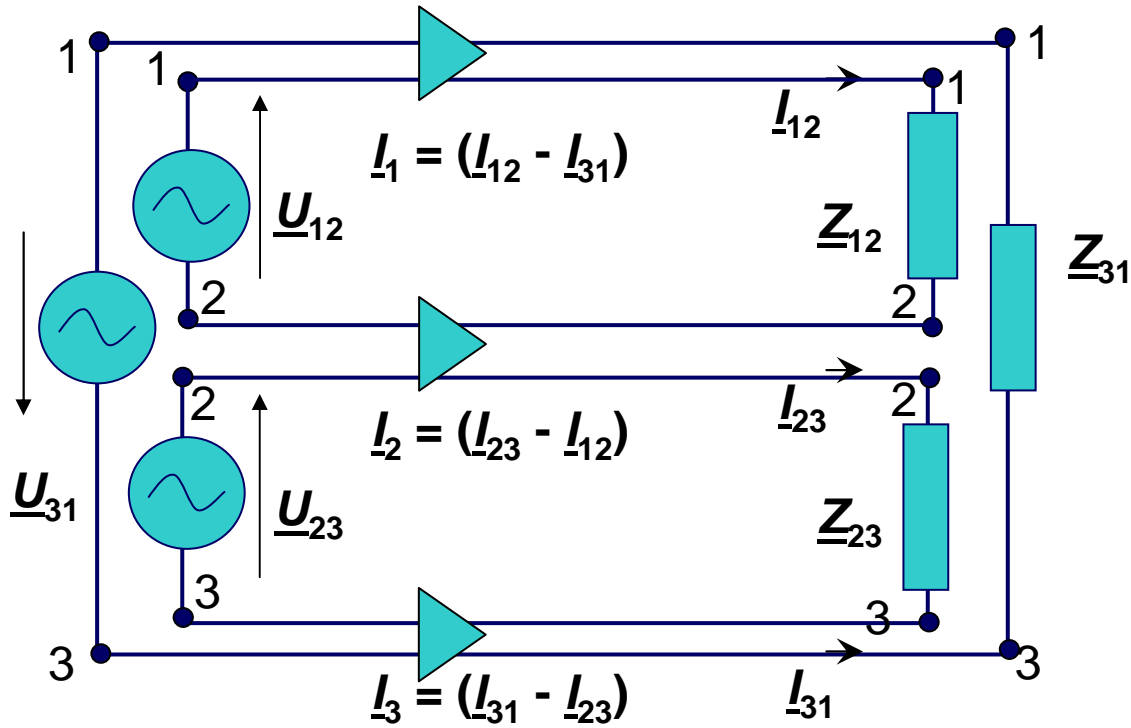
S.I. 
$$\underline{I}_1 = \frac{U_{10}}{Z_1} = \frac{U_{10}}{Z_\lambda \angle \varphi_\lambda} = \frac{U_s}{Z_\lambda} \angle -\varphi_\lambda$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cdot 1 \angle 120 \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_1 \cdot 1 \angle -120$$

Se dice que el equivalente monofásico de una estrella esta formado por la tensión simple, la corriente de línea o compuesta y la impedancia de la estrella

## 7.4 SISTEMAS TRIFASICOS CON CONEXIÓN DE CARGAS EN TRIÁNGULO (1)

Volviendo al sistema a seis hilos, se podría haber conectado de la siguiente forma:



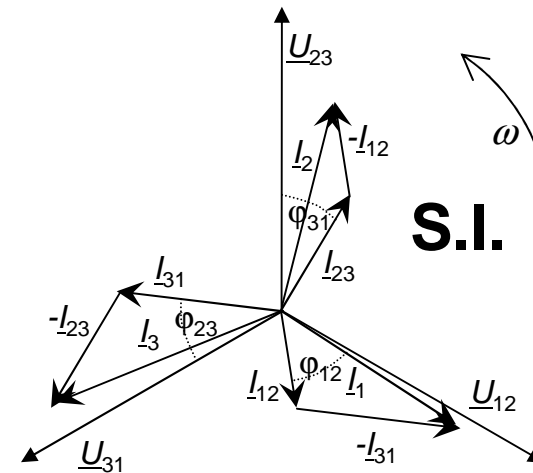
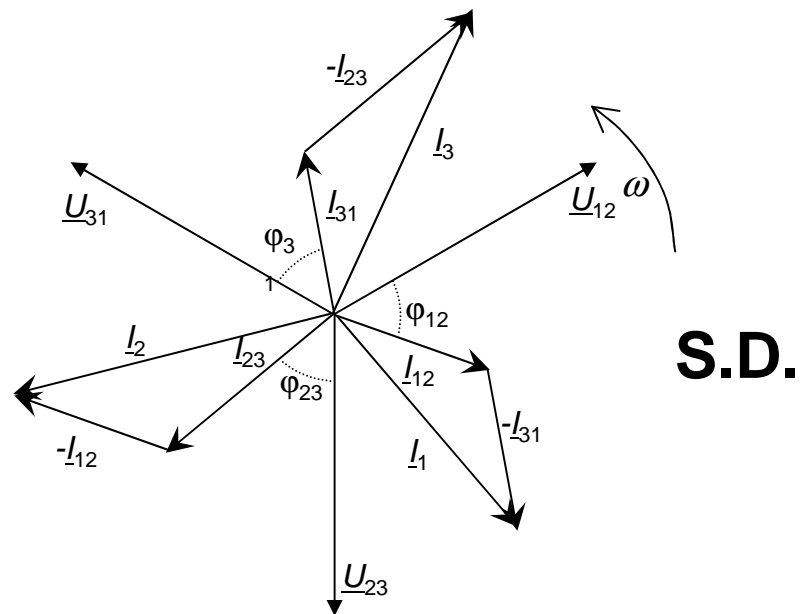
DONDE:

$$I_{12} = \frac{U_{12}}{Z_{12}} \quad I_{23} = \frac{U_{23}}{Z_{23}} \quad I_{31} = \frac{U_{31}}{Z_{31}}$$

$$I_1 = I_{12} - I_{31} \quad I_2 = I_{23} - I_{12} \quad I_3 = I_{31} - I_{23}$$

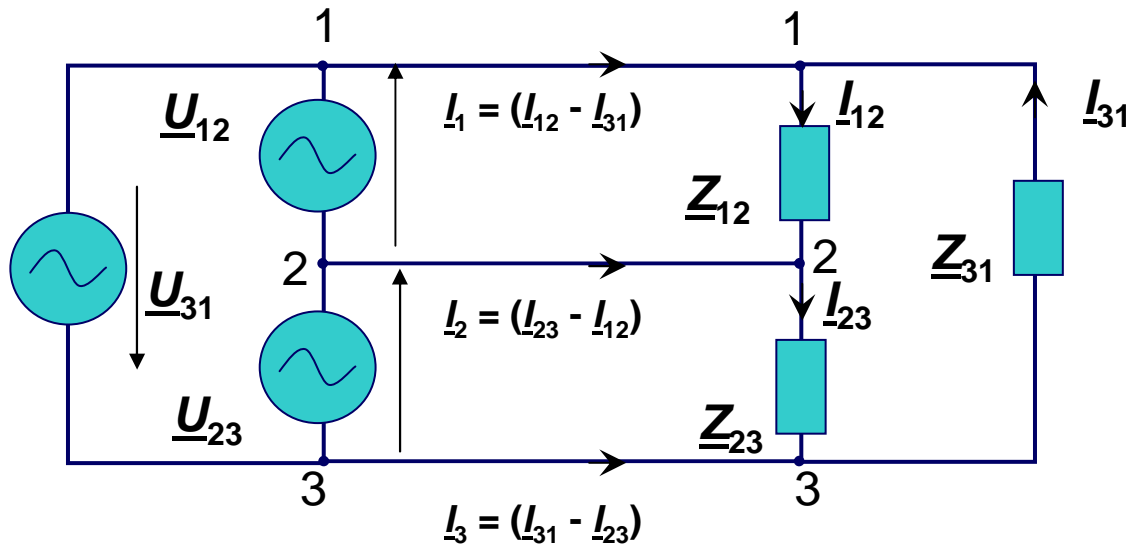
## 7.4 SISTEMAS TRIFASICOS CON CONEXIÓN DE CARGAS EN TRIÁNGULO (2)

El diagrama vectorial seria:



## 7.4 SISTEMAS TRIFASICOS CON CONEXIÓN DE CARGAS EN TRIÁNGULO (3)

En esta conexión, si en lugar de tres generadores monofásicos se pone un generador trifásico:



$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}}$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}$$

Donde:

- $\underline{U}_{12}$ ,  $\underline{U}_{23}$  y  $\underline{U}_{31}$  son las tensiones compuestas del sistema
- $\underline{I}_{12}$ ,  $\underline{I}_{23}$  e  $\underline{I}_{31}$  son las intensidades simples o de carga
- $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$  e  $\underline{I}_3$  son las intensidades compuestas o de línea

## 7.4 SISTEMAS TRIFASICOS CON CONEXIÓN DE CARGAS EN TRIÁNGULO (4)

### 7.4.1 CARGAS EN TRIÁNGULO Y EQUILIBRADAS.

Cuando la carga en triángulo es equilibrada se cumple que:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = \underline{Z}_{\Delta} = Z_{\Delta \angle \varphi_{\Delta}}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{12} &= \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} = \frac{U_c \angle 0^\circ}{Z_{\Delta \angle \varphi_{\Delta}}} = \frac{U_c}{Z_{\Delta}} \angle -\varphi_{\Delta} = I_s \angle -\varphi_{\Delta} \\ \underline{I}_{23} &= \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} = \frac{U_c \angle -120^\circ}{Z_{\Delta \angle \varphi_{\Delta}}} = \frac{U_c}{Z_{\Delta}} \angle -120^\circ - \varphi_{\Delta} = I_s \angle -120^\circ - \varphi_{\Delta} \\ \underline{I}_{31} &= \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} = \frac{U_c \angle 120^\circ}{Z_{\Delta \angle \varphi_{\Delta}}} = \frac{U_c}{Z_{\Delta}} \angle 120^\circ - \varphi_{\Delta} = I_s \angle 120^\circ - \varphi_{\Delta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{12} &= \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} = \frac{U_c \angle 0^\circ}{Z_{\Delta \angle \varphi_{\Delta}}} = \frac{U_c}{Z_{\Delta}} \angle -\varphi_{\Delta} = I_s \angle -\varphi_{\Delta} \\ \underline{I}_{23} &= \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} = \frac{U_c \angle 120^\circ}{Z_{\Delta \angle \varphi_{\Delta}}} = \frac{U_c}{Z_{\Delta}} \angle 120^\circ - \varphi_{\Delta} = I_s \angle 120^\circ - \varphi_{\Delta} \\ \underline{I}_{31} &= \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} = \frac{U_c \angle -120^\circ}{Z_{\Delta \angle \varphi_{\Delta}}} = \frac{U_c}{Z_{\Delta}} \angle -120^\circ - \varphi_{\Delta} = I_s \angle -120^\circ - \varphi_{\Delta} \end{aligned}$$

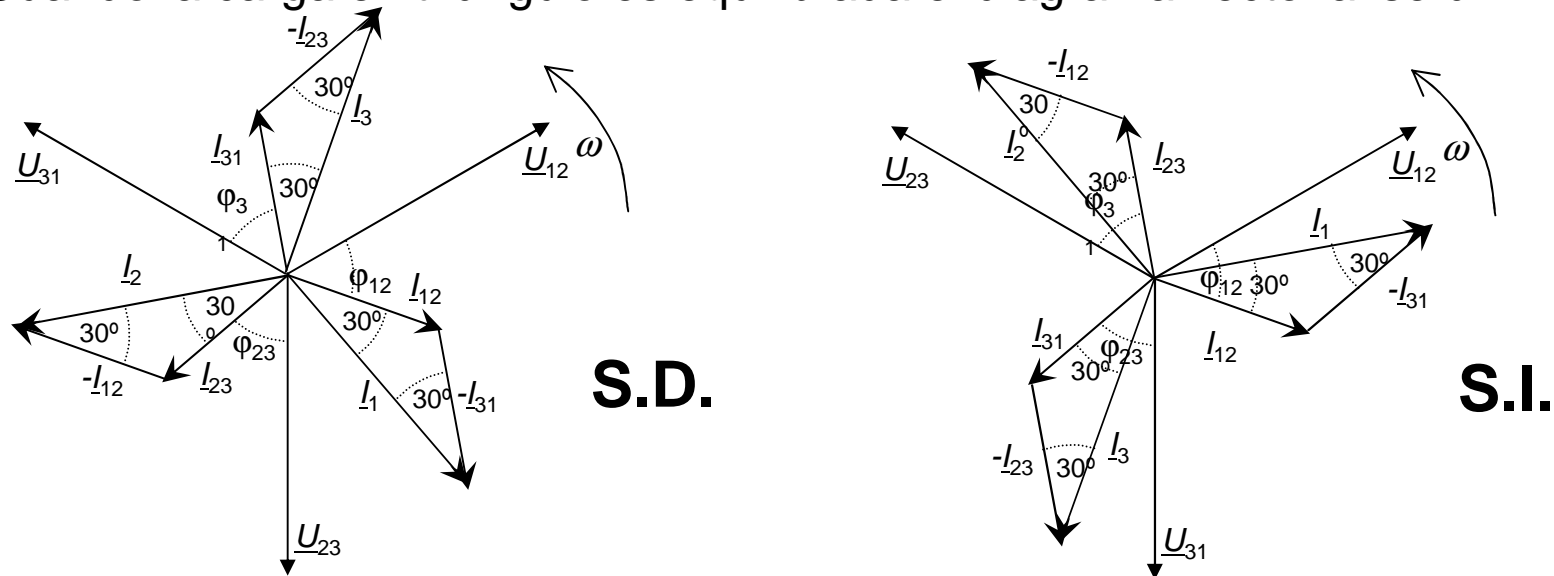
$$\begin{aligned} \underline{I}_{12} &= I_s \angle -\varphi_{\Delta} \\ \underline{I}_{23} &= I_s \angle -120^\circ - \varphi_{\Delta} \\ \underline{I}_{31} &= I_s \angle 120^\circ - \varphi_{\Delta} \end{aligned} \Rightarrow \underline{I}_{23} = \underline{I}_{12} \cdot 1_{\angle -120^\circ} \quad \underline{I}_{31} = \underline{I}_{12} \cdot 1_{\angle 120^\circ}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{12} &= I_s \angle -\varphi_{\Delta} \\ \underline{I}_{23} &= I_s \angle 120^\circ - \varphi_{\Delta} \\ \underline{I}_{31} &= I_s \angle -120^\circ - \varphi_{\Delta} \end{aligned} \Rightarrow \underline{I}_{23} = \underline{I}_{12} \cdot 1_{\angle 120^\circ} \quad \underline{I}_{31} = \underline{I}_{12} \cdot 1_{\angle -120^\circ}$$

## 7.4 SISTEMAS TRIFASICOS CON CONEXIÓN DE CARGAS EN TRIÁNGULO (5)

### 7.4.1 CARGAS EN TRIÁNGULO Y EQUILIBRADAS.

Cuando la carga en triángulo es equilibrada el diagrama vectorial será:



En este caso se observa que las intensidades de línea en secuencia directa retrasan  $30^\circ$  respecto de las de carga, mientras que en secuencia inversa sucede lo contrario, pero en ambos casos se forman sistemas trifásicos equilibrados en corrientes, cumpliendo que si llamamos al modulo de las corrientes de carga  $I_s$  y al de las corrientes de línea  $I_c$ :

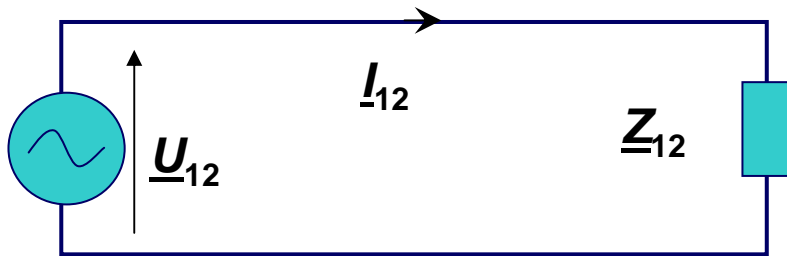
$$\begin{aligned}
 |I_{-1}| &= |I_{-12}| \cdot \cos 30^\circ + |I_{-31}| \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot I_s \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3} \cdot I_s = I_c \\
 |I_{-12}| &= |I_{-23}| = |I_{-31}| = I_s \quad \Rightarrow \quad |I_{-2}| = |I_{-23}| \cdot \cos 30^\circ + |I_{-12}| \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot I_s \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3} \cdot I_s = I_c \\
 |I_{-3}| &= |I_{-31}| \cdot \cos 30^\circ + |I_{-23}| \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot I_s \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3} \cdot I_s = I_c
 \end{aligned}$$



## 7.4 SISTEMAS TRIFASICOS CON CONEXIÓN DE CARGAS EN TRIÁNGULO (6)

### 7.4.1 CARGAS EN TRIÁNGULO Y EQUILIBRADAS.

Cuando la carga en triángulo es equilibrada a la hora de estudiar el circuito, el estudio se hace mediante la reducción al equivalente monofásico, generalmente de la fase 1, desfasando  $120^\circ$  las corrientes obtenidas, en retraso o adelanto para las otras fases.



Se dice que el equivalente monofásico de un triángulo está formado por la tensión compuesta y la corriente simple o de carga y la impedancia del triángulo

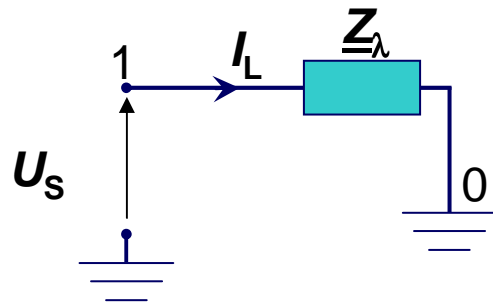
S.D.

$$\begin{aligned} \underline{I}_{12} &= I_s \angle -\varphi_\Delta \\ \underline{I}_{23} &= I_s \angle -120^\circ - \varphi_\Delta \\ \underline{I}_{31} &= I_s \angle 120^\circ - \varphi_\Delta \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \underline{I}_{23} &= \underline{I}_{12} \cdot 1 \angle -120^\circ & \underline{I}_{31} &= \underline{I}_{12} \cdot 1 \angle 120^\circ \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_{12} \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ & \underline{I}_2 &= \underline{I}_1 \cdot 1 \angle -120^\circ & \underline{I}_3 &= \underline{I}_1 \cdot 1 \angle 120^\circ \end{aligned}$$

S.l.

$$\begin{aligned} \underline{I}_{12} &= I_s \angle -\varphi_\Delta \\ \underline{I}_{23} &= I_s \angle 120^\circ - \varphi_\Delta \\ \underline{I}_{31} &= I_s \angle -120^\circ - \varphi_\Delta \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \underline{I}_{23} &= \underline{I}_{12} \cdot 1 \angle 120^\circ & \underline{I}_{31} &= \underline{I}_{12} \cdot 1 \angle -120^\circ \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_{12} \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ & \underline{I}_2 &= \underline{I}_1 \cdot 1 \angle 120^\circ & \underline{I}_3 &= \underline{I}_1 \cdot 1 \angle -120^\circ \end{aligned}$$

Cuando la carga del sistema trifásico es equilibrada el estudio se hace mediante la reducción al equivalente monofásico, se calcularía la potencia de una fase y se multiplicaría por tres para obtener la potencia total.



$$P_m = U_s \cdot I_L \cdot \cos \varphi$$

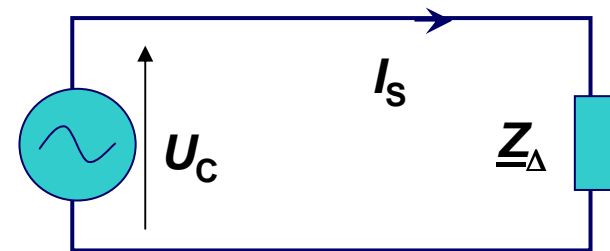
$$Q_m = U_s \cdot I_L \cdot \sin \varphi$$

$$S_m = U_s \cdot I_L$$

$$P = 3P_m = 3 \cdot U_s \cdot I_L \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot U_c \cdot I_L \cdot \cos \varphi$$

$$Q = 3Q_m = 3 \cdot U_s \cdot I_L \cdot \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot U_c \cdot I_L \cdot \sin \varphi$$

$$S = 3S_m = 3 \cdot U_s \cdot I_L = \sqrt{3} \cdot U_c \cdot I_L$$



$$P_m = U_c \cdot I_s \cdot \cos \varphi$$

$$Q_m = U_c \cdot I_s \cdot \sin \varphi$$

$$S_m = U_c \cdot I_s$$

$$P = 3P_m = 3 \cdot U_c \cdot I_s \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot U_c \cdot I_L \cdot \cos \varphi$$

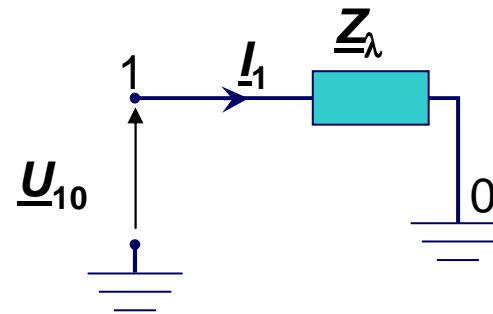
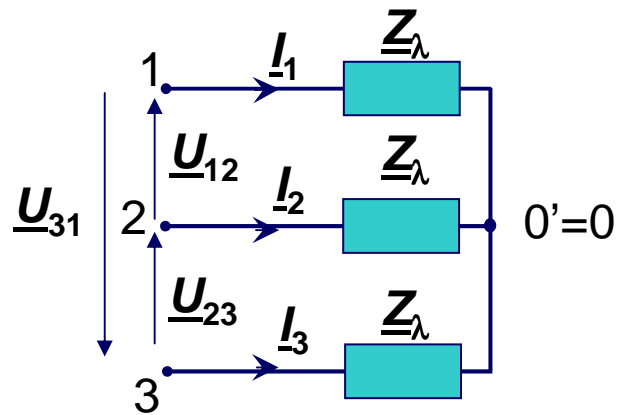
$$Q = 3Q_m = 3 \cdot U_c \cdot I_s \cdot \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot U_c \cdot I_L \cdot \sin \varphi$$

$$S = 3S_m = 3 \cdot U_c \cdot I_s = \sqrt{3} \cdot U_c \cdot I_L$$

## 7.6 CALCULO DE LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS (1)

### 7.6.1 CARGA EN ESTRELLA

Cuando la carga del sistema trifásico es una estrella equilibrada el estudio se hace mediante la reducción al equivalente monofásico.



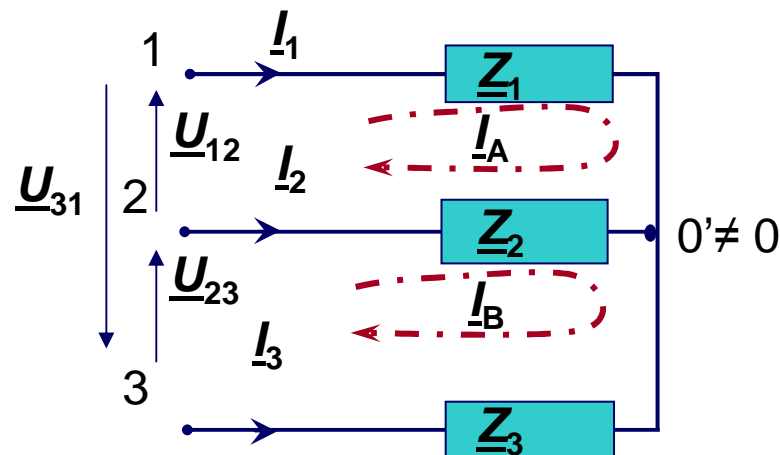
$$\text{S.D.} \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_{10}}{Z_\lambda \angle \varphi_\lambda} = \frac{U_s}{Z_\lambda} \angle -\varphi_\lambda \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cdot \mathbf{1} \angle -120 \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_1 \cdot \mathbf{1} \angle 120$$

$$\text{S.I.} \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_{10}}{Z_\lambda \angle \varphi_\lambda} = \frac{U_s}{Z_\lambda} \angle -\varphi_\lambda \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cdot \mathbf{1} \angle 120 \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_1 \cdot \mathbf{1} \angle -120$$

## 7.6 CALCULO DE LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS (2)

### 7.6.1 CARGA EN ESTRELLA

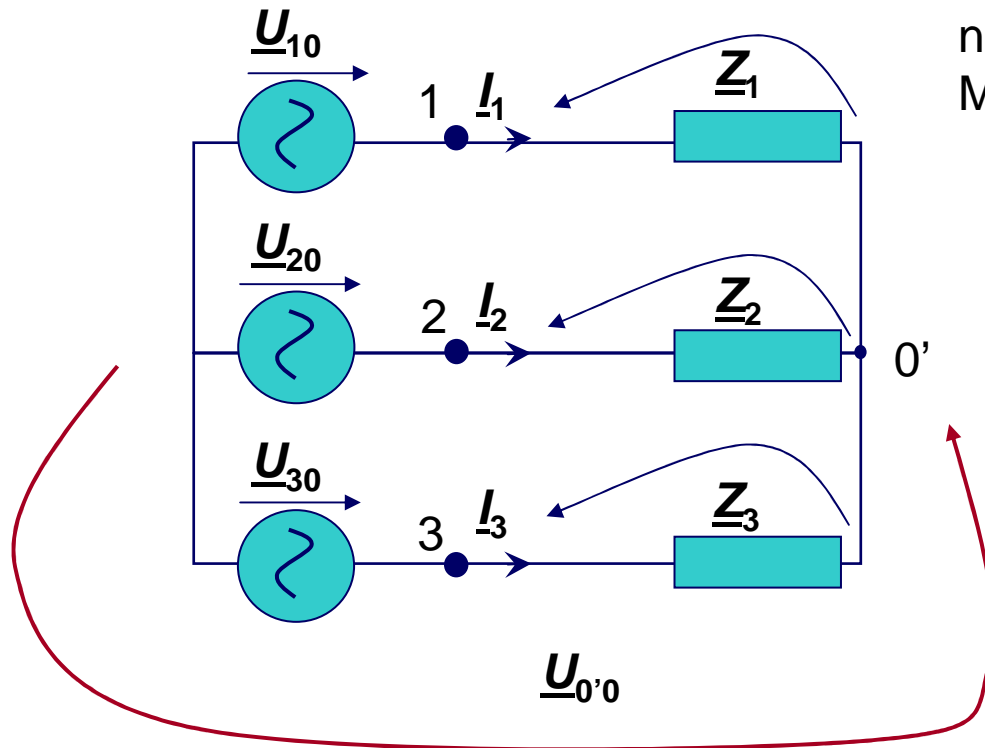
Cuando la carga del sistema trifásico es una estrella desequilibrada el estudio se hace mediante tres métodos que son: lazos básicos, mallas o desplazamiento del neutro. Si bien en algunos casos se hace la transformación de estrella a triángulo y se resuelve según el siguiente apartado.



$$\begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & -\underline{Z}_2 \\ -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_A \\ \underline{I}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_{12} \\ \underline{U}_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_A \\ \underline{I}_2 &= \underline{I}_B - \underline{I}_A \\ \underline{I}_3 &= -\underline{I}_B \end{aligned}$$

## 7.6 CALCULO DE LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS (3)

### 7.6.1 CARGA EN ESTRELLA



$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{10'}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_{10} - \underline{U}_{0'0}}{\underline{Z}_1}$$

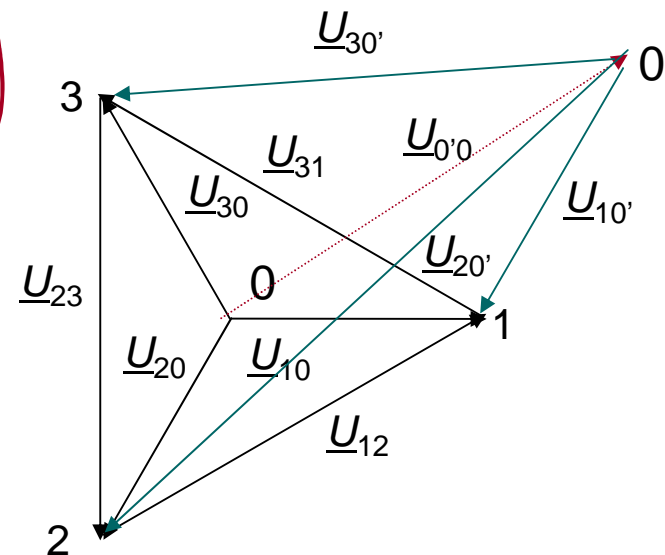
$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{20'}}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_{20} - \underline{U}_{0'0}}{\underline{Z}_2}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{30'}}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_{30} - \underline{U}_{0'0}}{\underline{Z}_3}$$

El método del desplazamiento del neutro se basa en el teorema de Millman

$$\underline{U}_{0'0} = \frac{\sum_{i=1}^n \underline{Y}_i \cdot \underline{U}_{i0}}{\sum_{i=1}^n \underline{Y}_i} =$$

$$\underline{U}_{0'0} = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{U}_{10} + \underline{Y}_2 \cdot \underline{U}_{20} + \underline{Y}_3 \cdot \underline{U}_{30}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$



## 7.6 CALCULO DE LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS (4)

### 7.6.1 CARGA EN ESTRELLA

Cuando la carga en estrella es desequilibrada mediante la transformación estrella-triángulo y el estudio del triángulo desequilibrado.

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}$$

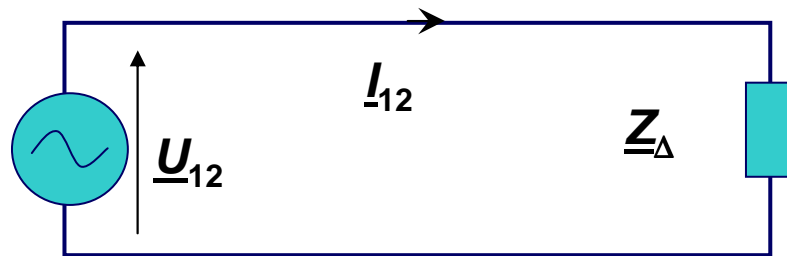
$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1}$$

$$\underline{Z}_{31} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$$

## 7.6 CALCULO DE LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS (5)

### 7.6.2 CARGA EN TRIANGULO

Cuando la carga en triángulo es equilibrada se resuelve mediante la reducción al equivalente monofásico del propio triángulo.



$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{\Delta}}$$

S.D.

$$\begin{aligned} \underline{I}_{12} &= I_S \angle -\varphi_{\Delta} \\ \underline{I}_{23} &= I_S \angle -120^{\circ} - \varphi_{\Delta} \\ \underline{I}_{31} &= I_S \angle 120^{\circ} - \varphi_{\Delta} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \underline{I}_{23} &= \underline{I}_{12} \cdot 1 \angle -120^{\circ} & \underline{I}_{31} &= \underline{I}_{12} \cdot 1 \angle 120^{\circ} \end{aligned}$$

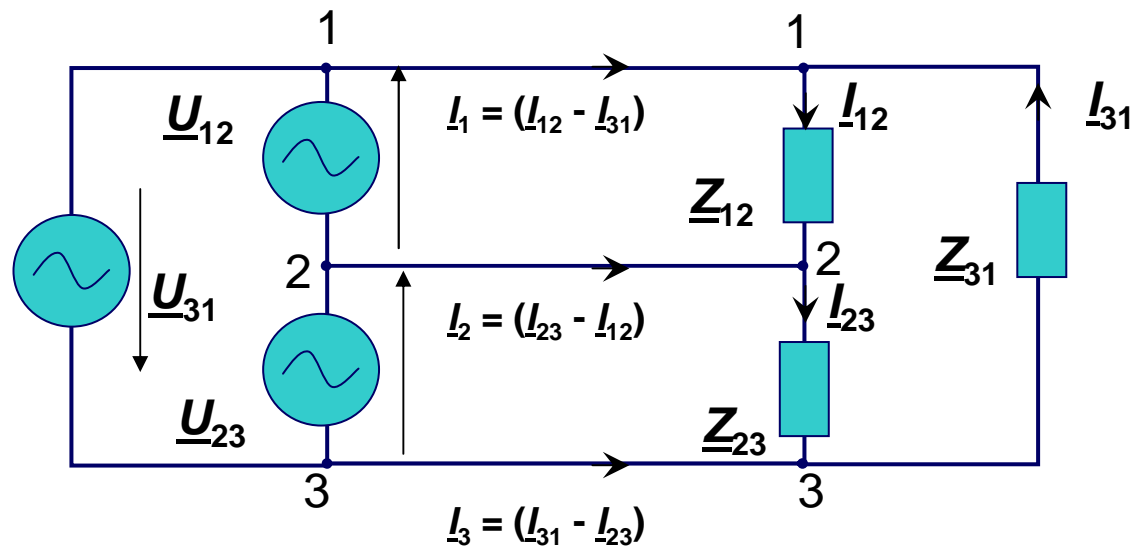
S.I.

$$\begin{aligned} \underline{I}_{12} &= I_S \angle -\varphi_{\Delta} \\ \underline{I}_{23} &= I_S \angle 120^{\circ} - \varphi_{\Delta} \\ \underline{I}_{31} &= I_S \angle -120^{\circ} - \varphi_{\Delta} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \underline{I}_{23} &= \underline{I}_{12} \cdot 1 \angle 120^{\circ} & \underline{I}_{31} &= \underline{I}_{12} \cdot 1 \angle -120^{\circ} \end{aligned}$$

## 7.6 CALCULO DE LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS (6)

### 7.6.2 CARGA EN TRIANGULO

Cuando la carga en triángulo es desequilibrada se resuelve mediante las ecuaciones del triángulo



$$I_{12} = \frac{U_{12}}{Z_{12}} \quad I_{23} = \frac{U_{23}}{Z_{23}}$$

$$I_{31} = \frac{U_{31}}{Z_{31}}$$

$$I_1 = I_{12} - I_{31} \quad I_2 = I_{23} - I_{12}$$

$$I_3 = I_{31} - I_{23}$$



## 7.6 CALCULO DE LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS (7)

### 7.6.2 CARGA EN TRIANGULO

Otro método que no suele ser muy utilizado es la transformación del triángulo-estrella

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}$$

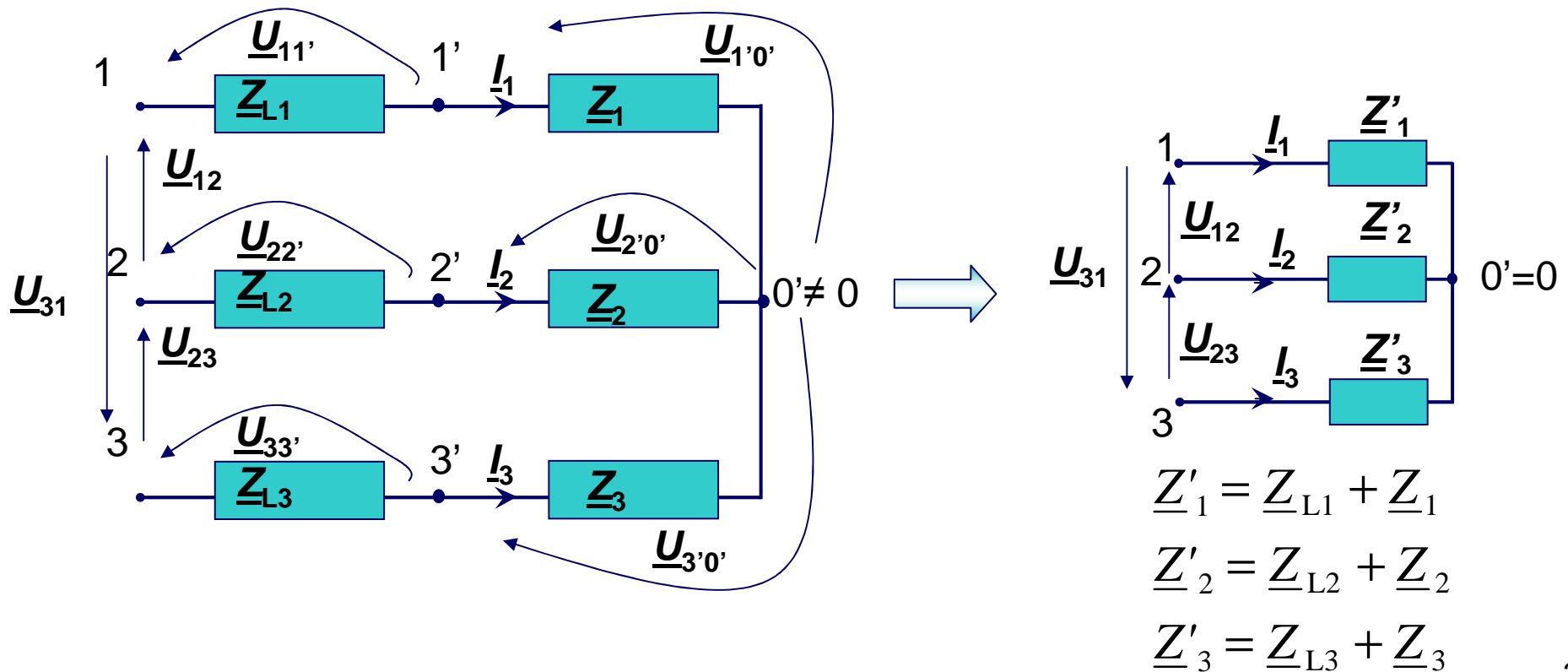
$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{23} \cdot \underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{31} \cdot \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}$$

## 7.6 CALCULO DE LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS (8)

### 7.6.3 CARGA EN ESTRELLA Y EN LA LÍNEA

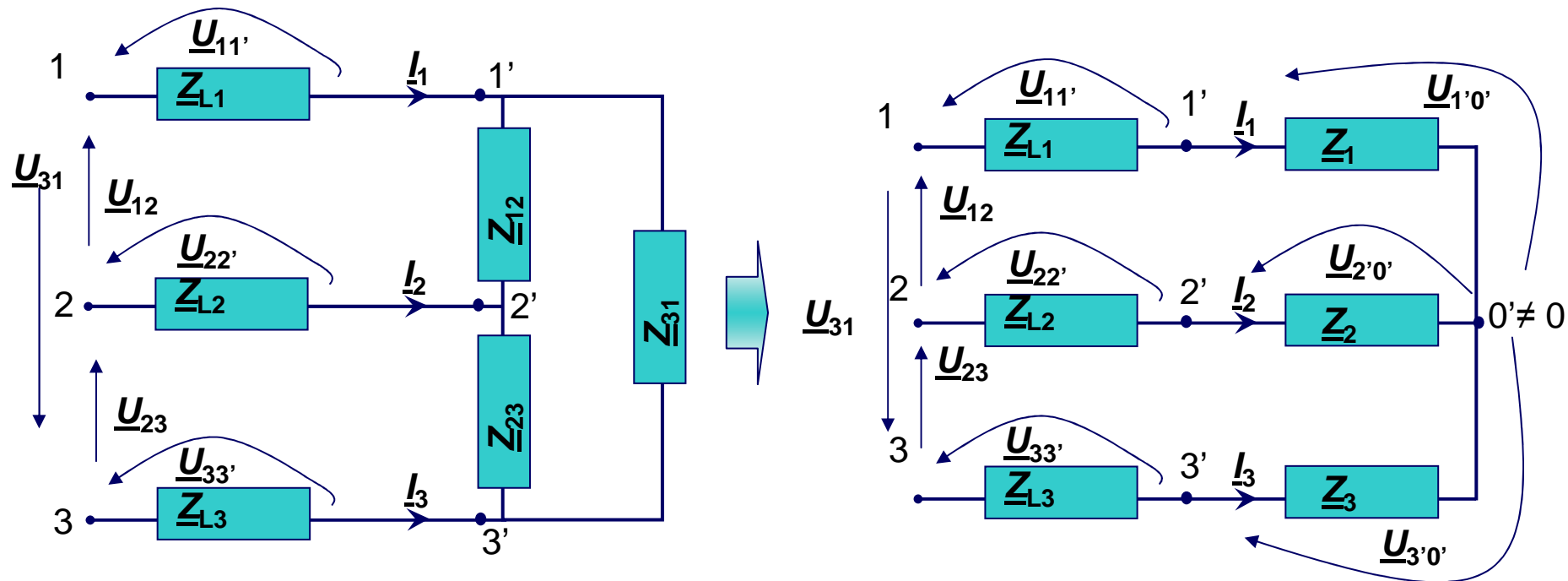
Se agrupan las cargas de cada rama de la estrella con la de línea que le precede y se estudia la estrella resultante según lo visto en el apartado 7.6.1., . Hay que tener en cuenta que la tensión en la carga en estrella no es la tensión del generador ya que en la línea se produce una caída de tensión



## 7.6 CALCULO DE LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS (9)

### 7.6.4 CARGA EN TRIÁNGULO Y EN LA LÍNEA

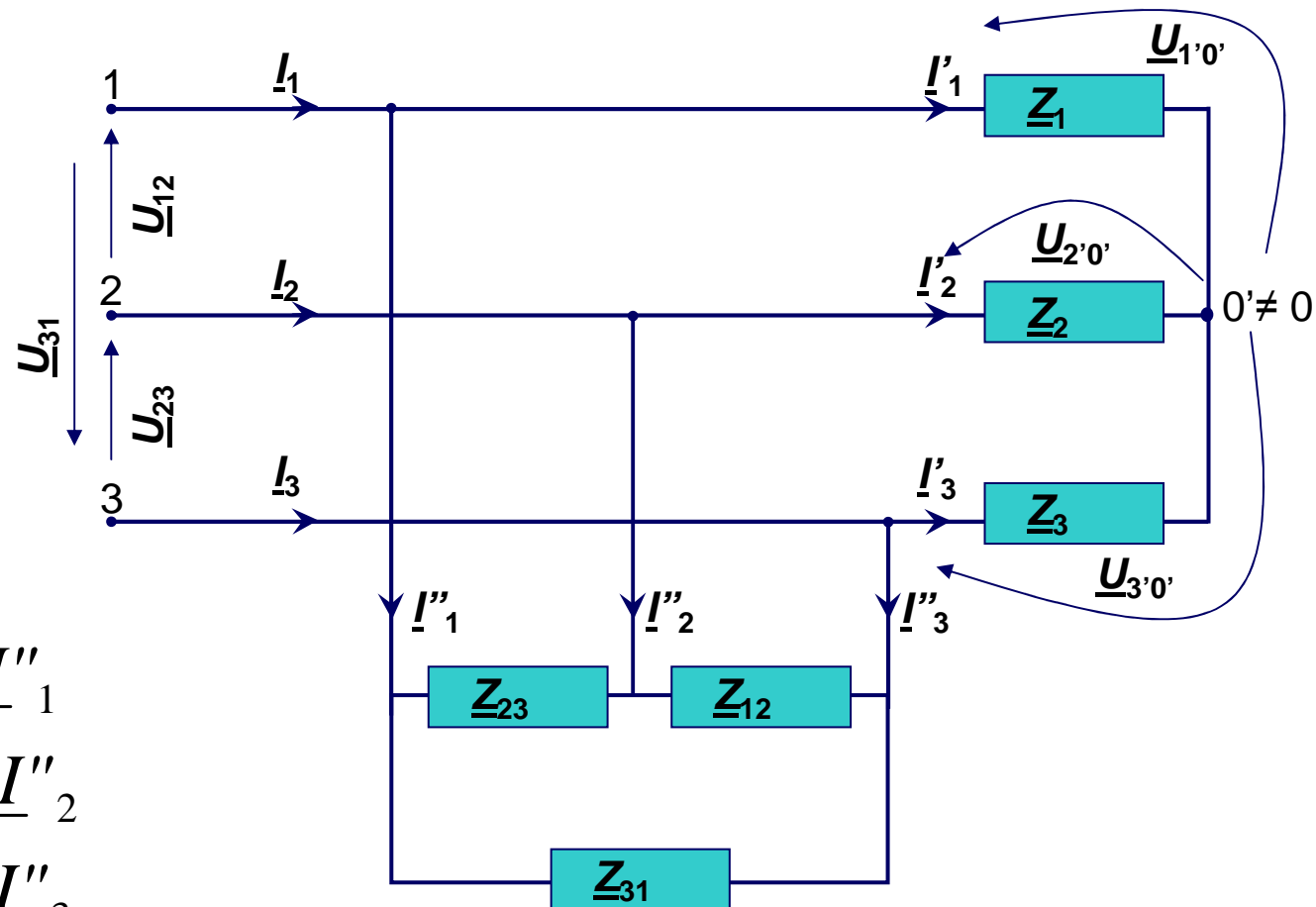
Se transforma el triángulo en su estrella equivalente según las ecuaciones de la transformación triángulo-estrella vistas en el apartado anterior, y después se estudiara como una estrella con carga en la línea



## 7.6 CALCULO DE LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS (10)

### 7.6.5 CARGA EN ESTRELLA Y EN TRIÁNGULO

Para resolver este sistema se tienen que conocer las corrientes que llegan al triángulo y las que llegan a la estrella, para obtener a partir de ellas la corriente de la línea. Existen tres métodos superposición, transformación del triángulo a la estrella equivalente o bien transformación de la estrella al triángulo equivalente



$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_1 + \underline{I}''_1$$

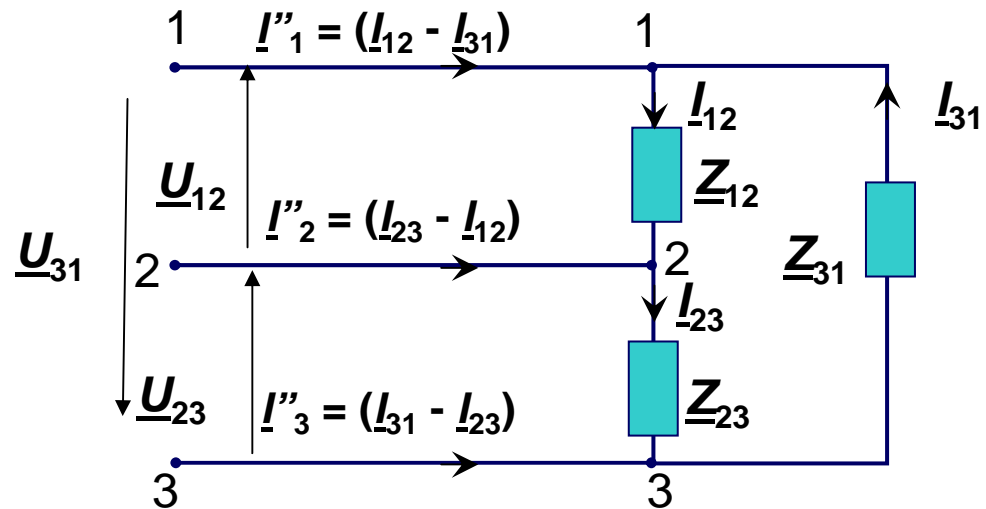
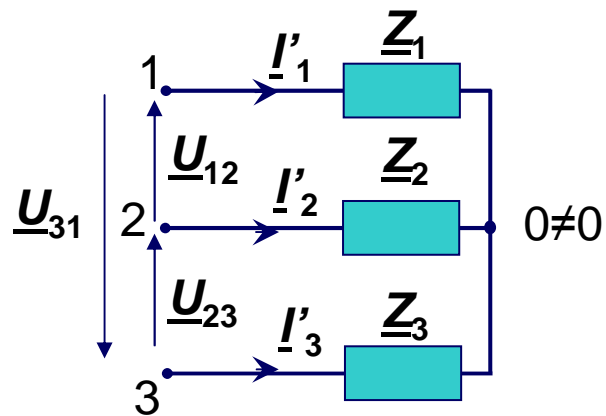
$$\underline{I}_2 = \underline{I}'_2 + \underline{I}''_2$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}'_3 + \underline{I}''_3$$

## 7.6 CALCULO DE LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS (11)

### 7.6.5 CARGA EN ESTRELLA Y EN TRIÁNGULO

Para resolver este sistema por superposición: se estudia por una parte la estrella y por otra el triángulo;



$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_1 + \underline{I}''_1$$

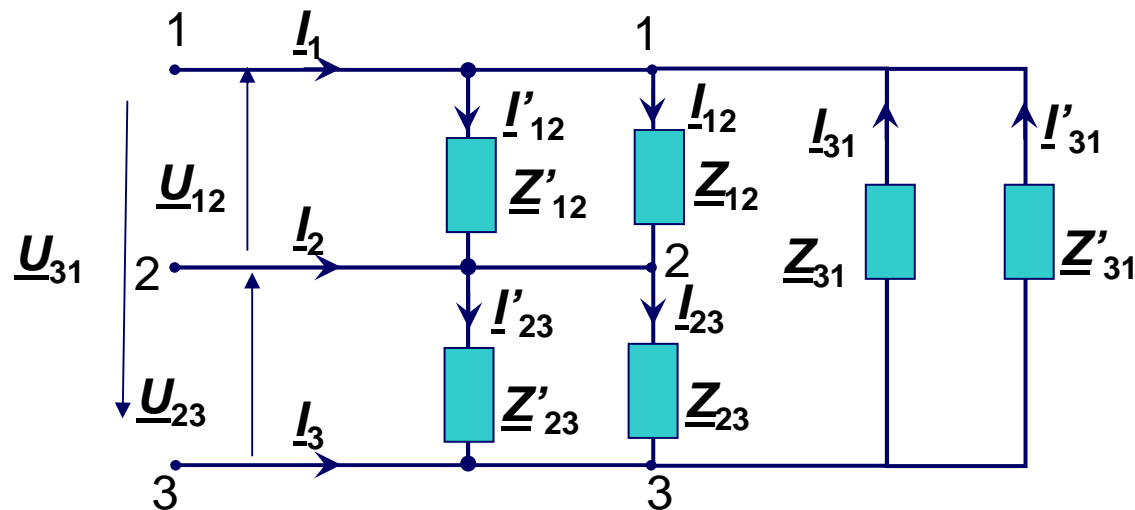
$$\underline{I}_2 = \underline{I}'_2 + \underline{I}''_2$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}'_3 + \underline{I}''_3$$

## 7.6 CALCULO DE LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS (12)

### 7.6.5 CARGA EN ESTRELLA Y EN TRIÁNGULO

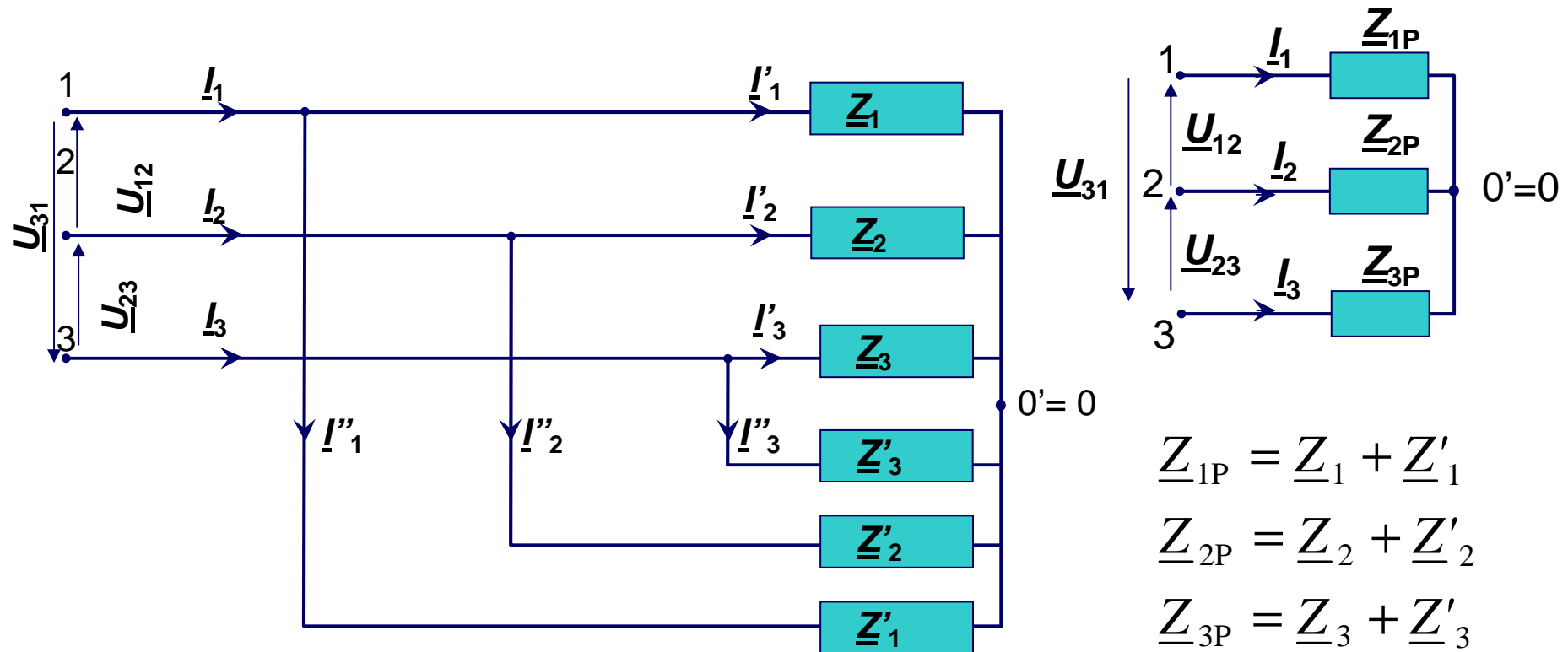
Para resolver este sistema por transformación de la estrella en el triángulo equivalente, entonces en cada rama del triángulo tendremos dos impedancias en paralelo y las asociaremos entre sí de tal forma que el resultado será un triángulo equivalente.



## 7.6 CALCULO DE LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS (13)

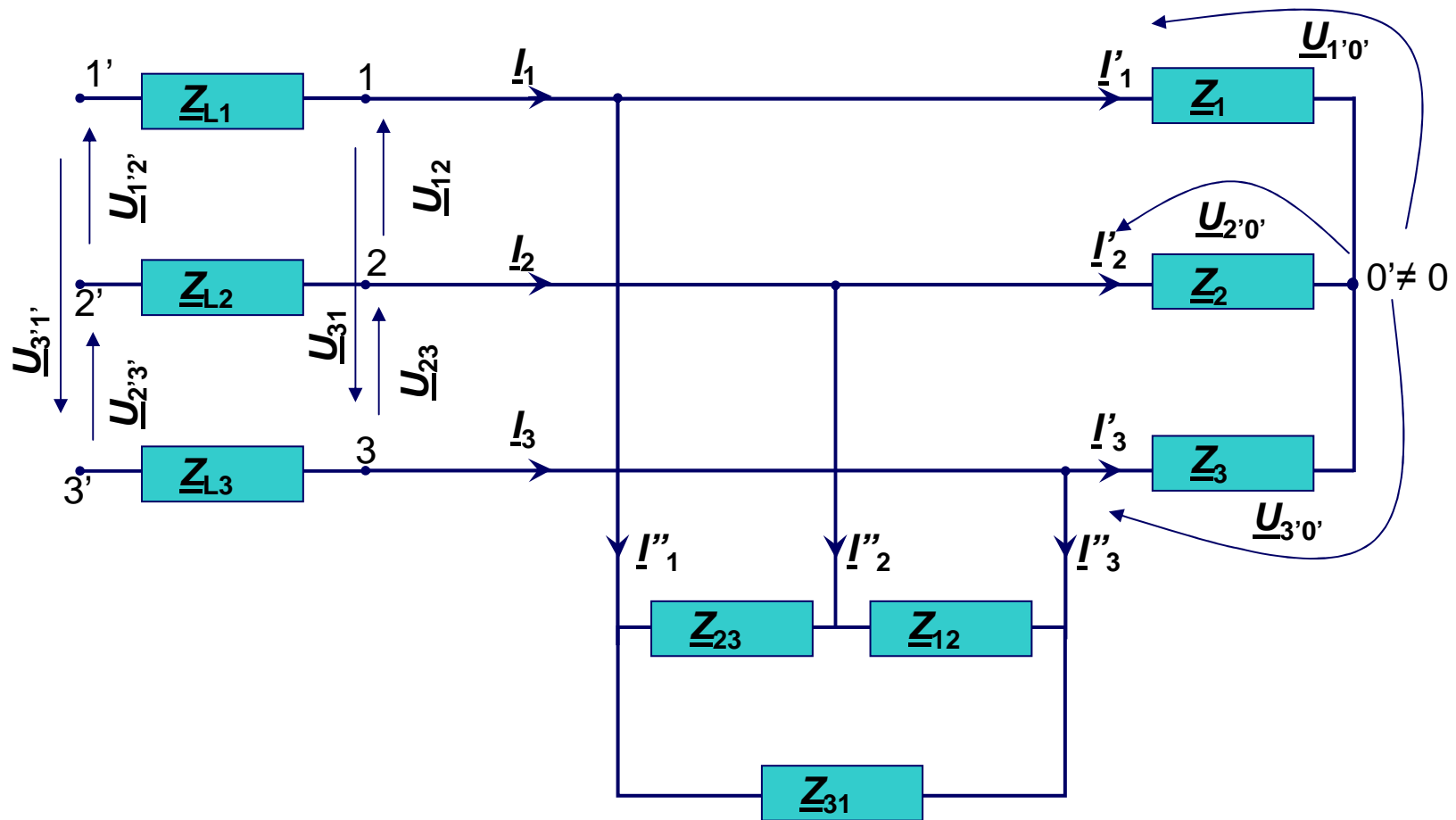
### 7.6.5 CARGA EN ESTRELLA Y EN TRIÁNGULO

Para resolver este sistema por transformación del triángulo a la estrella equivalente, se necesita que las dos cargas sean equilibradas, entonces tendremos dos impedancias en paralelo para cada rama de la estrella y las asociaremos entre sí de tal forma que el resultado será una estrella también equilibrada.



## 7.6 CALCULO DE LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS (14)

### 7.6.5 CARGA EN ESTRELLA, EN TRIÁNGULO Y EN LA LÍNEA

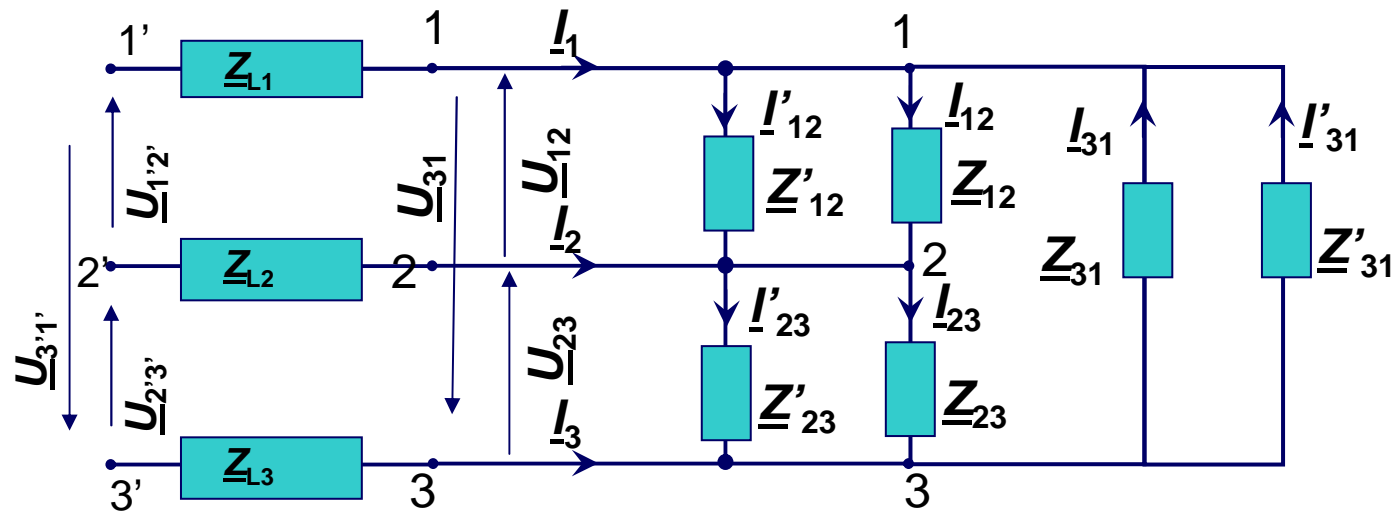




## 7.6 CALCULO DE LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS (15)

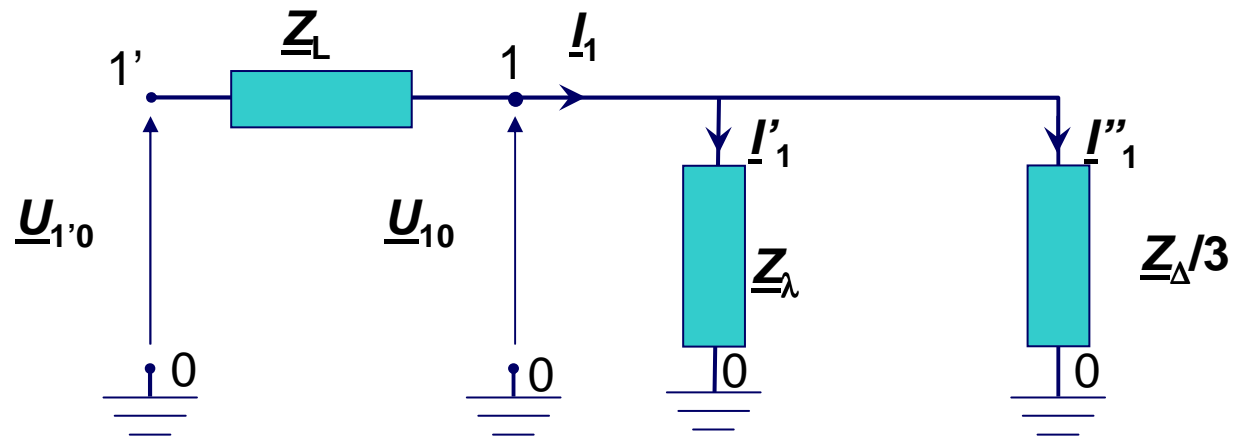
### 7.6.5 CARGA EN ESTRELLA, EN TRIÁNGULO Y EN LA LÍNEA

En el caso de cargas desequilibradas hay que hacer la transformación de la estrella al triángulo equivalente, se calculan las ramas del triangulo equivalente como hemos calculado para carga en triangulo y en estrella, y entonces se estudia igual que una carga en triangulo y en la línea.



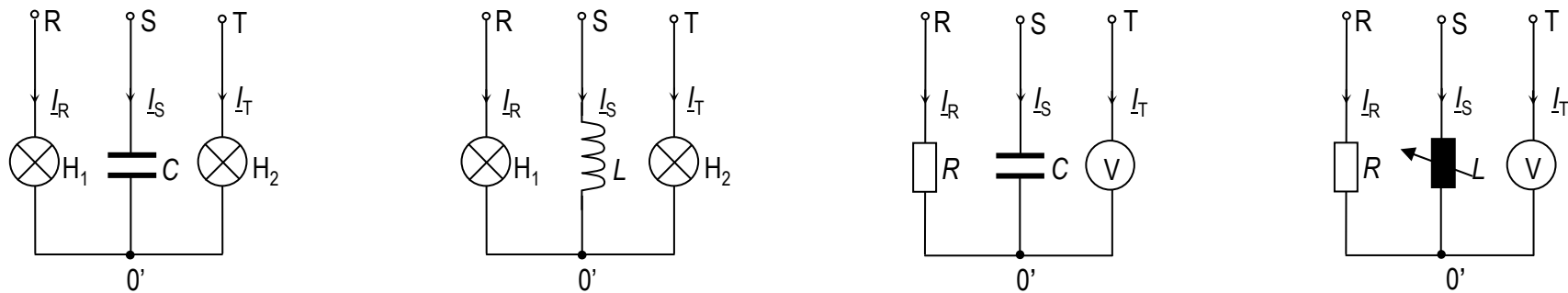
7.6 CALCULO DE LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS (16)  
7.6.5 CARGA EN ESTRELLA, EN TRIÁNGULO Y EN LA LÍNEA

En el caso de cargas equilibradas hay que hacer la transformación del triángulo a la estrella equivalente, y se calcula el equivalente monofásico del circuito



## 7.7 DETERMINACIÓN DEL ORDEN DE SUCESIÓN DE FASES (1)

En los sistemas trifásicos equilibrados en tensiones se puede determinar el orden de sucesión de fases mediante sencillos montajes como los de las siguientes figuras:



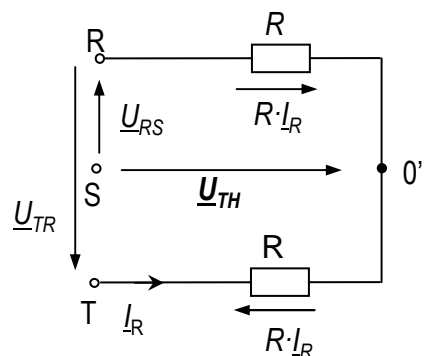
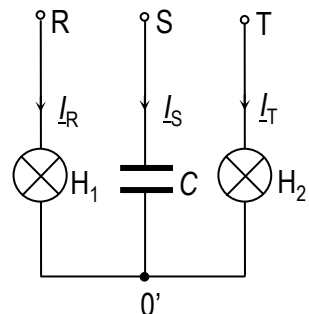
Se puede observar que los montajes como los de las figuras se corresponden con cargas trifásicas desequilibradas de forma que el  $0' \neq 0$ , y por tanto las tensiones que caen en cada rama de la estrella desequilibrada serán diferentes, el valor de esta tensión será el que nos dará la secuencia del sistema.

En una carga para cambiar el orden de sucesión de fases basta con permutar dos de las fases entre si y ya se consigue.

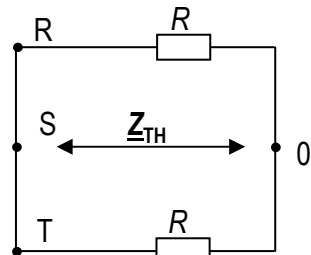
## 7.7 DETERMINACIÓN DEL ORDEN DE SUCESIÓN DE FASES (2)

Estudiaremos cada uno de los cuatro montajes:

Para el primer montaje, si consideramos la resistencia de las lámparas, entonces se podría calcular el equivalente de Thevenin en bornes del condensador, es decir entre la fase R y 0', para ello

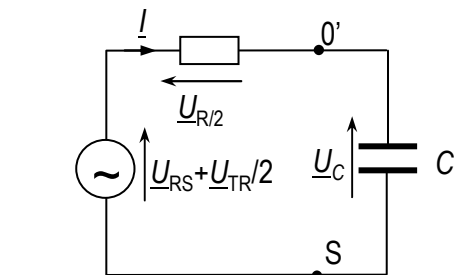


$$\begin{aligned} \underline{U}_{TR} &= 2 \cdot R \cdot I_R \\ \underline{U}_{RS} &= \underline{U}_{TH} - R \cdot I_R \\ \underline{U}_{TH} &= \underline{U}_{RS} + R \cdot I_R \\ \underline{U}_{TH} &= \underline{U}_{RS} + \frac{\underline{U}_{TR}}{2} \end{aligned}$$

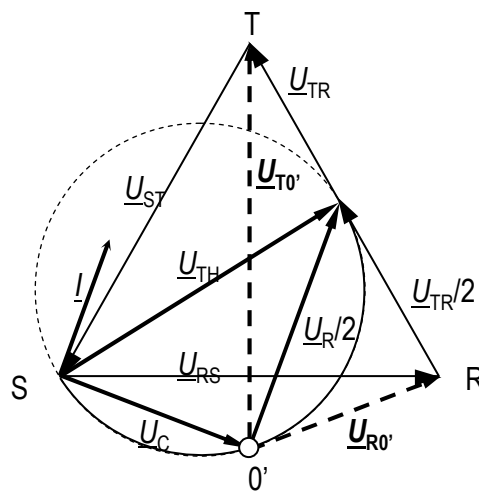


$$Z_{TH} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$

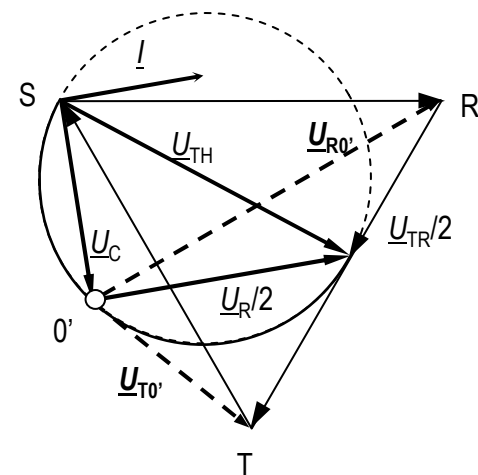
$$\left. \begin{aligned} P &= U \cdot I \\ I &= \frac{U}{R} \end{aligned} \right\} R = \frac{U^2}{P}$$



$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{Th}}{\frac{R}{2} - jX_C} = \frac{\underline{U}_{Th}}{Z_{\angle -\phi^\circ}}$$



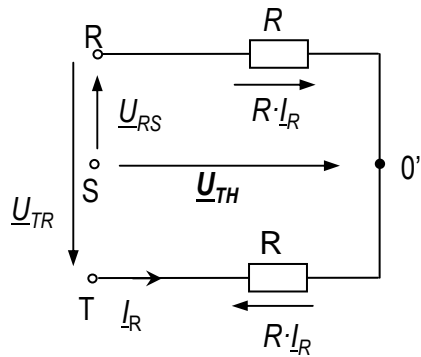
H2 > H1 ⇒ SD



H1 > H2 ⇒ SI

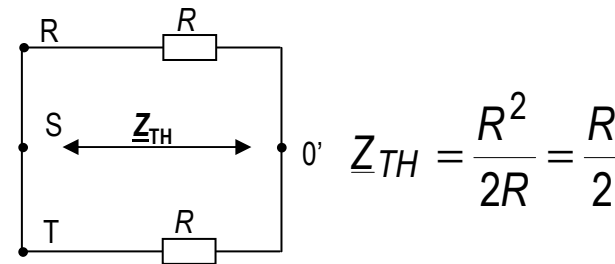
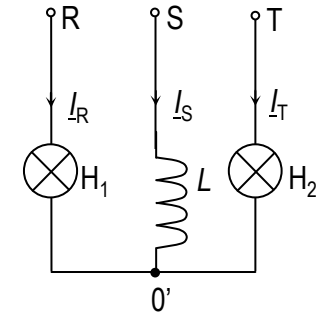
## 7.7 DETERMINACIÓN DEL ORDEN DE SUCESIÓN DE FASES (3)

Para el segundo montaje, si consideramos la resistencia de las lámparas, igualmente se podría calcular el equivalente de Thévenin en bornes de la bobina, es decir entre la fase R y 0', para ello:

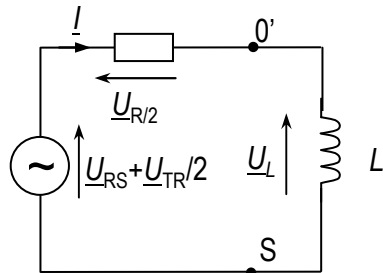


$$\begin{aligned} \underline{U}_{TR} &= 2 \cdot R \cdot I_R \\ \underline{U}_{RS} &= \underline{U}_{TH} - R \cdot I_R \\ \underline{U}_{TH} &= \underline{U}_{RS} + R \cdot I_R \\ \underline{U}_{TH} &= \underline{U}_{RS} + \frac{\underline{U}_{TR}}{2} \end{aligned}$$

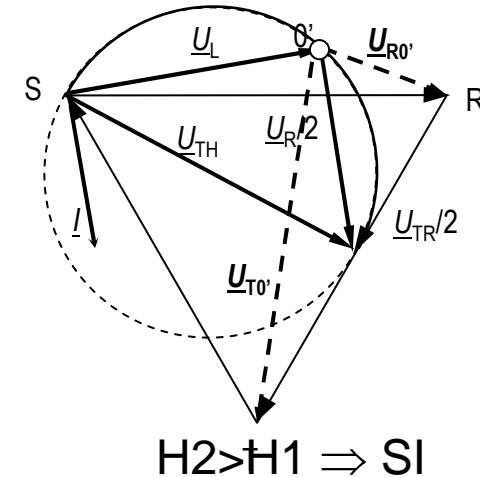
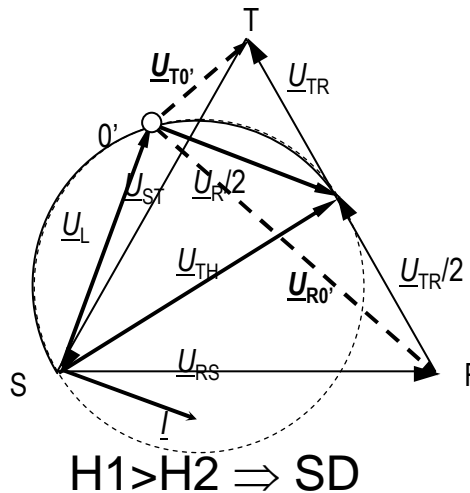
$$\left. \begin{aligned} P &= U \cdot I \\ I &= \frac{U}{R} \end{aligned} \right\} R = \frac{U^2}{P}$$



$$\underline{Z}_{TH} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$

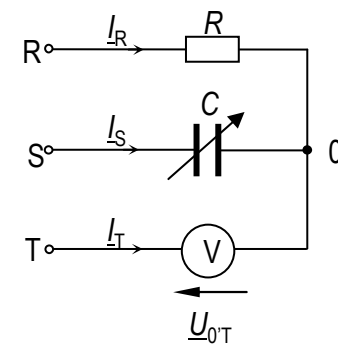


$$I = \frac{U_{Th}}{\frac{R}{2} + jX_L} = \frac{U_{Th}}{Z \angle \varphi^\circ}$$



## 7.7 DETERMINACIÓN DEL ORDEN DE SUCESIÓN DE FASES (4)

Para el montaje de la tercera figura, si consideramos la resistencia de las lámparas, y si además se considera que la corriente que recorre el voltímetro es nula, el circuito se podría considerar como un circuito monofásico formado por un condensador y una resistencia que están sometidos a la tensión que hay entre las fases R y S y con esta consideración la corriente y las tensiones en el circuito serán:



$$\left. \begin{aligned} P &= U \cdot I \\ I &= \frac{U}{R} \end{aligned} \right\} R = \frac{U^2}{P}$$

$$I_{RS} = \frac{U_{RS}}{R - jX_C} = \frac{U_C \angle 0^\circ}{Z \angle -\varphi^\circ} = I_{RS} \angle \varphi^\circ$$

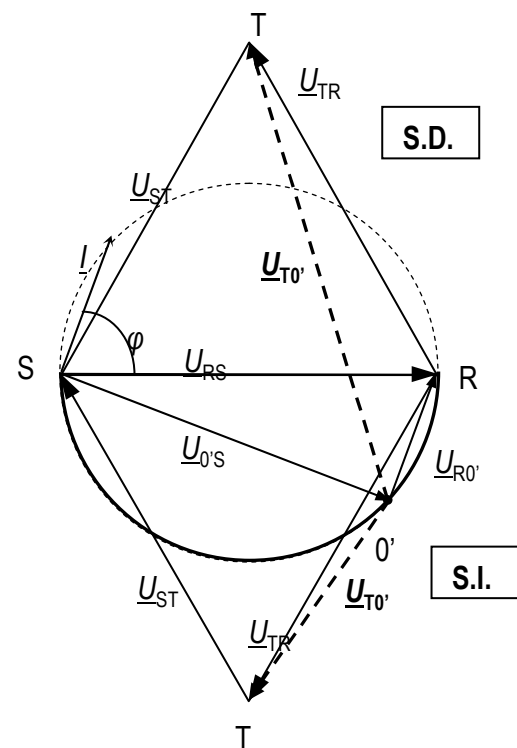
$$U_{R0'} = I_{RS} \angle \varphi \cdot R = I_{RS} \cdot R \angle \varphi^\circ$$

$$U_{0'S} = I_{RS} \angle \varphi \cdot X_C \angle -90^\circ = I_{RS} \cdot X_C \angle \varphi - 90^\circ$$

$$U_{R0'} + U_{0'S} = U_{RS}$$

L.V. > U<sub>c</sub> ⇒ SD

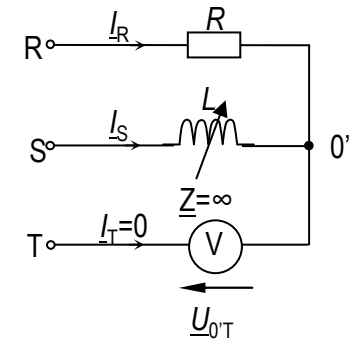
L.V. < U<sub>c</sub> ⇒ SI



## 7.7 DETERMINACIÓN DEL ORDEN DE SUCESIÓN DE FASES (5)

Para el montaje de la cuarta figura, volviendo a considerar la resistencia de las lámparas, y que la corriente que recorre el voltímetro es nula, el circuito se podría considerar como un circuito monofásico formado por una bobina y una resistencia que están sometidos a la tensión que hay entre las fases R y S y con esta consideración la corriente y las tensiones en el circuito serán

$$\left. \begin{aligned} P &= U \cdot I \\ I &= \frac{U}{R} \end{aligned} \right\} R = \frac{U^2}{P}$$

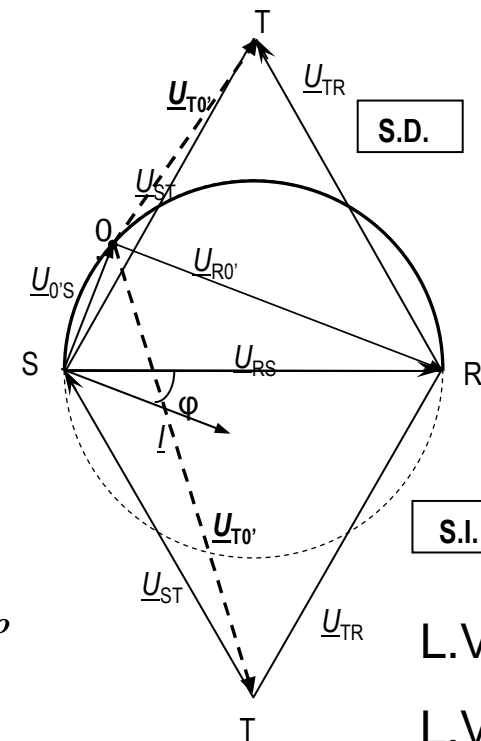


$$\underline{I}_{RS} = \frac{\underline{U}_{RS}}{R + jX_L} = \frac{U_C \angle 0^\circ}{Z \angle \varphi^\circ} = I_{RS} \angle -\varphi^\circ$$

$$\underline{U}_{R0'} = I_{RS} \angle -\varphi \cdot R = I_{RS} \cdot R \angle -\varphi^\circ$$

$$\underline{U}_{0'S} = I_{RS} \angle -\varphi \cdot X_L \angle 90^\circ = I_{RS} \cdot X_C \angle -\varphi + 90^\circ$$

$$\underline{U}_{R0'} + \underline{U}_{0'S} = \underline{U}_{RS}$$

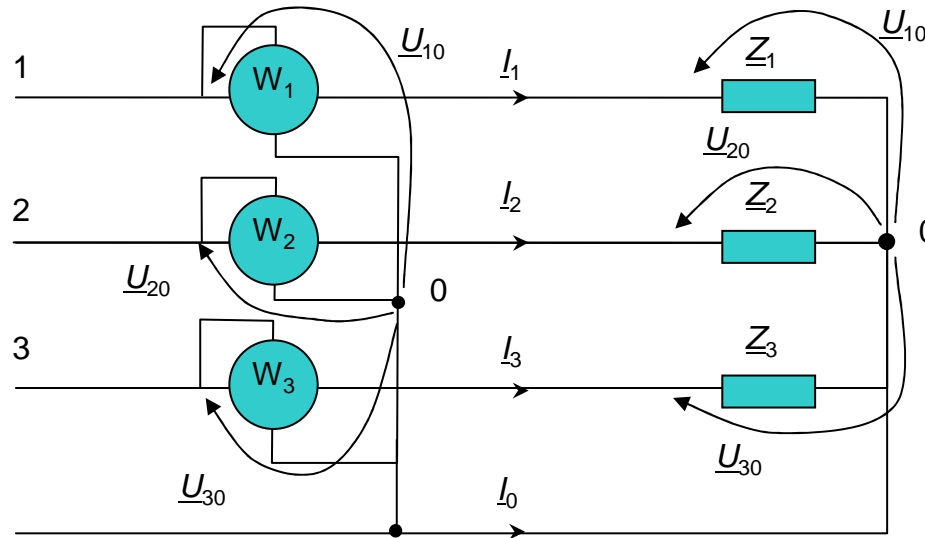


L.V. < U<sub>c</sub> ⇒ SD

L.V. > U<sub>c</sub> ⇒ SI

## 7.8 MEDIDA DE POTENCIAS A 4 HILOS (1)

### CARGA EN ESTRELLA Y DESEQUILIBRADA



$$LW1 = U_{10} \cdot I_1 \cdot \cos(\hat{U}_{10} \cdot I_1) = U_{10} \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1$$

$$LW2 = U_{20} \cdot I_2 \cdot \cos(\hat{U}_{20} \cdot I_2) = U_{20} \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2$$

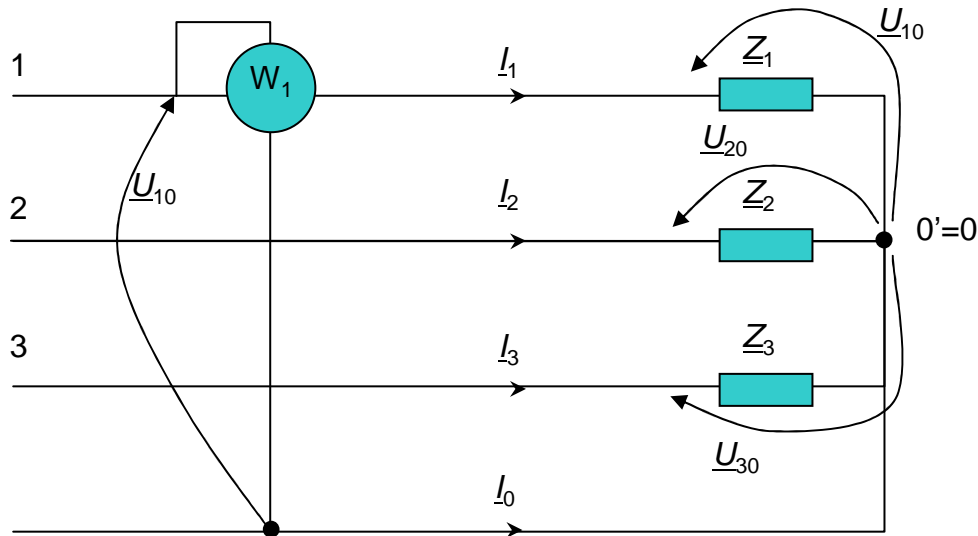
$$LW3 = U_{30} \cdot I_3 \cdot \cos(\hat{U}_{30} \cdot I_3) = U_{30} \cdot I_3 \cdot \cos \varphi_3$$

$$P = P_{Z_1} + P_{Z_2} + P_{Z_3} = U_{10} \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1 + U_{20} \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2 + U_{30} \cdot I_3 \cdot \cos \varphi_3 = W1 + W2 + W3$$



## 7.8 MEDIDA DE POTENCIAS A 4 HILOS (2)

### CARGA EN ESTRELLA Y EQUILIBRADA



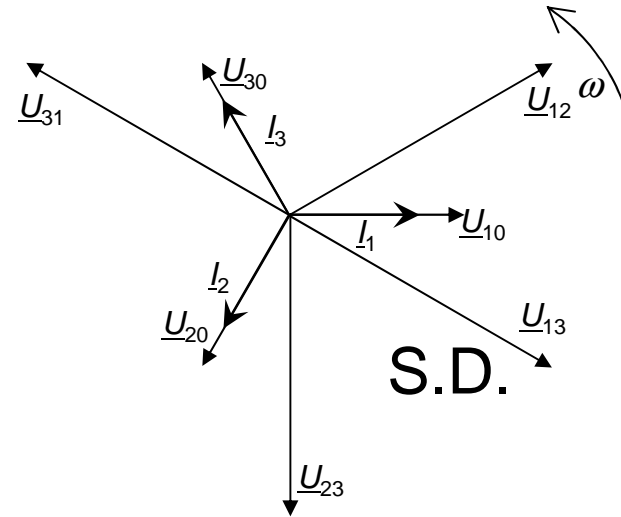
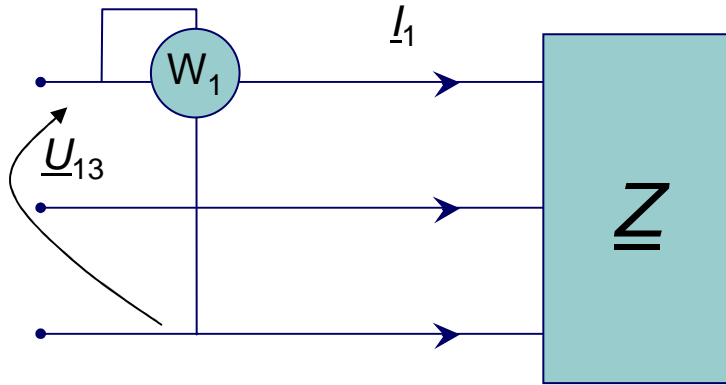
$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z} = Z \angle \varphi^\circ \Rightarrow |\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = |\underline{I}_3| = I_L$$

$$LW1 = U_{10} \cdot I_1 \cdot \cos(\hat{\underline{U}}_{10} \cdot \underline{I}_1) = U_S \cdot I_L \cdot \cos \varphi$$

$$P = \sqrt{3} U_C \cdot I_L \cdot \cos \varphi = 3W$$

## 7.9 MEDIDA DE POTENCIAS A 3 HILOS (3)

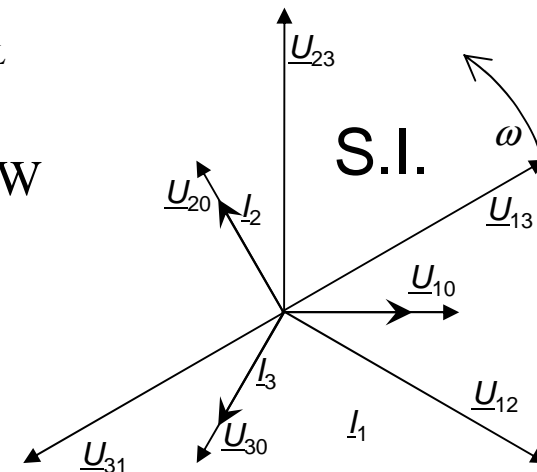
### CARGA RESISTIVA PURA Y EQUILIBRADA



$$|\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = |\underline{I}_3| = I_L$$

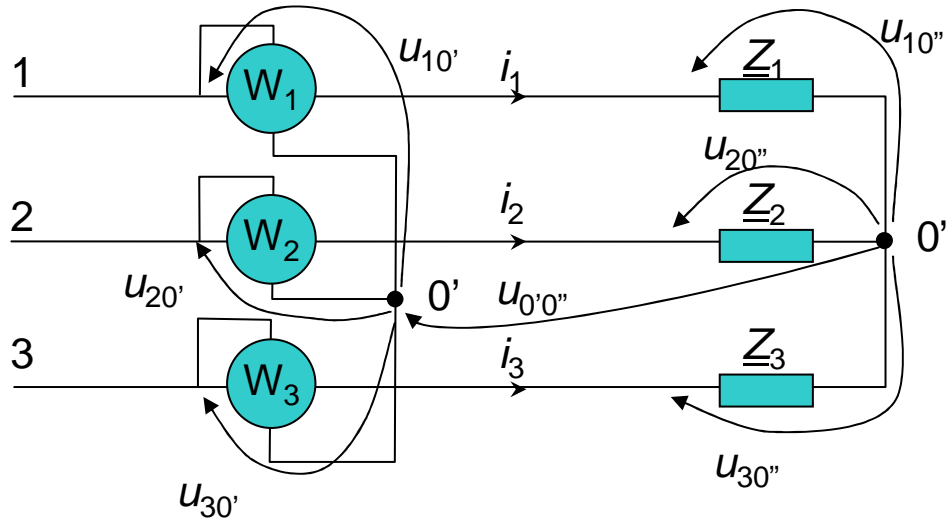
$$LW = U_{13} \cdot I_1 \cdot \cos(\underline{U}_{13} \hat{\cdot} \underline{I}_1) = U_C \cdot I_L \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} U_C \cdot I_L$$

$$P = \sqrt{3} U_C \cdot I_L \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} U_C \cdot I_L \cdot \cos 0^\circ = \sqrt{3} U_C \cdot I_L = 2W$$



## 7.9 MEDIDA DE POTENCIAS A 3 HILOS (4)

### CARGA DESEQUILIBRADA



$$P_{Z1} = \frac{1}{T} \int (i_1 \cdot u_{10''}) dt$$

$$P_{Z2} = \frac{1}{T} \int (i_2 \cdot u_{20''}) dt$$

$$P_{Z3} = \frac{1}{T} \int (i_3 \cdot u_{30''}) dt$$

$$P = P_{Z1} + P_{Z2} + P_{Z3} =$$

$$\frac{1}{T} \int (i_1 \cdot u_{10''} + i_2 \cdot u_{20''} + i_3 \cdot u_{30''}) dt$$

$$W_1 = \frac{1}{T} \int (i_1 \cdot u_{10'}) dt \quad W_2 = \frac{1}{T} \int (i_2 \cdot u_{20'}) dt \quad W_3 = \frac{1}{T} \int (i_3 \cdot u_{30'}) dt$$

$$u_{10'} = u_{10''} - u_{0'0''} \quad u_{20'} = u_{20''} - u_{0'0''} \quad u_{30'} = u_{30''} - u_{0'0''}$$

$$W_1 = \frac{1}{T} \int (i_1 \cdot (u_{10''} - u_{0'0''})) dt \quad W_2 = \frac{1}{T} \int (i_2 \cdot (u_{20''} - u_{0'0''})) dt \quad W_3 = \frac{1}{T} \int (i_3 \cdot (u_{30''} - u_{0'0''})) dt$$

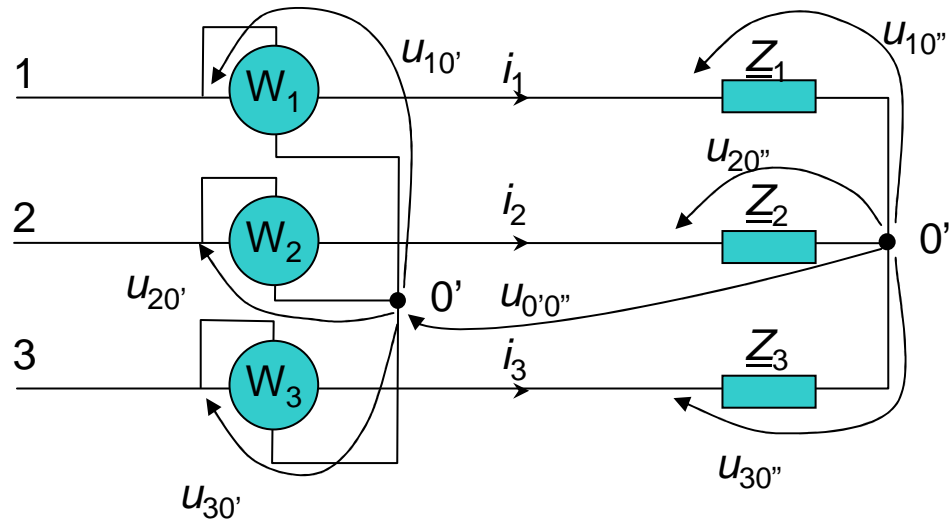
$$W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{T} \int ((i_1 \cdot (u_{10''} - u_{0'0''})) + (i_2 \cdot (u_{20''} - u_{0'0''})) + (i_3 \cdot (u_{30''} - u_{0'0''}))) dt =$$

$$\frac{1}{T} \int ((i_1 \cdot u_{10''} + i_2 \cdot u_{20''} + i_3 \cdot u_{30''}) - u_{0'0''} \cdot (i_1 + i_2 + i_3)) dt$$

$$(i_1 + i_2 + i_3) = 0 \Rightarrow W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{T} \int (i_1 \cdot u_{10''} + i_2 \cdot u_{20''} + i_3 \cdot u_{30''}) dt = P$$

## 7.9 MEDIDA DE POTENCIAS A 3 HILOS (5)

### CARGA DESEQUILIBRADA



$$P_{Z1} = \frac{1}{T} \int (i_1 \cdot u_{10''}) dt$$

$$P_{Z2} = \frac{1}{T} \int (i_2 \cdot u_{20''}) dt$$

$$P_{Z3} = \frac{1}{T} \int (i_3 \cdot u_{30''}) dt$$

$$P = P_{Z1} + P_{Z2} + P_{Z3} =$$

$$\frac{1}{T} \int (i_1 \cdot u_{10''} + i_2 \cdot u_{20''} + i_3 \cdot u_{30''}) dt$$

$$W_1 = \frac{1}{T} \int (i_1 \cdot u_{10'}) dt \quad W_2 = \frac{1}{T} \int (i_2 \cdot u_{20'}) dt \quad W_3 = \frac{1}{T} \int (i_3 \cdot u_{30'}) dt$$

$$u_{10'} = u_{10''} - u_{0'0''} \quad u_{20'} = u_{20''} - u_{0'0''} \quad u_{30'} = u_{30''} - u_{0'0''}$$

$$W_1 = \frac{1}{T} \int (i_1 \cdot (u_{10''} - u_{0'0''})) dt \quad W_2 = \frac{1}{T} \int (i_2 \cdot (u_{20''} - u_{0'0''})) dt \quad W_3 = \frac{1}{T} \int (i_3 \cdot (u_{30''} - u_{0'0''})) dt$$

$$W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{T} \int ((i_1 \cdot (u_{10''} - u_{0'0''})) + (i_2 \cdot (u_{20''} - u_{0'0''})) + (i_3 \cdot (u_{30''} - u_{0'0''}))) dt =$$

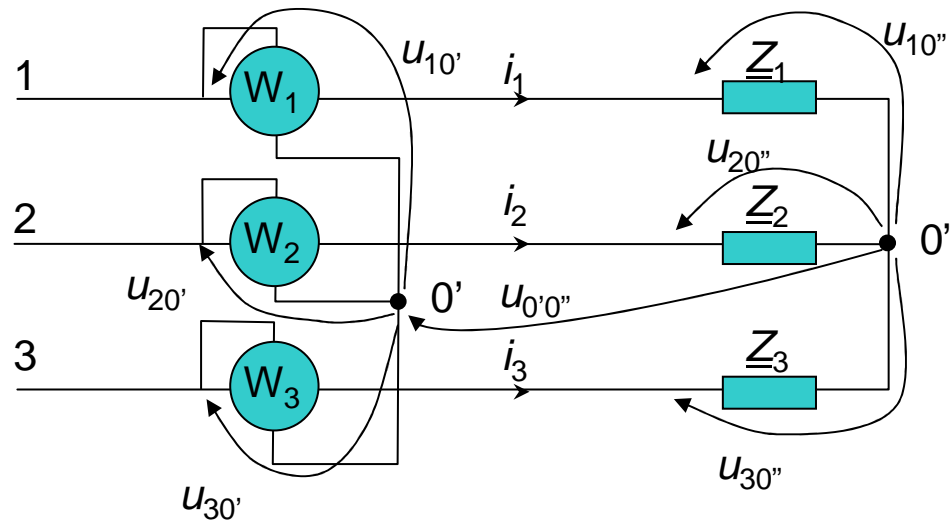
$$\frac{1}{T} \int ((i_1 \cdot u_{10''} + i_2 \cdot u_{20''} + i_3 \cdot u_{30''}) - u_{0'0''} \cdot (i_1 + i_2 + i_3)) dt$$

$$(i_1 + i_2 + i_3) = 0 \Rightarrow W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{T} \int (i_1 \cdot u_{10''} + i_2 \cdot u_{20''} + i_3 \cdot u_{30''}) dt = P$$

## 7.9 MEDIDA DE POTENCIAS A 3 HILOS (6)

### CARGA DESEQUILIBRADA

Vemos por tanto que al no haber considerado ninguna secuencia de fases este método de medida de potencias es valido para secuencia directa e inversa

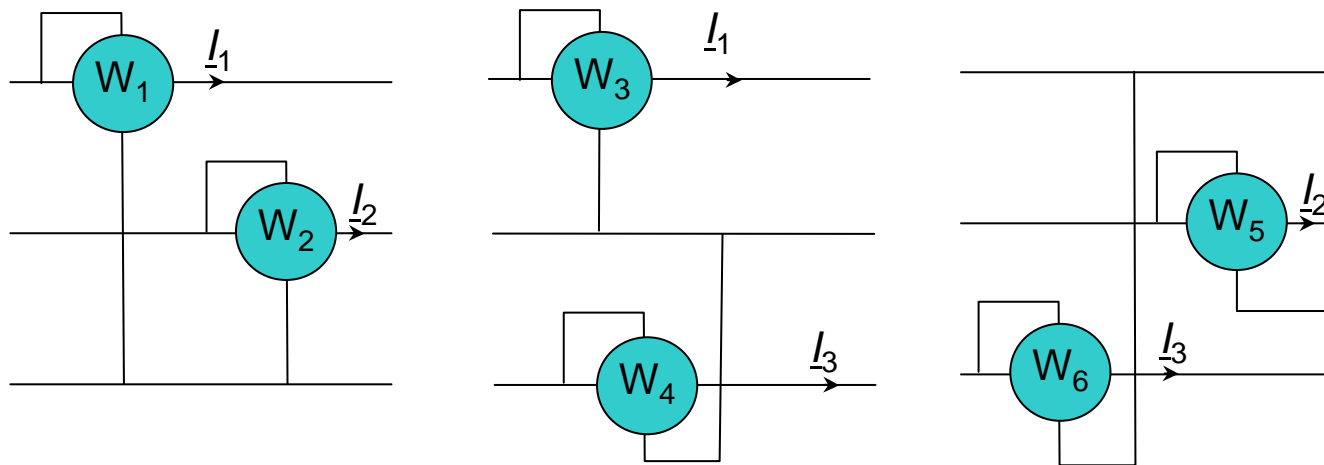


Además como finalmente el neutro de los vatímetros no interfiere en el resultado final podría estar a cualquier potencial luego podría puentearse con cualquiera de las fases, de esta forma el vatímetro que toma la corriente de esa fase marcaría cero y los otros dos vatímetros variarían su lectura de forma que su suma coincida con la de los tres vatímetros cuando el neutro de las bobinas voltimétricas estaba al aire. De esta forma se pasa de un sistema de medida con tres vatímetros a uno con dos vatímetros que nos permite medir potencia activa en cargas equilibradas y desequilibradas, y que llamaremos el método de Aron o de los dos vatímetros.

## 7.9 MEDIDA DE POTENCIAS A 3 HILOS (7)

### 7.9.1 MÉTODO DE ARON

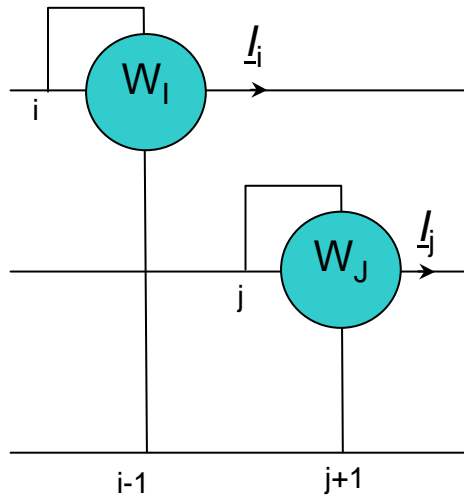
Este método sirve para medir potencia activa para cargas equilibradas y desequilibradas tanto para secuencia directa como para inversa, y para la medida de la potencia reactiva en los sistemas equilibrados y en ambas secuencias, la disposición de los vatímetros puede ser cualquiera de las figuras siguientes



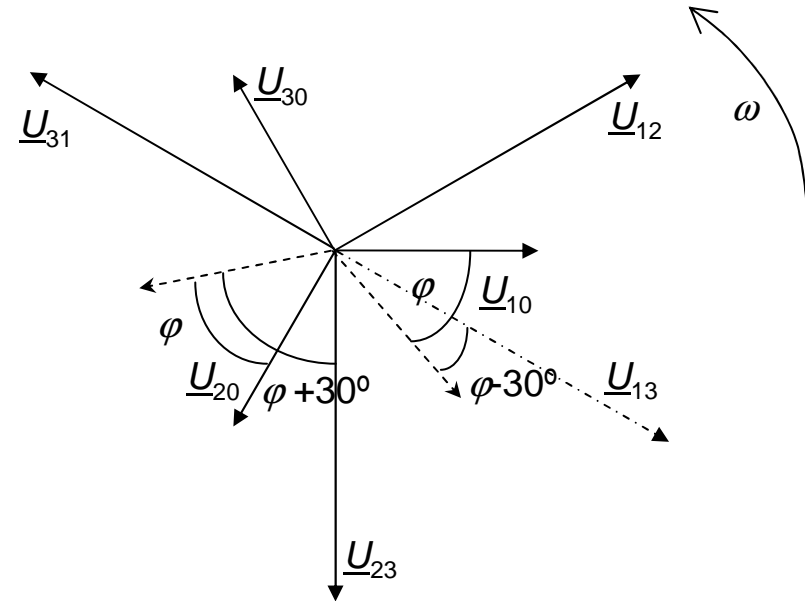
En todas ellas hay un vatímetro que toma la intensidad de la fase “i” y la tensión desde esta misma fase “i” hasta la fase “i-1”, a este vatímetro en el método de Aron le llamaremos vatímetro “1”, mientras que el otro vatímetro toma la intensidad de otra fase “j”= “i+1” y la tensión de la fase “j” hasta la fase “j+1” a este segundo vatímetro le llamaremos vatímetro “2”

7.9 MEDIDA DE POTENCIAS A 3 HILOS (8)  
7.9.1 MÉTODO DE ARON

Los resultados de las medidas de cada uno de los vatímetros en el caso de una carga equilibrada



S. D.



$$W_I = I_i \cdot U_{i,i-1} \cdot \cos\left(I_i \hat{U}_{i,i-1}\right) = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos\varphi \cdot \cos 30^\circ + \text{sen} 30^\circ \cdot \text{sen}\varphi) = W_1$$

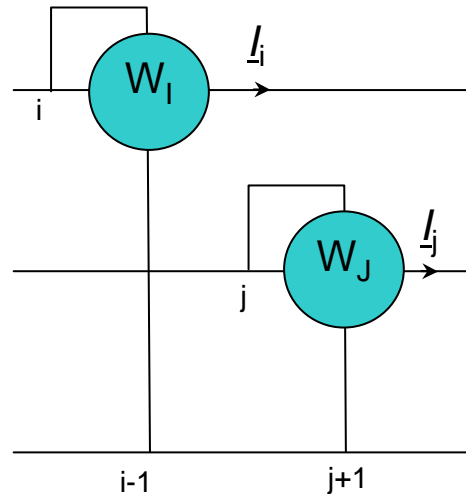
$$W_J = I_j \cdot U_{j,j+1} \cdot \cos\left(I_j \hat{U}_{j,j+1}\right) = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos\varphi \cdot \cos 30^\circ - \text{sen} 30^\circ \cdot \text{sen}\varphi) = W_2$$

$$W_1 + W_2 = 2 \cdot I_L \cdot U_C \cdot (\cos\varphi \cdot \cos 30^\circ) = 2 \cdot I_L \cdot U_C \cdot \cos\varphi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot I_L \cdot U_C \cdot \cos\varphi = P$$

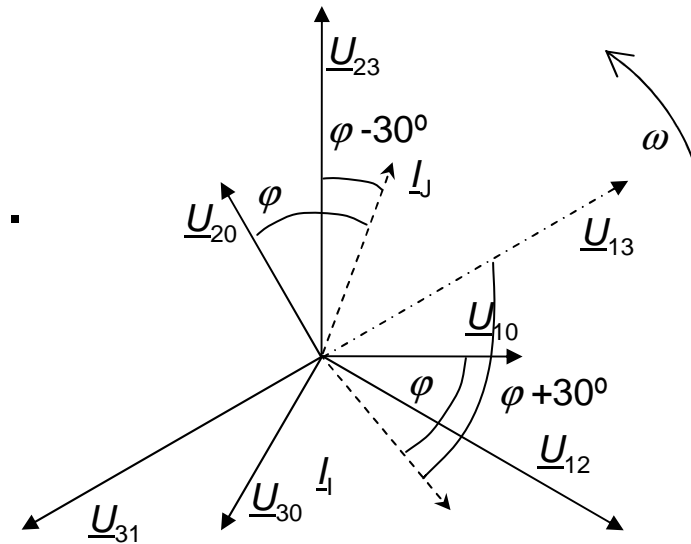
$$W_1 - W_2 = 2 \cdot I_L \cdot U_C \cdot (\text{sen} 30^\circ \cdot \text{sen}\varphi) = 2 \cdot I_L \cdot U_C \cdot \text{sen}\varphi \cdot \frac{1}{2} = I_L \cdot U_C \cdot \text{sen}\varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

7.9 MEDIDA DE POTENCIAS A 3 HILOS (9)  
7.9.1 MÉTODO DE ARON

Los resultados de las medidas de cada uno de los vatímetros en el caso de una carga equilibrada



S. I.



$$W_I = I_i \cdot U_{i,i-1} \cdot \cos\left(I_i \hat{U}_{i,i-1}\right) = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos\varphi \cdot \cos 30^\circ - \text{sen} 30^\circ \cdot \text{sen}\varphi) = W_2$$

$$W_J = I_j \cdot U_{j,j+1} \cdot \cos\left(I_j \hat{U}_{j,j+1}\right) = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos\varphi \cdot \cos 30^\circ + \text{sen} 30^\circ \cdot \text{sen}\varphi) = W_1$$

$$W_1 + W_2 = 2 \cdot I_L \cdot U_C \cdot (\cos\varphi \cdot \cos 30^\circ) = 2 \cdot I_L \cdot U_C \cdot \cos\varphi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot I_L \cdot U_C \cdot \cos\varphi = P$$

$$W_1 - W_2 = 2 \cdot I_L \cdot U_C \cdot (\text{sen} 30^\circ \cdot \text{sen}\varphi) = 2 \cdot I_L \cdot U_C \cdot \text{sen}\varphi \cdot \frac{1}{2} = I_L \cdot U_C \cdot \text{sen}\varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$



## 7.9 MEDIDA DE POTENCIAS A 3 HILOS (10)

### 7.9.1 MÉTODO DE ARON

Comportamiento de los vatímetros para distintos  $\varphi$  y distintas secuencias

Secuencia directa  $\varphi = 0^\circ$  carga resistiva pura

$$W_I = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} I_L \cdot U_C$$

$$\Rightarrow W_I = W_J > 0$$

$$W_J = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} I_L \cdot U_C$$

Secuencia directa  $\varphi = 30^\circ$  inductivos

$$W_I = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos 0^\circ) = I_L \cdot U_C$$

$$\Rightarrow W_I = 2W_J > 0$$

$$W_J = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos 60^\circ) = \frac{1}{2} I_L \cdot U_C$$

Secuencia directa  $\varphi = 60^\circ$  inductivos

$$W_I = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} I_L \cdot U_C$$

$$\Rightarrow W_I > 0 = W_J$$

$$W_J = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos 90^\circ) = 0$$

7.9 MEDIDA DE POTENCIAS A 3 HILOS (11)  
7.9.1 MÉTODO DE ARON

Comportamiento de los vatímetros para distintos  $\varphi$  y distintas secuencias

Secuencia directa  $60^\circ < \varphi < 90^\circ$  inductivos (por ejemplo  $75^\circ$ )

$$W_I = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos 45^\circ) > 0$$
$$\Rightarrow W_I > 0 > W_J$$

$$W_J = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos 105^\circ) < 0$$

Secuencia directa  $\varphi = 90^\circ$  inductivos

$$W_I = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos 60^\circ) = \frac{1}{2} I_L \cdot U_C$$
$$\Rightarrow \begin{aligned} W_I &= -W_J \\ W_I &> 0 > W_J \end{aligned}$$

$$W_J = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos 120^\circ) = -\frac{1}{2} I_L \cdot U_C$$

## 7.9 MEDIDA DE POTENCIAS A 3 HILOS (12)

### 7.9.1 MÉTODO DE ARON

Comportamiento de los vatímetros para distintos  $\varphi$  y distintas secuencias

Secuencia directa  $\varphi = -30^\circ$  capacitivos

$$W_I = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos - 60^\circ) = \frac{1}{2} I_L \cdot U_C$$

$$\Rightarrow W_J = 2W_I > 0$$

$$W_J = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos 0^\circ) = I_L \cdot U_C$$

Secuencia directa  $\varphi = -60^\circ$  capacitivos

$$W_I = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos - 90^\circ) = 0$$

$$\Rightarrow W_J > 0 = W_I$$

$$W_J = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} I_L \cdot U_C$$

## 7.9 MEDIDA DE POTENCIAS A 3 HILOS (13)

### 7.9.1 MÉTODO DE ARON

Comportamiento de los vatímetros para distintos  $\varphi$  y distintas secuencias

Secuencia directa  $-60^\circ > \varphi > -90^\circ$  capacitivos (por ejemplo  $75^\circ$ )

$$W_I = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos -105^\circ) < 0$$

$$\Rightarrow W_J > 0 > W_I$$

$$W_J = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos 45^\circ) > 0$$

Secuencia directa  $\varphi = -90^\circ$  capacitivos

$$W_I = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos -120^\circ) = -\frac{1}{2} I_L \cdot U_C$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} W_J &= -W_I \\ W_J &> 0 > W_I \end{aligned}$$

$$W_J = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos -60^\circ) = \frac{1}{2} I_L \cdot U_C$$

## 7.9 MEDIDA DE POTENCIAS A 3 HILOS (14)

### 7.9.1 MÉTODO DE ARON

Comportamiento de los vatímetros para distintos  $\varphi$  y distintas secuencias

Secuencia inversa  $\varphi = 0^\circ$  carga resistiva pura

$$W_I = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} I_L \cdot U_C \quad \Rightarrow \quad W_I = W_J > 0$$
$$W_J = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} I_L \cdot U_C$$

Secuencia inversa  $\varphi = 30^\circ$  inductivos

$$W_I = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos 60^\circ) = \frac{1}{2} I_L \cdot U_C \quad \Rightarrow \quad W_J = 2W_I > 0$$
$$W_J = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos 0^\circ) = I_L \cdot U_C$$

Secuencia inversa  $\varphi = 60^\circ$  inductivos

$$W_I = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos 90^\circ) = 0$$
$$W_J = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} I_L \cdot U_C \quad \Rightarrow \quad W_J > 0 = W_I$$

7.9 MEDIDA DE POTENCIAS A 3 HILOS (15)  
7.9.1 MÉTODO DE ARON

Comportamiento de los vatímetros para distintos  $\varphi$  y distintas secuencias

Secuencia inversa  $60^\circ < \varphi < 90^\circ$  inductivos (por ejemplo  $75^\circ$ )

$$\begin{aligned} W_I &= I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos 105^\circ) < 0 \\ W_J &= I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos 45^\circ) > 0 \end{aligned} \Rightarrow W_J > 0 > W_I$$

Secuencia inversa  $\varphi = 90^\circ$  inductivos

$$\begin{aligned} W_I &= I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos 120^\circ) = -\frac{1}{2} I_L \cdot U_C \\ W_J &= I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos 60^\circ) = \frac{1}{2} I_L \cdot U_C \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} W_J &= -W_I \\ W_J &> 0 > W_I \end{aligned}$$

7.9 MEDIDA DE POTENCIAS A 3 HILOS (16)  
7.9.1 MÉTODO DE ARON

Comportamiento de los vatímetros para distintos  $\varphi$  y distintas secuencias

Secuencia inversa  $\varphi = -30^\circ$  capacitivos

$$W_I = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos 0^\circ) = I_L \cdot U_C$$

$$\Rightarrow W_I = 2W_J > 0$$

$$W_J = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos - 60^\circ) = \frac{1}{2} I_L \cdot U_C$$

Secuencia inversa  $\varphi = -60^\circ$  capacitivos

$$W_I = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} I_L \cdot U_C$$

$$\Rightarrow W_I > 0 = W_J$$

$$W_J = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos - 90^\circ) = 0$$

7.9 MEDIDA DE POTENCIAS A 3 HILOS (17)  
7.9.1 MÉTODO DE ARON

Comportamiento de los vatímetros para distintos  $\varphi$  y distintas secuencias

Secuencia inversa  $-60^\circ > \varphi > -90^\circ$  capacitivos

$$W_I = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos - 45^\circ) > 0$$
$$\Rightarrow W_I > 0 > W_J$$

$$W_J = I_L \cdot U_C \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = I_L \cdot U_C \cdot (\cos - 105^\circ) < 0$$

Secuencia inversa  $\varphi = -90^\circ$  capacitivos

$$W_I = I_L \cdot U_K \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = I_L \cdot U_K \cdot (\cos - 60^\circ) = \frac{1}{2} I_L \cdot U_K$$
$$\Rightarrow \begin{aligned} W_I &= -W_J \\ W_I &> 0 > W_J \end{aligned}$$
$$W_J = I_L \cdot U_K \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = I_L \cdot U_K \cdot (\cos - 120^\circ) = -\frac{1}{2} I_L \cdot U_K$$



## 7.9 MEDIDA DE POTENCIAS A 3 HILOS (18)

### 7.9.1 MÉTODO DE ARON

Conociendo dos de los tres datos siguientes podríamos conocer el tercero, los datos son: Carácter de la carga, lecturas de los vatímetros y secuencia del sistema trifásico

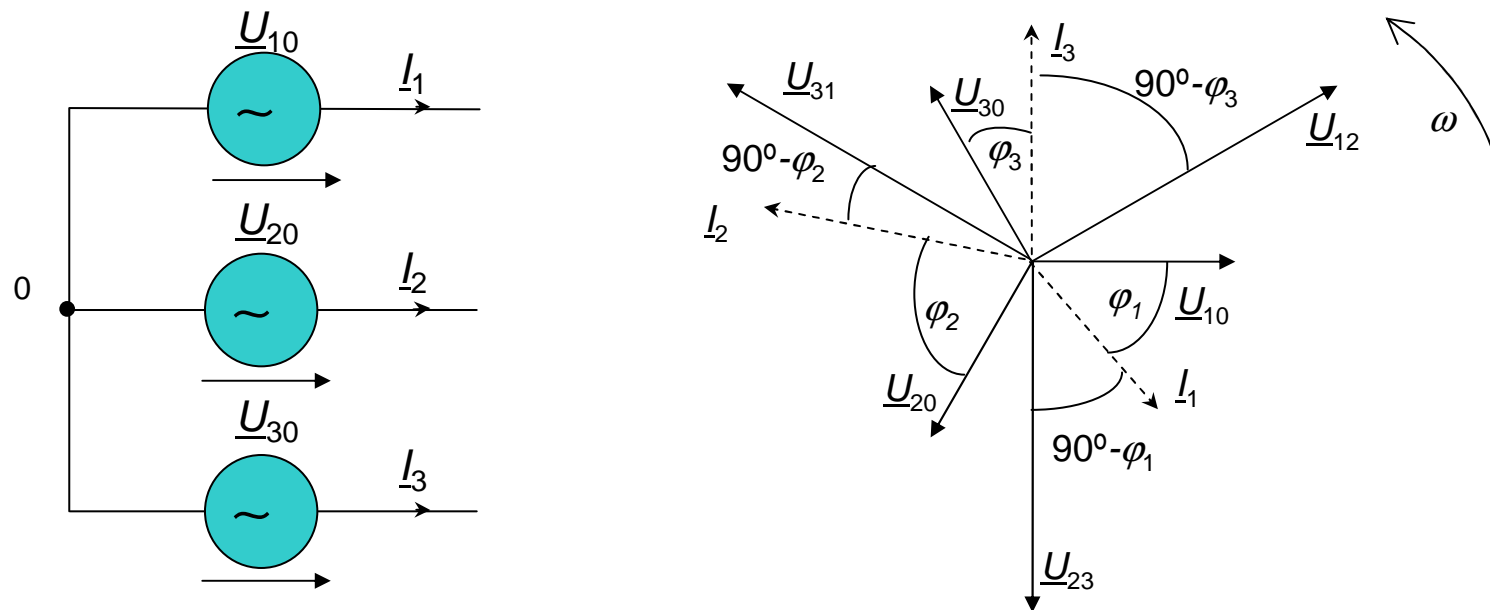
**S.D.**

**S.I.**

$\varphi$	$W_I = I_L \cdot U_K \cdot \cos(\varphi - 30^\circ)$ $W_J = I_L \cdot U_K \cdot \cos(\varphi + 30^\circ)$	$W_I = I_L \cdot U_K \cdot \cos(\varphi + 30^\circ)$ $W_J = I_L \cdot U_K \cdot \cos(\varphi - 30^\circ)$
$\varphi = 0^\circ$	$W_I = W_J > 0$	$W_I = W_J > 0$
$\varphi = 30^\circ$	$W_I = 2W_J > 0$	$W_J = 2W_I > 0$
$\varphi = 60^\circ$	$W_I > 0 = W_J$	$W_J > 0 = W_I$
$60^\circ < \varphi < 90^\circ$	$W_I > 0 > W_J$	$W_J > 0 > W_I$
$\varphi = 90^\circ$	$W_I = -W_J$ $W_I > 0 > W_J$	$W_J = -W_I$ $W_J > 0 > W_I$
$\varphi = -30^\circ$	$W_J = 2W_I > 0$	$W_I = 2W_J > 0$
$\varphi = -60^\circ$	$W_J > 0 = W_I$	$W_I > 0 = W_J$
$-60^\circ < \varphi < -90^\circ$	$W_J > 0 > W_I$	$W_I > 0 > W_J$
$\varphi = -90^\circ$	$W_J = -W_I$ $W_J > 0 > W_I$	$W_I = -W_J$ $W_I > 0 > W_J$

## 7.10 MEDIDA DE POTENCIA REACTIVA CARGAS DESEQUILIBRADAS (1)

Por ser las cargas desequilibradas no es posible valorar la potencia reactiva que llega a las mismas, por tanto para poder cuantificarla vamos a cuantificarla en un generador trifásico considerado conectado en estrella a tres hilos

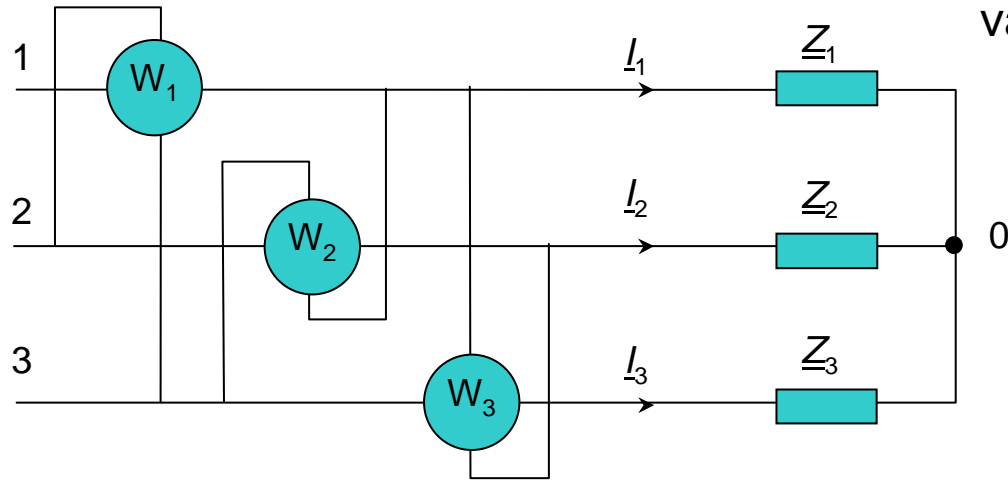


$$Q_1 = I_1 \cdot U_{10} \cdot \text{sen}\left(\angle \underline{I}_1 \hat{\underline{U}}_{10}\right) \quad Q_2 = I_2 \cdot U_{20} \cdot \text{sen}\left(\angle \underline{I}_2 \hat{\underline{U}}_{20}\right) \quad Q_3 = I_3 \cdot U_{30} \cdot \text{sen}\left(\angle \underline{I}_3 \hat{\underline{U}}_{30}\right)$$

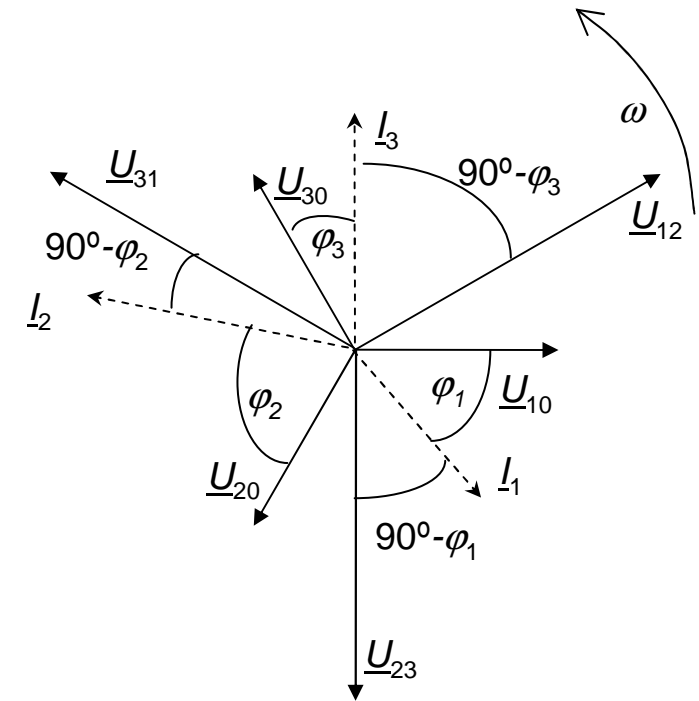
$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = I_1 \cdot U_{10} \cdot \text{sen}\left(\angle \underline{I}_1 \hat{\underline{U}}_{10}\right) + I_2 \cdot U_{20} \cdot \text{sen}\left(\angle \underline{I}_2 \hat{\underline{U}}_{20}\right) + I_3 \cdot U_{30} \cdot \text{sen}\left(\angle \underline{I}_3 \hat{\underline{U}}_{30}\right) =$$

$$I_1 \cdot U_s \cdot \text{sen}(\varphi_1) + I_2 \cdot U_s \cdot \text{sen}(\varphi_2) + I_3 \cdot U_s \cdot \text{sen}(\varphi_3) \Rightarrow Q = U_s \cdot (I_1 \cdot \text{sen}(\varphi_1) + I_2 \cdot \text{sen}(\varphi_2) + I_3 \cdot \text{sen}(\varphi_3))$$

## 7.10 MEDIDA DE POTENCIA REACTIVA CARGAS DESEQUILIBRADAS (2)



Si estudiamos las lecturas de los vatímetros monofásicos



$$W_1 = I_1 \cdot U_{23} \cdot \cos(\angle \underline{I}_1 \hat{\underline{U}}_{23}) = I_1 \cdot U_K \cdot \cos(90^\circ - \varphi_1) = I_1 \cdot U_K \cdot \sin(\varphi_1)$$

$$W_2 = I_2 \cdot U_{31} \cdot \cos(\angle \underline{I}_2 \hat{\underline{U}}_{31}) = I_2 \cdot U_K \cdot \cos(90^\circ - \varphi_2) = I_2 \cdot U_K \cdot \sin(\varphi_2)$$

$$W_3 = I_3 \cdot U_{12} \cdot \cos(\angle \underline{I}_3 \hat{\underline{U}}_{12}) = I_3 \cdot U_K \cdot \cos(90^\circ - \varphi_3) = I_3 \cdot U_K \cdot \sin(\varphi_3)$$

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 + W_3 &= I_1 \cdot U_K \cdot \sin(\varphi_1) + I_2 \cdot U_K \cdot \sin(\varphi_2) + I_3 \cdot U_K \cdot \sin(\varphi_3) = \\ &U_K \cdot (I_1 \cdot \sin(\varphi_1) + I_2 \cdot \sin(\varphi_2) + I_3 \cdot \sin(\varphi_3)) = \\ &\sqrt{3}U_S \cdot (I_1 \cdot \sin(\varphi_1) + I_2 \cdot \sin(\varphi_2) + I_3 \cdot \sin(\varphi_3)) \end{aligned}$$

$$W_1 + W_2 + W_3 = \sqrt{3}U_S \cdot (I_1 \cdot \sin(\varphi_1) + I_2 \cdot \sin(\varphi_2) + I_3 \cdot \sin(\varphi_3))$$

## 7.10 MEDIDA DE POTENCIA REACTIVA CARGAS DESEQUILIBRADAS (3)

Por tanto tenemos que:

$$Q = U_s \cdot (I_1 \cdot \text{sen}(\varphi_1) + I_2 \cdot \text{sen}(\varphi_2) + I_3 \cdot \text{sen}(\varphi_3))$$

Por lo que se puede decir que:

$$W_1 + W_2 + W_3 = \sqrt{3}U_s \cdot (I_1 \cdot \text{sen}(\varphi_1) + I_2 \cdot \text{sen}(\varphi_2) + I_3 \cdot \text{sen}(\varphi_3)) = \sqrt{3} \cdot Q \Rightarrow$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} (W_1 + W_2 + W_3)$$

Y además podemos medir potencia reactiva mediante vatímetros monofásicos.

Si, por otra parte, la carga fuese equilibrada, entonces se cumpliría que :

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}_3 = \underline{I}_L \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$$

$$W_1 = W_2 = W_3 = I_L \cdot U_C \cdot \cos(90^\circ - \varphi) = I_L \cdot U_C \cdot \text{sen}(\varphi)$$

$$Q = \sqrt{3}I_L \cdot U_C \cdot \text{sen}(\varphi) = \sqrt{3}W_1 = \sqrt{3}W_2 = \sqrt{3}W_3$$

Por tanto con instalar uno solo de los vatímetros podríamos haber medido la potencia reactiva.

## 7.11 BIBLIOGRAFIA

- V.M. Parra Prieto y otros, Teoría de Circuitos, Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid 1990. Tema XXI, XXII y XXIII.
- E. Alfaro Segovia, Teoría de Circuitos y Electrometría. El autor, Madrid 1970. Capitulo VIII, lecciones 20, 21, 22 y 23.
- Z. Aginako y otros, Zirkuituen Teoriako 100 Ariketa, Elhuyar, Usurbil 2006. 6. atala.
- J.A. Edminister, M. Nahvi, Circuitos Eléctricos (Problemas resueltos) McGraw Hill, Madrid 1997. Capítulo 11.
- A. Gómez Expósito, J.A. Olivera, Problemas resueltos de Teoría de Circuitos, Paraninfo, Madrid 1990. Capitulo 6.
- A. Gómez Expósito y otros, Teoría de Circuitos, Ejercicios de autoevaluación, Thomson, Madrid 2005. Capítulo 5.
- J.L: Azurmendi y otros, Practicas de Electricidad y Circuitos, Centro de publicaciones de la EUITI de Bilbao, Bilbao 1985. Capitulo 5.
- P. Sánchez Barrios y otros, Teoría de Circuitos, Pearson Educación, Madrid 2007. Capitulo 3.