Tema 6: ANALISIS DE CIRCUITOS EN REGIMEN PERMANENTE

6.0 OBJETIVOS

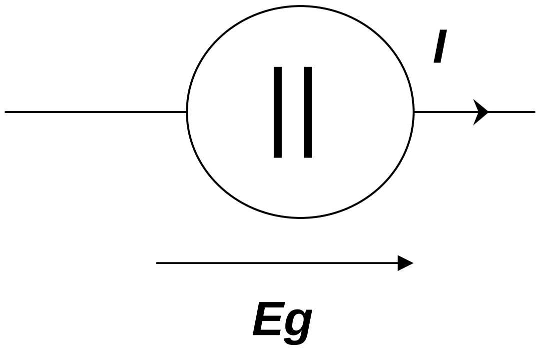
- Saber porqué en la actualidad no se genera corriente continua de forma directa.
- Conocer la respuesta de los elementos almacenadotes frente a la corriente continua.
- Entender la importancia de las corrientes alternas y sinusoidales.
- Saber transformar funciones sinusoidales del dominio del tiempo al de la frecuencia y viceversa.
- Entender el concepto de fasor.
- Aprender la notación de Kenelly y su correcta interpretación.
- Apreciar el concepto de inmitancia frecuencial.

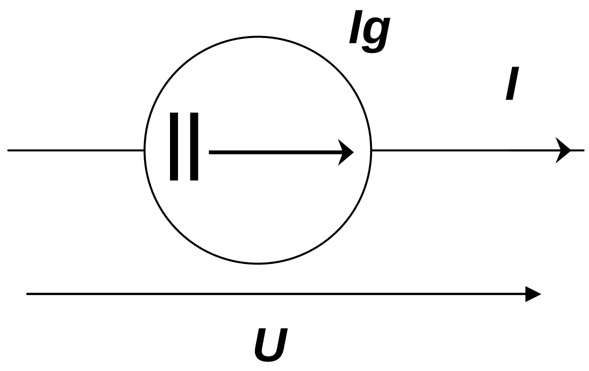
6.1 CIRCUITOS EN CORRIENTE CONTINUA (C.C.) (1)
6.1.1 POTENCIA Y RENDIMIENTO DE FUENTES EN CORRIENTE CONTINUA

CONSIDERAMOS QUE UN CIRCUITO ESTA ALIMENTADO EN C.C.. CUANDO:

- EN SU CONFIGURACIÓN COMO FUENTE DE TENSIÓN LA TENSIÓN EN LAS FUENTES TIENE UN VALOR MEDIO CONSTANTE A LO LARGO DEL TIEMPO
- EN SU CONFIGURACIÓN COMO FUENTE DE CORRIENTE, LA CORRIENTE EN LAS FUENTES ES LA QUE LO CUMPLE

EN ESTOS CASOS SE DICE QUE LA CORRIENTE O LA TENSIÓN TIENEN UN VALOR CONSTANTE IGUAL AL VALOR MEDIO Y POR GENERALIZACIÓN SE CONSIDERA QUE LA FORMA GRAFICA DE LAS MISMAS ES UN RECTA PARALELA AL ORIGEN DE TIEMPOS

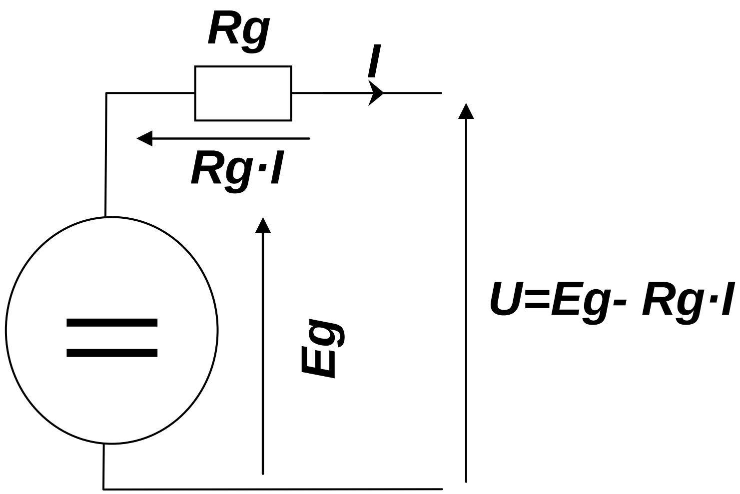




$$P = E_g \cdot I$$
$$P < 0 \Rightarrow RECEPTOR$$
$$P > 0 \Rightarrow GENERADOR$$

$$P = I_g \cdot U$$
$$P < 0 \Rightarrow RECEPTOR$$
$$P > 0 \Rightarrow GENERADOR$$

6.1.1 POTENCIA Y RENDIMIENTO DE FUENTES EN CORRIENTE CONTINUA



$$P = U \cdot I = (E_g - R_g \cdot I) \cdot I =$$
$$E_g \cdot I - R_g \cdot I^2 = P_{GENERADA} - P_{DISIPADA}$$
$$P < 0 \Rightarrow RECEPTOR$$
$$P > 0 \Rightarrow GENERADOR$$

RENDIMIENTO

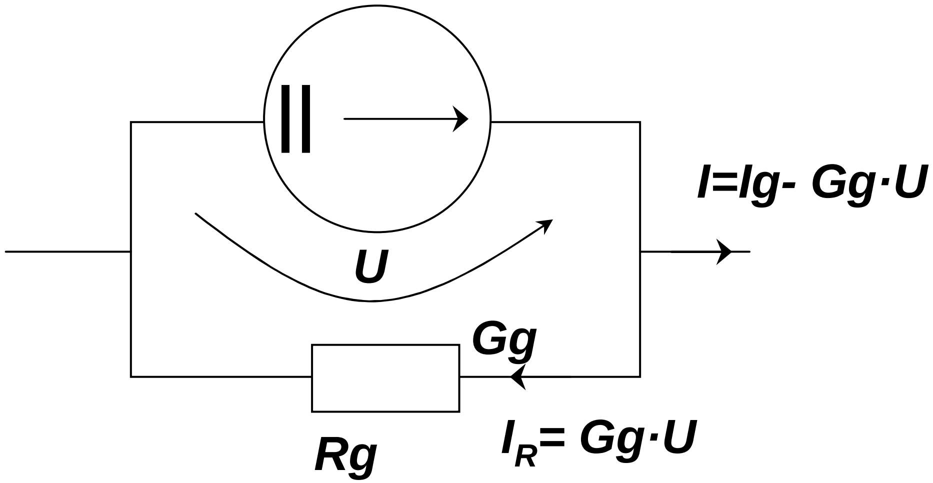
GENERADOR

$$\eta\% = \frac{P}{P_{GENERADA}} = \frac{(E_g - R_g \cdot I) \cdot I}{E_g \cdot I} = \frac{E_g \cdot I - R_g \cdot I^2}{E_g \cdot I} = \frac{E_g - R_g \cdot I}{E_g}$$

RECEPTOR

$$\eta\% = \frac{P_{ENTREGADA}}{P_{ABSORBIDA}} = \frac{E_g \cdot I}{(E_g + R_g \cdot I) \cdot I} = \frac{E_g \cdot I}{E_g \cdot I + R_g \cdot I^2} = \frac{E_g}{E_g + R_g \cdot I}$$

6.1.1 POTENCIA Y RENDIMIENTO DE FUENTES EN CORRIENTE CONTINUA



$$P = U \cdot I = (I_g - G_g \cdot U) \cdot U =$$
$$I_g \cdot U - G_g \cdot U^2 = P_{GENERADA} - P_{DISIPADA}$$
$$P < 0 \Rightarrow RECEPTOR$$
$$P > 0 \Rightarrow GENERADOR$$

RENDIMIENTO

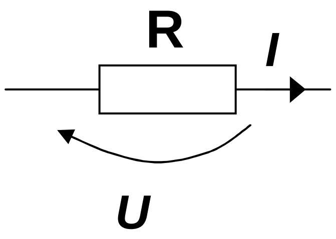
GENERADOR

$$\eta\% = \frac{P}{P_{GENERADA}} = \frac{(I_g - G_g \cdot U) \cdot U}{I_g \cdot U} = \frac{I_g \cdot U - G_g \cdot U^2}{I_g \cdot U} = \frac{I_g - G_g \cdot U}{I_g}$$

RECEPTOR

$$\eta\% = \frac{P_{ENTREGADA}}{P_{ABSORBIDA}} = \frac{I_g \cdot U}{(I_g + G_g \cdot U) \cdot U} = \frac{I_g \cdot U}{I_g \cdot U + G_g \cdot U^2} = \frac{I_g}{I_g + G_g \cdot U}$$

6.1 CIRCUITOS EN CORRIENTE CONTINUA (C.C.) (4)
6.1.2 COMPORTAMIENTO DE LOS ELEMENTO PASIVOS BÁSICOS

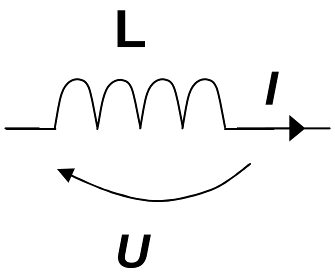


$$U = \mathrm{R} \cdot I$$

$$I = \frac{1}{\mathrm{R}} \cdot U = \mathrm{G} \cdot U$$

$$P = U \cdot I = \mathrm{R} \cdot I^2 = \mathrm{G} \cdot U^2$$

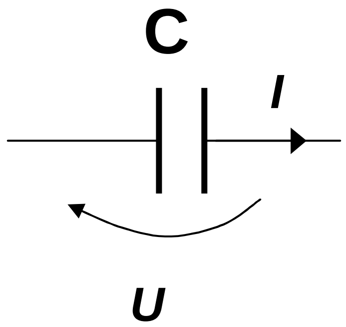
$$P > 0 \quad \text{Siempre}$$



$$U = \mathrm{L} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$P = 0$$

$$W = \tfrac{1}{2} \mathrm{L} \cdot I^2$$



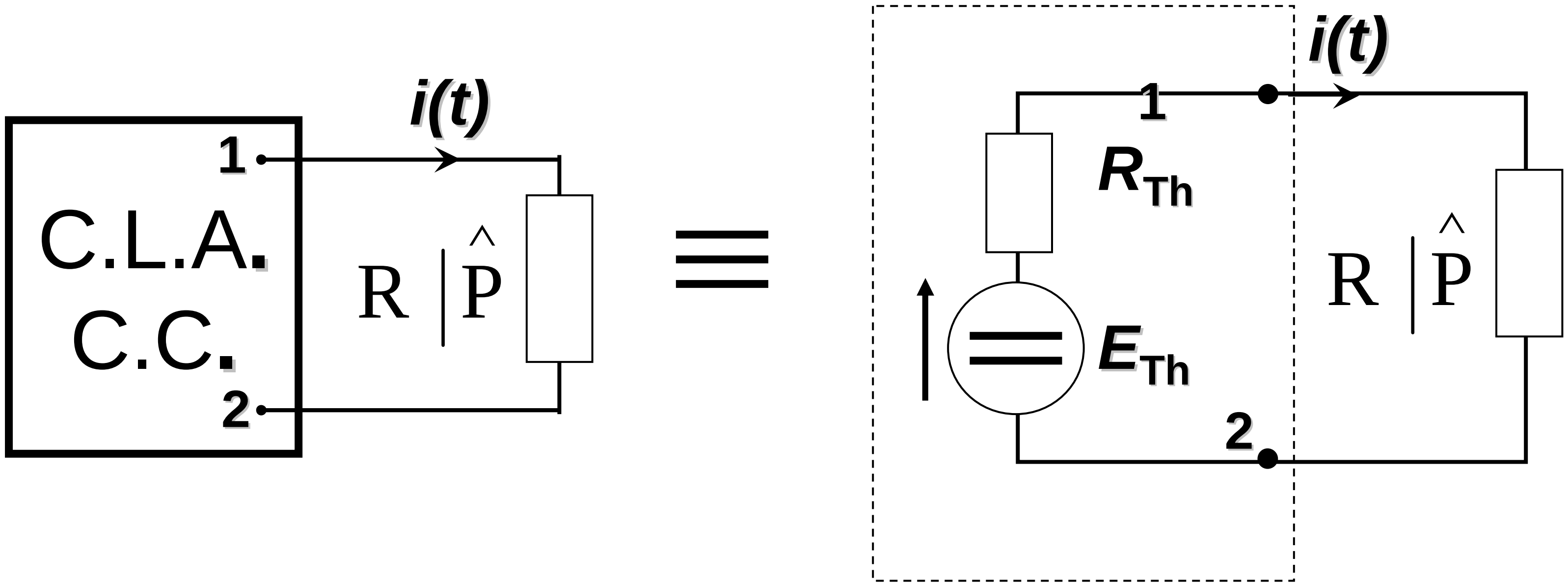
$$I = \mathrm{C} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$P = 0$$

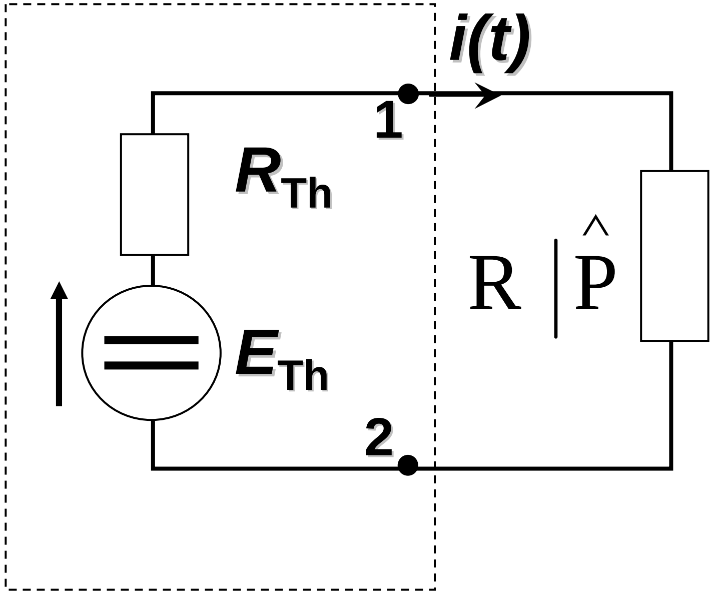
$$W = \tfrac{1}{2} \mathrm{C} \cdot U^2$$

Teorema de la máxima transferencia de potencia en C.C.:

Dado un dipolo lineal y activo, mediante este teorema se trata de determinar el valor de la carga sobre la que se transfiere máxima potencia. Para facilitar los cálculos, como paso previo vamos a sustituir el dipolo lineal y activo por su equivalente de Thévenin, para a partir del mismo determinar el valor de "R" sobre la que se disipará máxima potencia.



6.1.3. TEOREMA DE LA MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA EN C.C.



$$P = R \cdot I^2$$

$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R}$$

$$\Rightarrow P = R \cdot \left(\frac{E_{Th}}{R_{Th} + R} \right)^2 = E_{Th}^{\ 2} \cdot \frac{R}{(R_{Th} + R)^2}$$

P será máxima cuando : $\dfrac{dP}{dR} = 0$

$$\frac{dP}{dR} = E_{Th}^{\ 2} \cdot \frac{(R_{Th} + R)^2 - 2 \cdot R \cdot (R_{Th} + R)}{(R_{Th} + R)^4} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{c} (R_{Th} + R) = \infty \\ (R_{Th} + R)^2 - 2 \cdot R \cdot (R_{Th} + R) = 0 \end{array}$$

$$(R_{Th} + R)^2 - 2 \cdot R \cdot (R_{Th} + R) = 0 = R_{Th}^{\ 2} + 2 \cdot R \cdot R_{Th} + R^2 - 2 \cdot R \cdot R_{Th} - 2R^2 = R_{Th}^{\ 2} - R^2 \Rightarrow$$

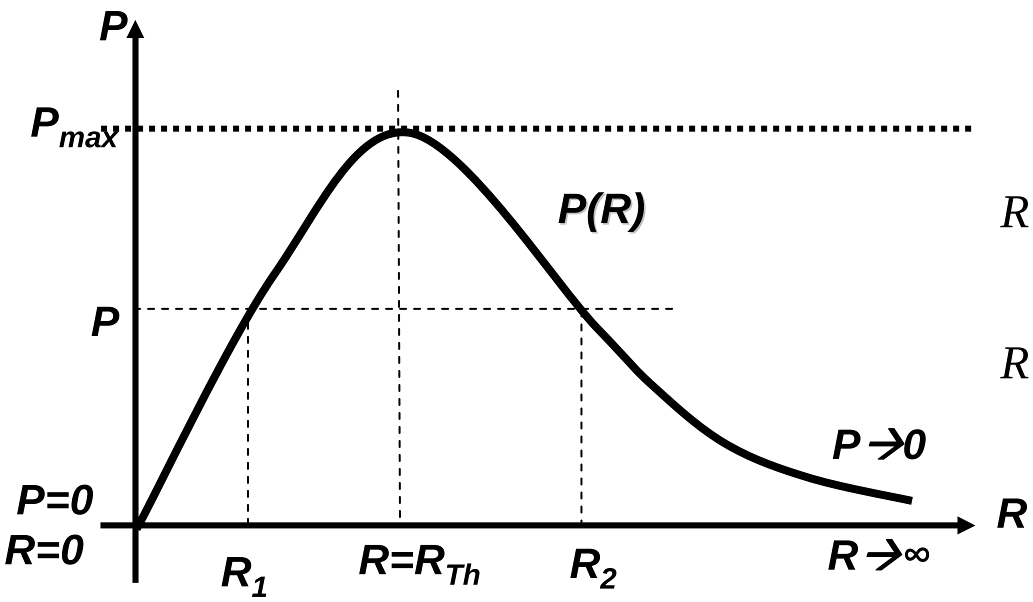
$$R_{Th}^{\ 2} - R^2 = 0 \Leftrightarrow R_{Th} = R$$

Este es el valor de R sobre el que se transfiere máxima potencia, y el valor de dicha potencia será :

$$\hat{P} = E_{Th}^{\ 2} \cdot \frac{R}{(R_{Th} + R)^2} = E_{Th}^{\ 2} \cdot \frac{R_{Th}}{(R_{Th} + R_{Th})^2} = E_{Th}^{\ 2} \cdot \frac{R_{Th}}{(2R_{Th})^2} = E_{Th}^{\ 2} \cdot \frac{R_{Th}}{4R_{Th}^{\ 2}} = \frac{E_{Th}^{\ 2}}{4R_{Th}}$$

En la representación gráfica de *P(R)* se observa que:

- Valores mayores que el máximo no se obtienen con ninguna resistencia
- El valor máximo solo se consigue para $R = R_{Th}$
- Los restantes valores se pueden conseguir para valores de resistencia que cumplan $R < R_{Th} < R$

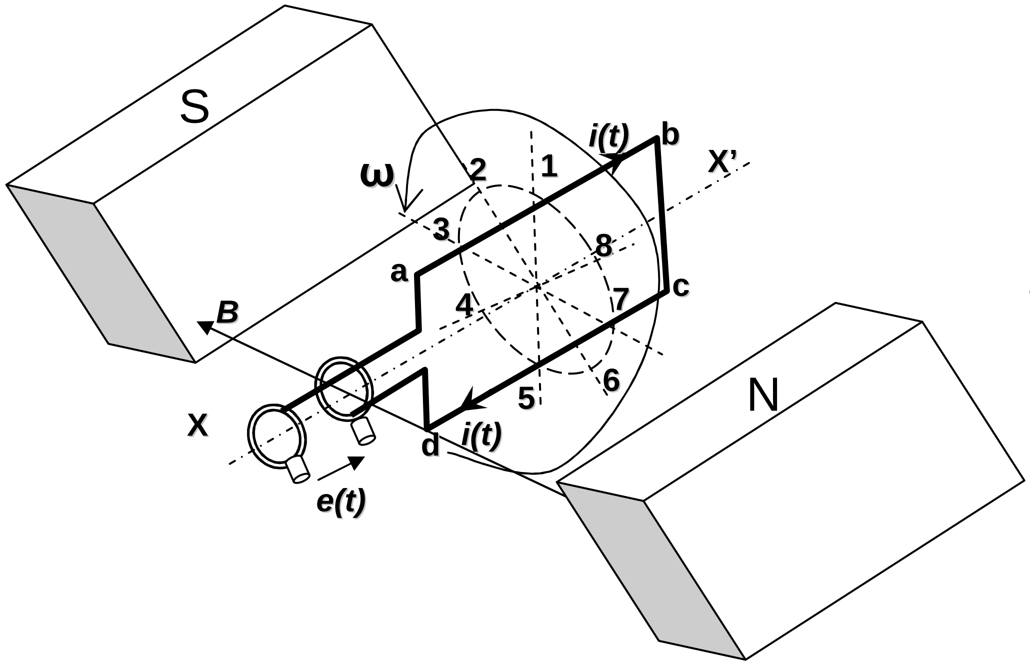


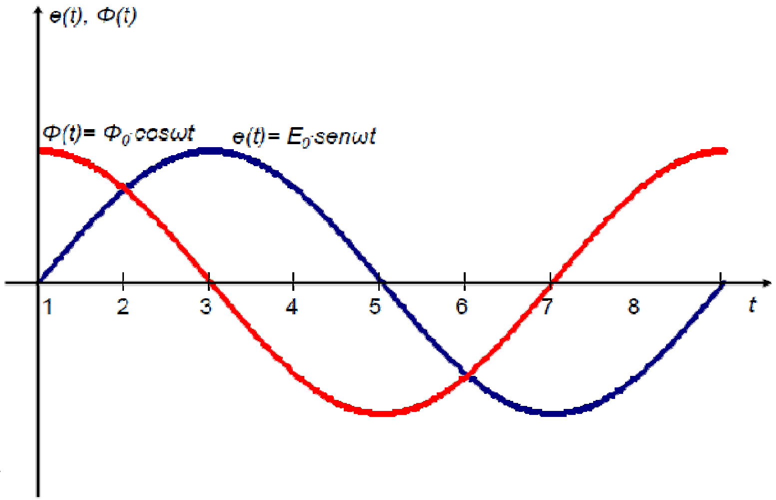
$$R = 0 \Rightarrow I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + 0} \Rightarrow P = 0 \cdot \left(\frac{E_{Th}}{R_{Th} + 0} \right)^2 = 0$$

$$R = \infty \Rightarrow I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + \infty} \to 0 \Rightarrow P \to= 0$$

6.2.1 ALTERNADOR ELEMENTAL

Alternador elemental, suponemos una espira de bobina girando con velocidad angular ω en el interior de un campo magnetico ⊥ a su eje y atravesada por un flujo $\Phi(t) = \beta \cdot S \cdot \cos \omega t = \Phi_0 \cdot \cos \omega t$,





Por aplicación de la ley de faraday, en bornes de la espira aparecera una fuerza electromotriz de valor:

$$e(t) = \frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} = -B \cdot \mathrm{S} \cdot \omega \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t) = E_0 \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t)$$

Si en lugar de una sola espira fueran n espiras girando con una velocidad angular uniforme (ω) la expresión del flujo pasa a ser:

$\Phi(t) = \mathrm{N} \cdot \beta \cdot S \cdot \cos(\omega t)$

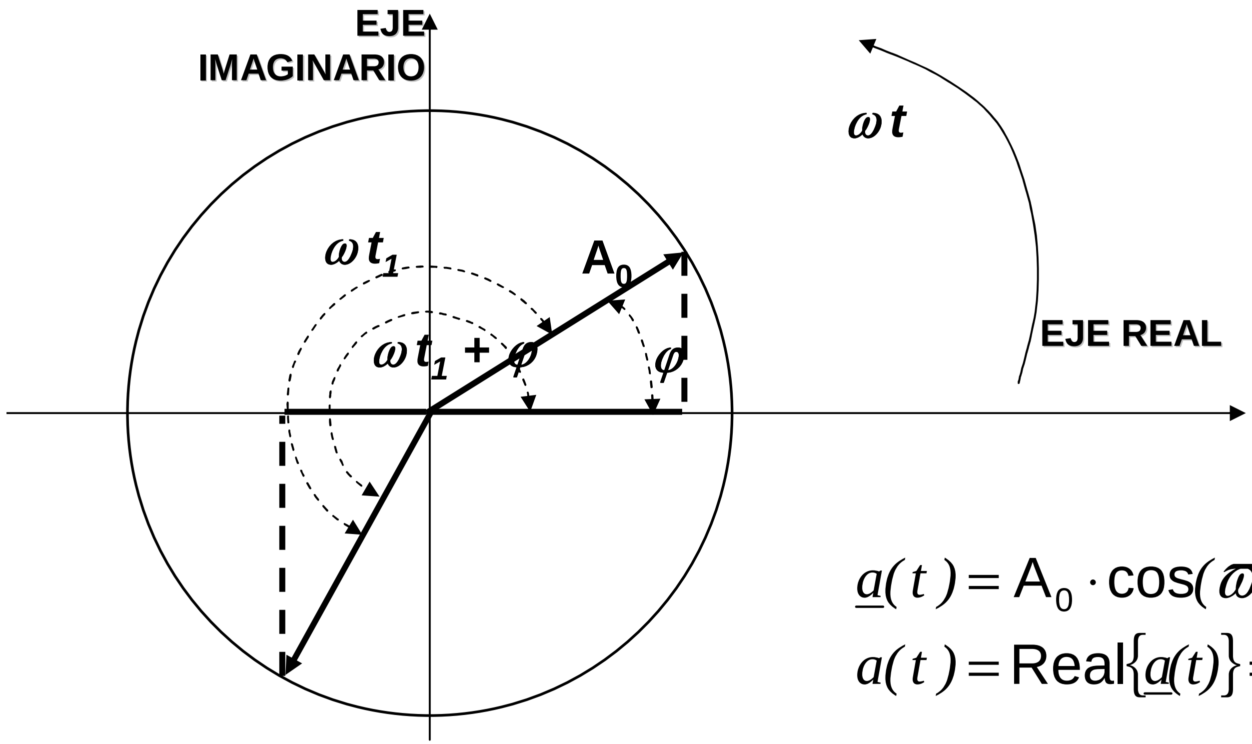
$$e(t) = \frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{N} \cdot B \cdot \mathrm{S} \cdot \omega \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t) = E_0 \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t)$$

Teniendo en cuenta que el valor eficaz de una funcion sinusoidal

$$a(t) = A_0 \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

viene dado como $A = A_0/\sqrt{2} \Rightarrow a(t) = A\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

esta función se puede representar en el plano complejo como un vector ($\underline{A}$) de modulo A_0 que gira en el sentido opuesto a las agujas del reloj con velocidad angular ω idéntica a la de la pulsación angular de la función sinusoidal y que para t = 0 ocupa la posición definida por el ángulo ϕ (respecto al eje real)



$$\underline{a}(t) = A_0 \cdot \cos(\varpi t + \varphi) + jA_0 \cdot \mathrm{sen}(\varpi t + \varphi)$$

$$a(t) = \mathrm{Real}\{\underline{a}(t)\} = A_0 \cdot \cos(\varpi t + \varphi)$$

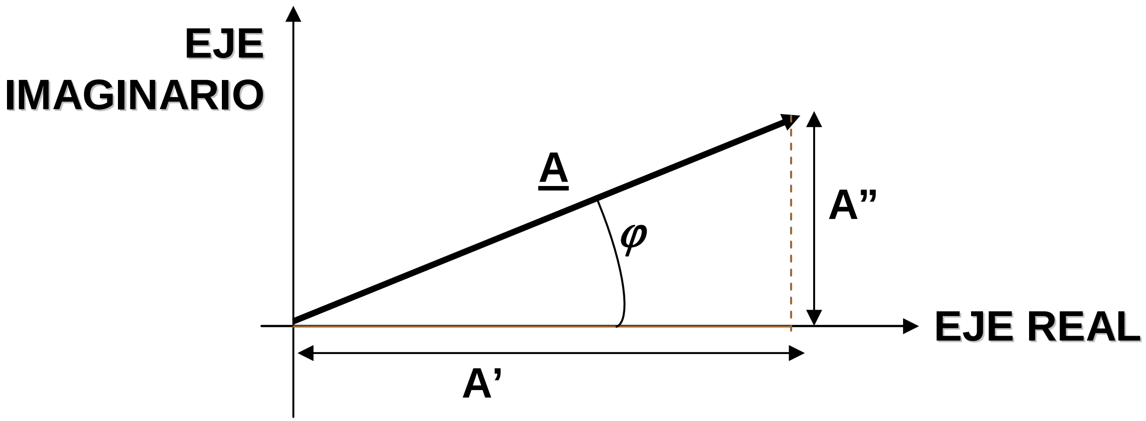
Si empleamos la notación de Euler para la escritura de números complejos

$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\mathrm{sen}\alpha$ o bien $e^{-j\alpha} = \cos\alpha - j\mathrm{sen}\alpha$

podríamos escribir la expresión de $\underline{a}(t)$ **como**

$\underline{a}(t) = A_0 \cdot e^{j(\omega t+\varphi)} = (A_0 \cdot e^{j\varphi}) \cdot e^{j\omega t}$

Si además tenemos en cuenta que la frecuencia y por tanto la pulsación se mantienen constantes dentro de un mismo sistema de generación, se podría obviar el movimiento ya que si comparamos unos vectores con otros todos se mueven con la misma velocidad y por tanto entre ellos se mantienen estáticos, con esto y si trabajamos a escala √2 veces mayor, estaremos considerando el vector valor eficaz de la funcion sinusoidal

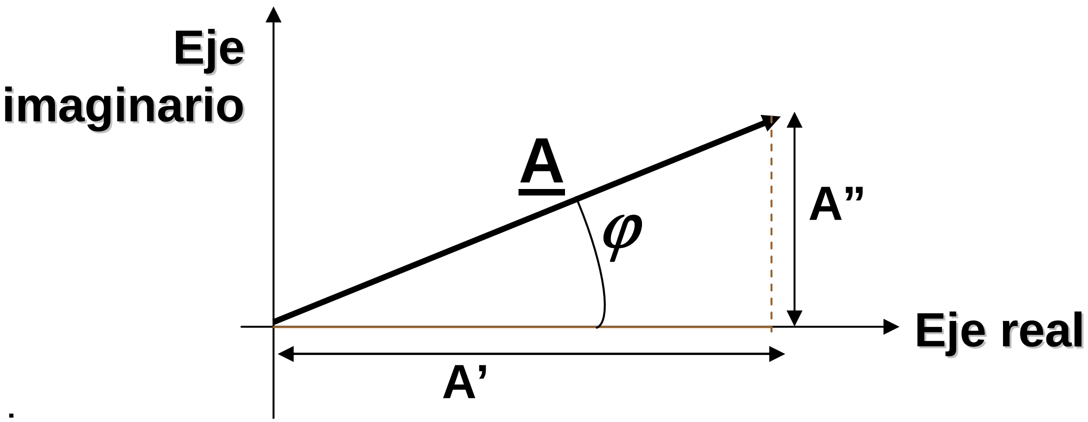


La representación de *a(t)* como un vector fijo en el espacio se puede expresar como

Representación trigonométrica

$$\underline{A} = \mathrm{A} \cdot \cos\varphi + \mathrm{jA} \cdot \mathrm{sen}\varphi = \mathrm{A} \cdot \left(\cos\varphi + \mathrm{j} \cdot \mathrm{sen}\varphi\right)$$

Representación exponencial $\underline{A} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$



Forma binómica

$$\underline{A} = \mathrm{A'} + \mathrm{jA''}$$

Forma polar

$$\underline{A} = \mathrm{A}_{\angle\varphi^\circ}$$

$$\mathrm{A'} = \mathrm{A} \cdot \cos\varphi$$

$$\mathrm{A''} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{sen}\varphi$$

y

$$\mathrm{A} = \sqrt{(\mathrm{A'})^2 + (\mathrm{A''})^2}$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{A''}}{\mathrm{A'}}$$

No se debe de confundirla representación del vector fijo con el valor instantáneo de la función

$$\underline{a}(t) = \sqrt{2}\left[\mathrm{Real}\left\{\underline{A} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}\right]$$

Introduce el movimiento

Cambio de escala a valores eficaces

Vector fijo

Para una función coseno, en una seno seria la parte imaginaria

RESISTENCIA (R / G) ***u(t)*** **= R·** ***i(t)***

$$\sqrt{2}\cdot \underline{U}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{R}\cdot\sqrt{2}\cdot \underline{I}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

$$\underline{U} = \mathrm{R}\cdot \underline{I}$$

$$U\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_U} = \mathrm{R}\cdot I\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_I} \Rightarrow \begin{array}{c} U = \mathrm{R}\cdot I \\ \varphi_U = \varphi_I \end{array}$$

En el campo real

$$u(t) = \sqrt{2}\cdot U\cdot \cos(\omega t + \varphi_U)$$

$$i(t) = \sqrt{2}\cdot I\cdot \cos(\omega t + \varphi_I) = \sqrt{2}\cdot \frac{U}{\mathrm{R}}\cdot \cos(\omega t + \varphi_U)$$

CONDENSADOR (C)

$$u(t) = \frac{1}{\mathrm{C}} \cdot \int_{-\infty}^{t} i(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{CD}} \cdot i(t)$$

$$\sqrt{2} \cdot \underline{U} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \frac{1}{\mathrm{CD}} \cdot \sqrt{2} \cdot \underline{I} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{j}\omega \mathrm{C}} \cdot \underline{I} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

$$\underline{U} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega \mathrm{C}} \cdot \underline{I}$$

$$\frac{1}{\mathrm{j}} = -\mathrm{j} = 1 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{U} = \frac{1}{\omega \mathrm{C}} \cdot \underline{I} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot\frac{\pi}{2}} = U \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_U} = \frac{1}{\omega \mathrm{C}} \cdot I \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_I} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$U \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_U} = \frac{1}{\omega \mathrm{C}} \cdot I \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\varphi_I - \frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow \quad U = \frac{1}{\omega \mathrm{C}} \cdot I, \quad \varphi_U = \varphi_I - \frac{\pi}{2}$$

En el campo real

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi_U)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_I) = \sqrt{2} \cdot \omega \cdot \mathrm{C} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi_U + \frac{\pi}{2})$$

BOBINA (L)

$$u(t) = \mathrm{L} \cdot \frac{\mathrm{d}i(t)}{dt} = \mathrm{LD} \cdot i(t)$$

$$\sqrt{2} \cdot \underline{U} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{LD} \cdot \sqrt{2} \cdot \underline{I} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \sqrt{2} \cdot \mathrm{j}\omega\mathrm{L} \cdot \underline{I} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

$$\underline{U} = \mathrm{j}\omega L\underline{I}$$

$$\mathrm{j} = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{\pi}{2}} \quad \Rightarrow \quad \underline{U} = \omega\mathrm{L} \cdot \underline{I} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{\pi}{2}} = U \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_U} = \omega\mathrm{L} \cdot I \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_I} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$U \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_U} = \omega\mathrm{L} \cdot I \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\varphi_I + \frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow \begin{array}{l} U = \omega\mathrm{L} \cdot I \\ \varphi_U = \varphi_I + \dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

En el campo real

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi_U)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_I) = \sqrt{2} \cdot \frac{U}{\omega\mathrm{L}} \cdot \cos(\omega t + \varphi_U - \frac{\pi}{2})$$

Con el termino de impedancia y admitancia nos referimos a un elemento que nos sirve para simplificar las ecuaciones de los circuitos en corriente alterna, estos elementos se comportan de forma paralela a las resistencias y nos ligan la tensión y la corriente en corriente alterna de forma que podemos decir:

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \quad \text{o bien} \quad \underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U}$$

$$\underline{Z} = Z \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = Z_{\angle\varphi°} = Z\cos\varphi + \mathrm{j}Z\mathrm{sen}\varphi = \mathrm{R} + \mathrm{jX}$$

$$\underline{Y} = Y \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi'} = Y_{\angle\varphi'°} = Y\cos\varphi' + \mathrm{j}Y\mathrm{sen}\varphi' = \mathrm{G} + \mathrm{jB}$$

DONDE:

- ✓ **R $\Rightarrow$ RESISTENCIA (Parte real de una impedancia)**
- ✓ **X $\Rightarrow$ REACTANCIA (Parte imaginaria de una impedancia)**
- ✓ **G $\Rightarrow$ CONDUCTANCIA (Parte real de una admitancia)**
- ✓ **B $\Rightarrow$ SUSCEPTANCIA (Parte imaginaria de una admitancia)**

Relaciones entre Impedancia (<u>Z</u>) y Admitancia (<u>Y</u>) complejas

$$\begin{matrix} Z = \sqrt{\mathrm{R}^2 + X^2} \\ \varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{X}{\mathrm{R}} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mathrm{R} = Z \cdot \cos\varphi \\ X = Z \cdot \mathrm{sen}\varphi \end{matrix} \qquad \begin{matrix} Y = \sqrt{\mathrm{G}^2 + B^2} \\ \varphi' = \mathrm{arctg}\dfrac{B}{\mathrm{G}} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mathrm{G} = Y \cdot \cos\varphi' \\ B = Y \cdot \mathrm{sen}\varphi' \end{matrix}$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} \Rightarrow \begin{matrix} Z = \dfrac{1}{Y} \\ \varphi = -\varphi' \end{matrix}$$

$$\mathrm{R} + \mathrm{j}X = \frac{1}{\mathrm{G} + \mathrm{j}B} \cdot \frac{\mathrm{G} - \mathrm{j}B}{\mathrm{G} - \mathrm{j}B} = \frac{\mathrm{G} - \mathrm{j}B}{\mathrm{G}^2 + B^2} = \frac{\mathrm{G} - \mathrm{j}B}{\left|\underline{Y}\right|^2} \Rightarrow \begin{matrix} \mathrm{R} = \dfrac{\mathrm{G}}{Y^2} \\ X = -\dfrac{B}{Y^2} \end{matrix}$$

$$\mathrm{G} + \mathrm{j}B = \frac{1}{\mathrm{R} + \mathrm{j}X} \cdot \frac{\mathrm{R} - \mathrm{j}X}{\mathrm{R} - \mathrm{j}X} = \frac{\mathrm{R} - \mathrm{j}X}{\mathrm{R}^2 + X^2} = \frac{\mathrm{R} - \mathrm{j}X}{\left|\underline{Z}\right|^2} \Rightarrow \begin{matrix} \mathrm{G} = \dfrac{\mathrm{R}}{Z^2} \\ B = -\dfrac{X}{Z^2} \end{matrix}$$

Aplicación a los elementos pasivos basicos

RESISTENCIA

$$\underline{Z} = R \Rightarrow \begin{matrix} R = R \\ X = 0 \end{matrix} \Rightarrow \underline{Z} = R_{\angle 0^\circ} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{Y} = \frac{1}{R} = G \Rightarrow \begin{matrix} G = G = \dfrac{1}{R} \\ B = 0 \end{matrix} \Rightarrow \underline{Y} = G_{\angle 0^\circ}$$

BOBINA

$$\underline{Z} = \mathrm{j}\omega L \Rightarrow \begin{matrix} R = 0 \\ X_L = \omega L \end{matrix} \Rightarrow \underline{Z} = \omega L_{\angle 90^\circ} \quad \Leftrightarrow$$

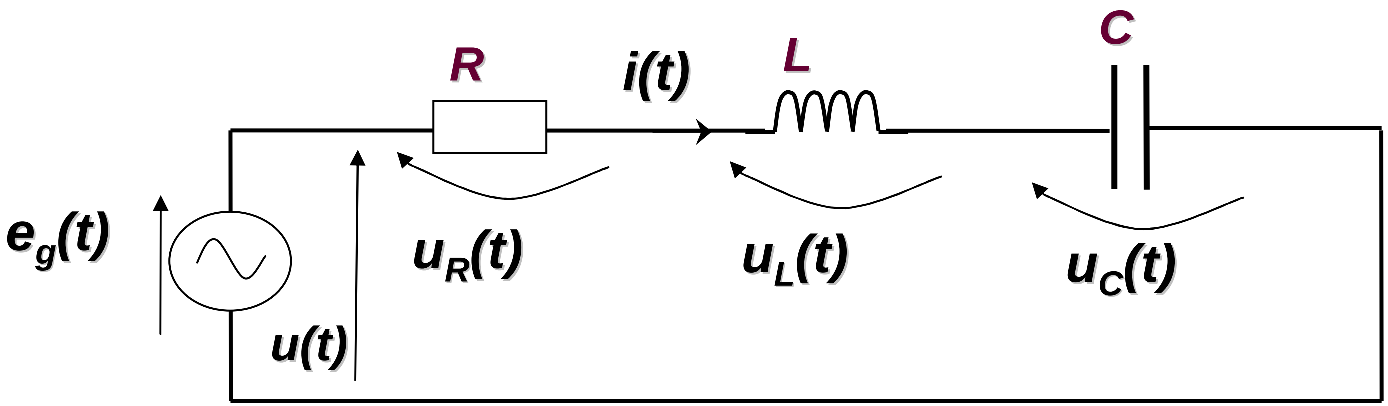
$$\underline{Y} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega L} \Rightarrow \begin{matrix} G = 0 \\ B_L = -\dfrac{1}{\omega L} \end{matrix} \Rightarrow \underline{Y} = \frac{1}{\omega L}\ {}_{\angle -90^\circ}$$

CONDENSADOR

$$\underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C} \Rightarrow \begin{matrix} R = 0 \\ X_C = -\dfrac{1}{\omega C} \end{matrix} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{1}{\omega C}\ {}_{\angle -90^\circ} \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{Y} = \mathrm{j}\omega C \Rightarrow \begin{matrix} G = 0 \\ B_C = \omega C \end{matrix} \Rightarrow \underline{Y} = \omega C_{\angle 90^\circ}$$

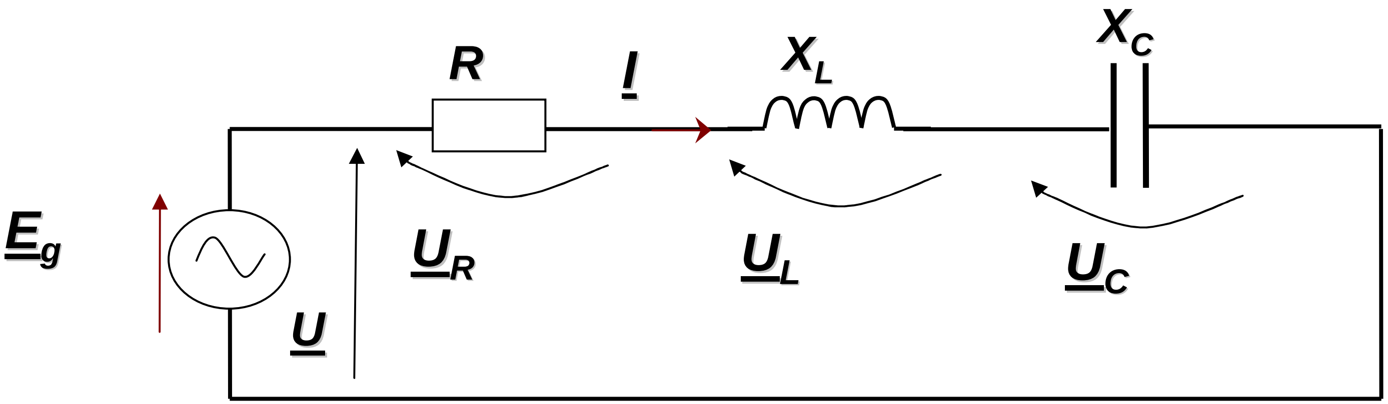
Impedancia de un circuito.-Diagrama vectorial



Por aplicación de la segunda ley de Kirchhoff

$$e_g(t) = u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

6.2.6 DIAGRAMA DE IMPEDANCIAS DE UN CIRCUITO



Por estar en corriente alterna

$$\underline{E}_g = \underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$$

$$\underline{E}_g = \underline{U} = R \cdot \underline{I} + \mathrm{j}X_L \cdot \underline{I} - \mathrm{j}X_C \cdot \underline{I} = R \cdot \underline{I} + \mathrm{j}\,\omega L \cdot \underline{I} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C} \cdot \underline{I} =$$

$$\left(R + \mathrm{j}\,\omega L - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\right) \cdot \underline{I} = \underline{U} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} =$$

$$R + \mathrm{j}\,\omega L - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C} = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + \mathrm{j}\left(X_L - X_C\right)$$

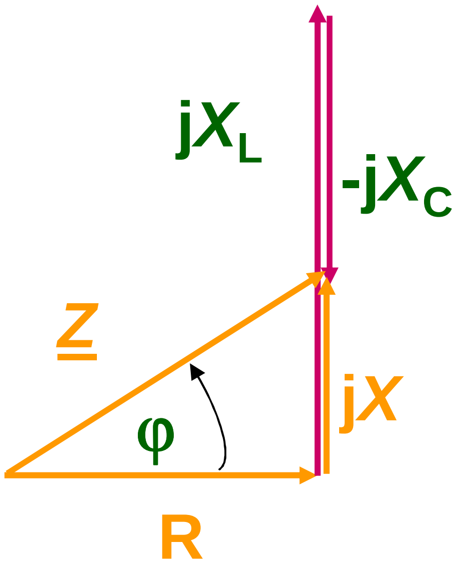
6.2.6 DIAGRAMA DE IMPEDANCIAS DE UN CIRCUITO

$$\underline{Z} = Z_{\angle\varphi} \Rightarrow \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2} \\ \varphi = arctg \dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} \end{cases}$$

$$\underline{U} = \underline{E}_g = E_{g\ \angle\varphi_U} \Rightarrow u(t) = \sqrt{2} \cdot E_g \cdot \cos(\omega t + \varphi_U)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{E_g}{Z}_{\angle\varphi_U - \varphi} \Rightarrow i(t) = \sqrt{2} \cdot \frac{E_g}{Z} \cdot \cos(\omega t + \varphi_U - \varphi)$$

6.2 CIRCUITOS EN CORRIENTE ALTERNA (C.A.) (15)
6.2.6 DIAGRAMA DE IMPEDANCIAS DE UN CIRCUITO



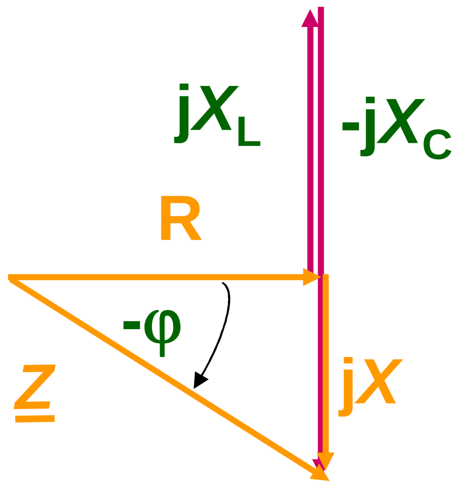


DIAGRAMA DE IMPEDANCIAS

Considerando que $\underline{I} = I\angle 0º$

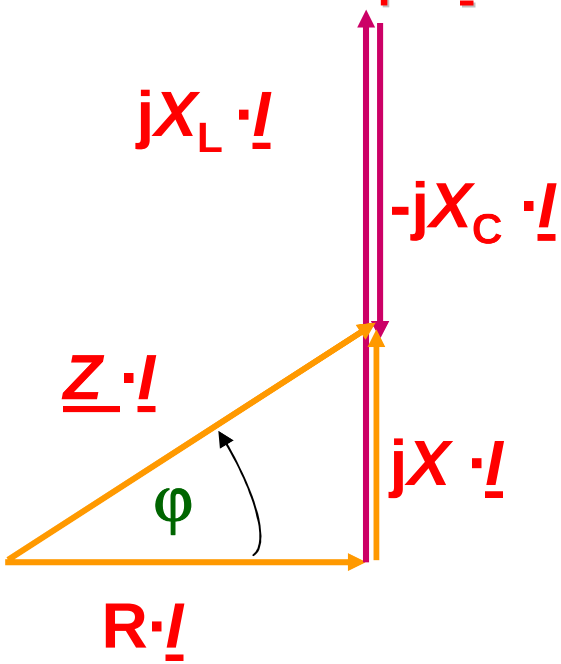
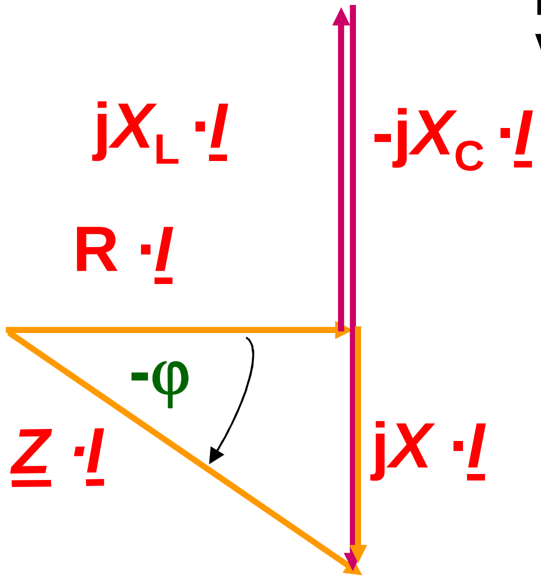


DIAGRAMA VECTORIAL



Suponemos un circuito de impedancia $\underline{Z}$ = R+jX= $Z\angle\varphi$º al que aplicamos una tensón alterna monofásica en el mismo la tensión y la corriente en forma instantánea vendrán dados por

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t) \qquad e \qquad i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

Donde además sabemos que $I = \dfrac{U}{Z}$

Si calculamos la potencia instantánea *p(t)* como el producto de la tensión por la corriente entonces tendremos:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = 2 \cdot U \cdot I \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

$$p(t) = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) + U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi)$$

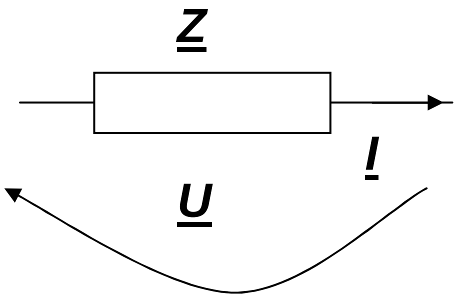
$$p(t) = P + \mathcal{P}_{\mathcal{F}}$$

$$\text{donde:}$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \qquad \text{POTENCIA MEDIA, REAL O ACTIVA}$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}} = U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi) \qquad \text{POTENCIA FLUCTUANTE}$$

Si consideramos una impedancia:



Cuando la potencia sea mayor

que cero la impedancia estara

disipando potencia y cuando sea

menor que cero la estará cediendo (devolviendo) al sistema de alimentacion

además la potencia activa *p* es constante en el tiempo y se corresponde con el valor medio de la potencia instantánea

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi > 0 \Rightarrow \cos\varphi > 0$$

$$\frac{-\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \varphi < 0 \Rightarrow \text{ CARACTER CAPACITIVO} \\ \varphi = 0 \Rightarrow \text{ CARACTER RESISTIVO} \\ \varphi > 0 \Rightarrow \text{ CARACTER INDUCTIVO} \end{cases}$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi < 0 \Rightarrow \cos\varphi < 0 \quad \text{NO ES POSIBLE}$$

Si calculamos la potencia instantánea *p(t)* como el producto de la tensión por la corriente entonces tendremos:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) + U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi) =$$

$$U \cdot I \cdot \cos(\varphi) + U \cdot I \cdot \cos(2\omega t) \cdot \cos(\varphi) + U \cdot I \cdot \mathrm{sen}(2\omega t) \cdot \mathrm{sen}(\varphi) =$$

$$U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \cdot \left(1 + \cos(2\omega t)\right) + U \cdot I \cdot \mathrm{sen}(\varphi) \cdot \left(\mathrm{sen}(2\omega t)\right)$$

DONDE VAMOS A CONSIDERAR

$$U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow \text{ POTENCIA ACTIVA (P) (W)}$$

$$U \cdot I \cdot \mathrm{sen}(\varphi) \Rightarrow \text{ POTENCIA REACTIVA (Q) (var)}$$

La potencia activa es positiva y se consume en los elementos pasivos del circuito, la potencia reactiva se intercambia constantemente entre el circuito y las fuentes de alimentación

Circuito resistivo puro φ = 0º

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = U \cdot I \cdot \cos(0^\circ) = U \cdot I$$

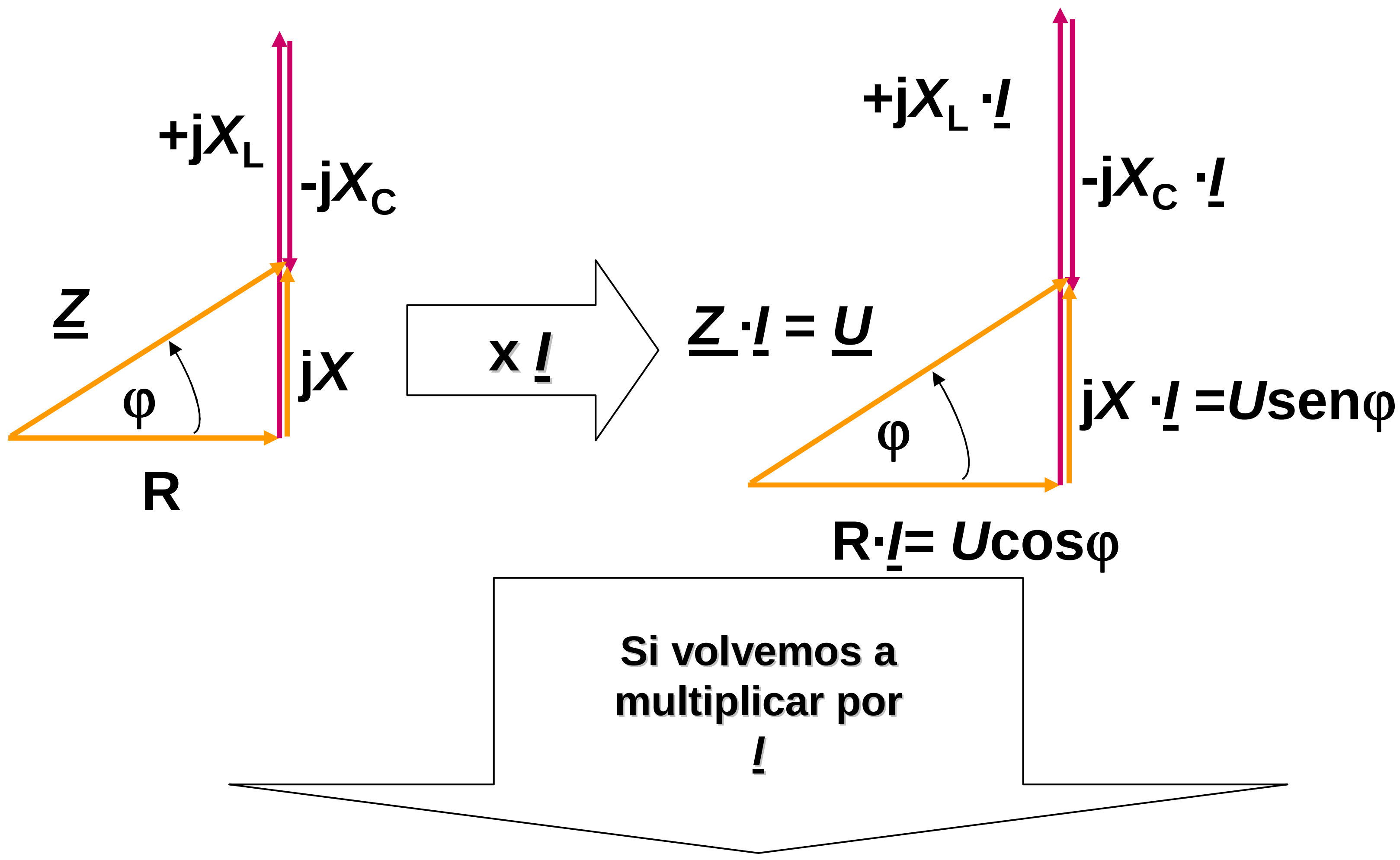
$$Q = U \cdot I \cdot \mathrm{sen}(\varphi) = U \cdot I \cdot \mathrm{sen}(0^\circ) = 0$$

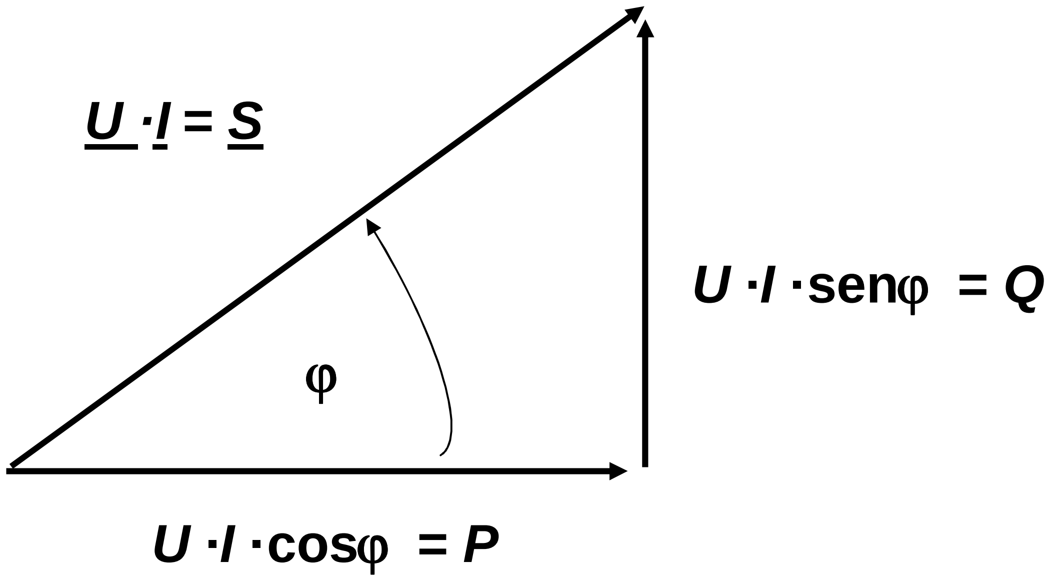
Circuito reactivo puro φ = ±90º

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = U \cdot I \cdot \cos(\pm 90^\circ) = 0$$

$$Q = U \cdot I \cdot \mathrm{sen}(\varphi) = U \cdot I \cdot \mathrm{sen}(\pm 90^\circ) = \pm U \cdot I$$

Diagrama de potencias y concepto de potencia aparente





A la hipotenusa del triangulo de potencias le llamamos potencia aparente ($\underline{S}$) o potencia compleja ya que podemos decir que:

$$\underline{S} = P + \mathrm{j}Q = S_{\angle\varphi^\circ}$$

$$\left.\begin{aligned} S &= \sqrt{P^2 + Q^2} \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{Q}{P} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} P &= S \cdot \cos\varphi = R \cdot I^2 \\ Q &= S \cdot \text{sen}\varphi = X \cdot I^2 \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} &P\ (\mathrm{W}) \\ &Q\ (\mathrm{var}) \\ &S\ (\mathrm{VA}) \end{aligned}$$

Calculo de la potencia aparente ($\underline{S}$) en funcion de la tension e intensidad para ello consideramos

$$u(t) = \mathrm{Real}\left\{\sqrt{2} \cdot U \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} \Rightarrow \underline{U} = U \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0} = U$$

$$i(t) = \mathrm{Real}\left\{\sqrt{2} \cdot I \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t - \varphi}\right\} \Rightarrow \underline{I} = I \cdot \mathrm{e}^{\text{-j}\varphi}$$

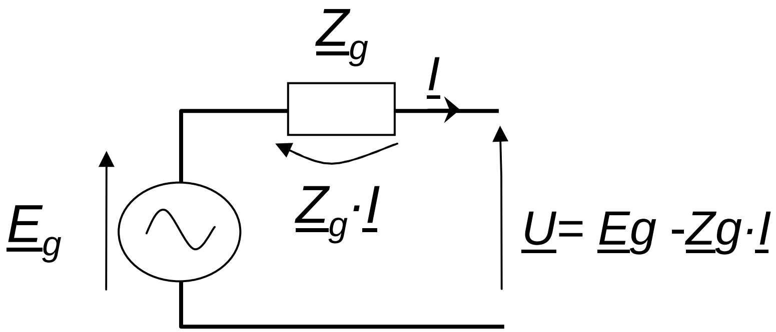
Si multiplicamos tensión por intensidad tendremos

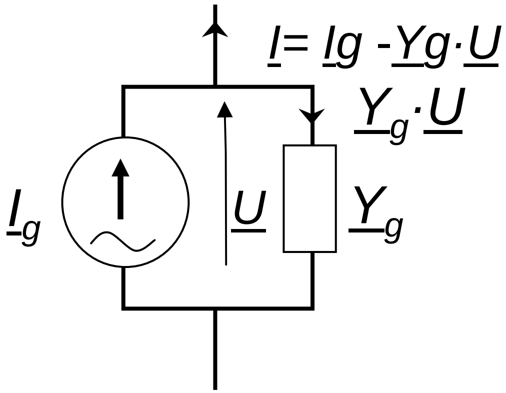
$$\underline{U} \cdot \underline{I} = U \cdot I \cdot \mathrm{e}^{\text{-j}\varphi} \neq U \cdot I \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = U \cdot I_{\angle\varphi^\circ} = \underline{S}$$

Expresión que no se corresponde con la de la potencia aparente, luego vamos a probar a multiplicar tensión por conjugado de intensidad y tendremos:

$$\underline{U} \cdot \underline{I}^{*} = U \cdot I \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = U \cdot I_{\angle\varphi^\circ} = \underline{S}$$

FUENTES DE CORRIENTE ALTERNA





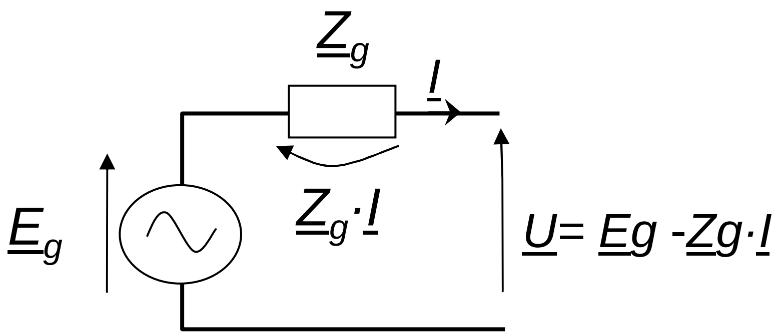
ECUACIONES EN FUENTES DE CORRIENTE ALTERNA

$$\underline{Z}_g = \frac{1}{\underline{Y}_g}$$

$$\underline{E}_g = \underline{Z}_g \cdot \underline{I}_g$$

$$\underline{I}_g = \underline{Y}_g \cdot \underline{E}_g = \frac{1}{\underline{Z}_g} \cdot \underline{E}_g$$

POTENCIA EN FUENTES DE CORRIENTE ALTERNA



$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^{*} = S_{\angle\varphi^\circ} = P + \mathrm{j}Q \qquad \underline{S}_g = \underline{E}_g \cdot \underline{I}^{*} = S_{g\ \angle\varphi^\circ} = P_g + \mathrm{j}Q$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi \Rightarrow \begin{cases} P > 0 \Rightarrow \text{ GENERADOR} \\ P < 0 \Rightarrow \text{ RECEPTOR} \\ P = 0 \Rightarrow \text{ INDETERMINADO} \end{cases}$$

$$Q = U \cdot I \cdot \mathrm{sen}\varphi$$

GENERADOR

$$\eta\% = \frac{P}{P_g} \cdot 100$$

RECEPTOR

$$\eta\% = \frac{P_G}{P} \cdot 100$$

POTENCIA EN FUENTES DE CORRIENTE ALTERNA

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = S_{\angle\varphi^\circ} = P + \mathrm{j}Q \qquad \underline{S}_g = \underline{U} \cdot \underline{I}_g^* = S_{g\ \angle\varphi^\circ} = P_g + \mathrm{j}Q$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi \Rightarrow \begin{cases} P > 0 \Rightarrow \text{ GENERADOR} \\ P < 0 \Rightarrow \text{ RECEPTOR} \\ P = 0 \Rightarrow \text{ INDETERMINADO} \end{cases}$$

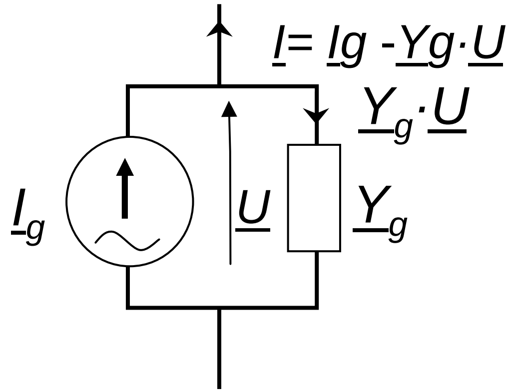
$$Q = U \cdot I \cdot \mathrm{sen}\varphi$$

GENERADOR

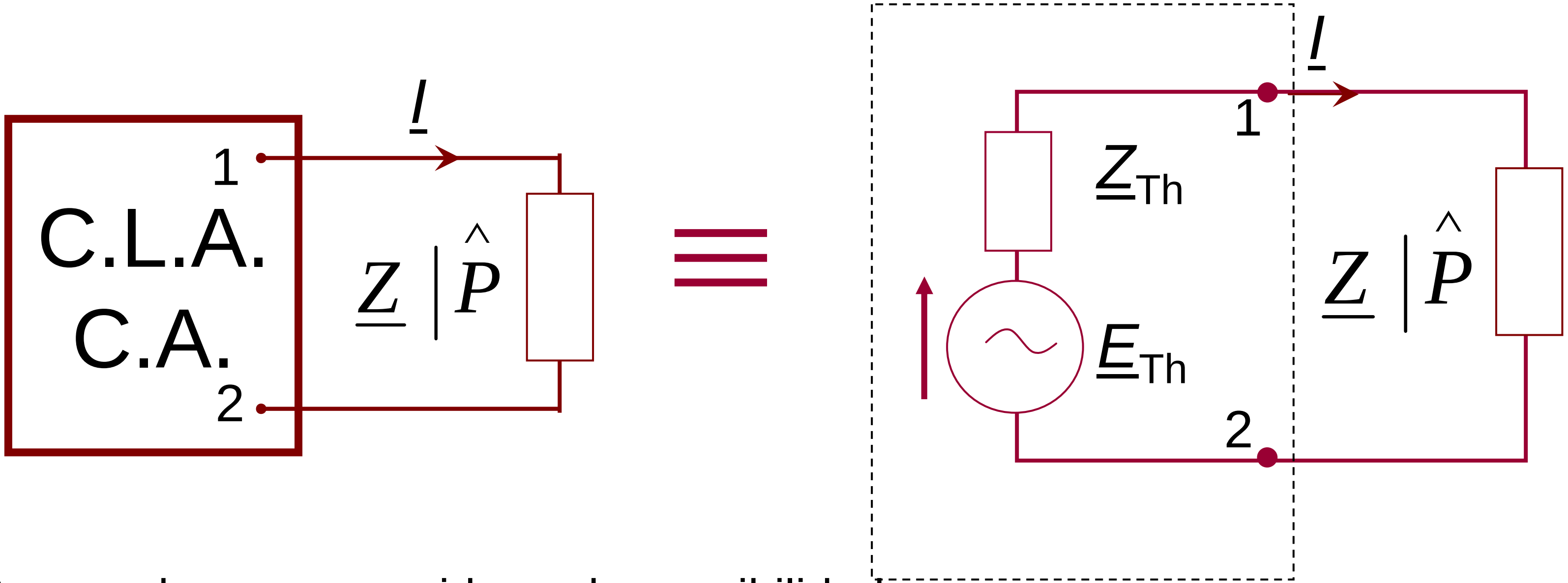
$$\eta\% = \frac{P}{P_g} \cdot 100$$

RECEPTOR

$$\eta\% = \frac{P_G}{P} \cdot 100$$



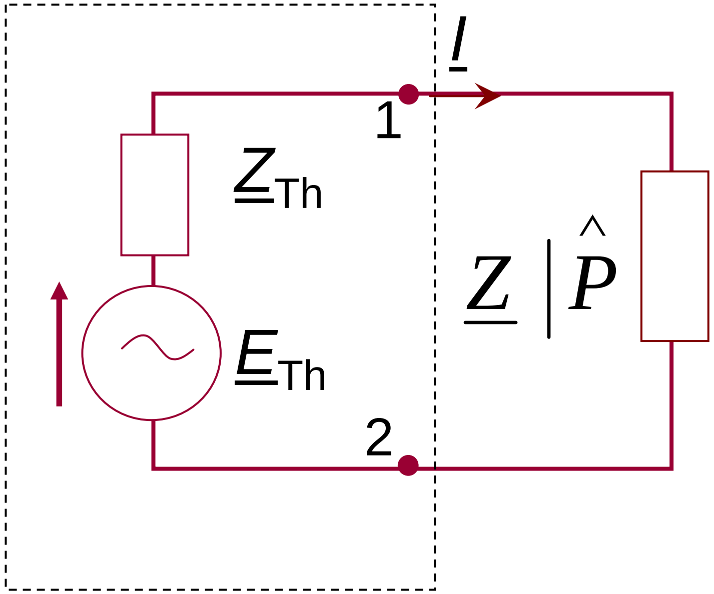
Teorema de la máxima transferencia de potencia en C.A. Dado un dipolo lineal y activo, mediante este teorema se trata de determinar el valor de la carga sobre la que se transfiere máxima potencia. Para facilitar los cálculos, como paso previo vamos a sustituir el dipolo lineal y activo por su equivalente de Thévenin, para a partir del mismo determinar el valor de "$\underline{Z}$" sobre la que se disipará máxima potencia.



En este caso hay que considerar dos posibilidades

- Máximo libre (no se le impone ninguna condición)
- Máximo condicionado (se le impone alguna condición)

Máximo libre



$$P = R \cdot I^2$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_{Th}}{R_{Th} + jX_{Th} + R + jX}$$

$$I^2 = \frac{E_{Th}^{\ 2}}{(R_{Th}+R)^2 + (X_{Th}+X)^2}$$

$$\Rightarrow \quad P = R \cdot \frac{E_{Th}^{\ 2}}{(R_{Th}+R)^2 + (X_{Th}+X)^2} = E_{Th}^{\ 2} \cdot \frac{R}{(R_{Th}+R)^2 + (X_{Th}+X)^2} = P$$

La potencia será máxima cuando el denominador de la expresión sea mínimo

El denominador será mínimo cuando $X = -X_{Th}$, con esta condición la potencia quedara expresada como

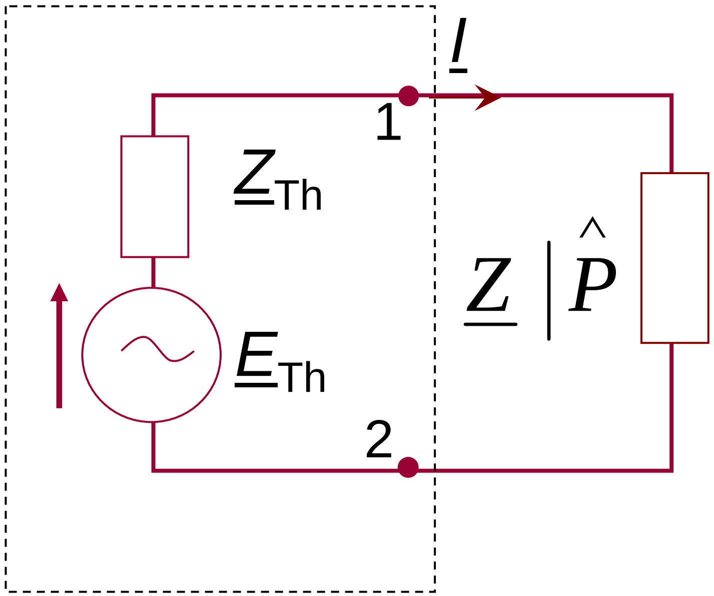
$$P = E_{Th}^{\ 2} \cdot \frac{R}{(R_{Th}+R)^2}$$

Expresión idéntica a la obtenida para corriente continua y por tanto será máxima cuando $R = R_{Th}$ luego la impedancia que consigue la máxima potencia será:

$\underline{Z} = R_{Th} - jX_{Th}$ o lo que es lo mismo $\underline{Z} = \underline{Z}_{Th}^{*}$

Máximo condicionado

Condición: $\underline{Z} = R + jX$; donde R es un valor cte. y X puede ser cualquier valor



$$P = R \cdot I^2$$

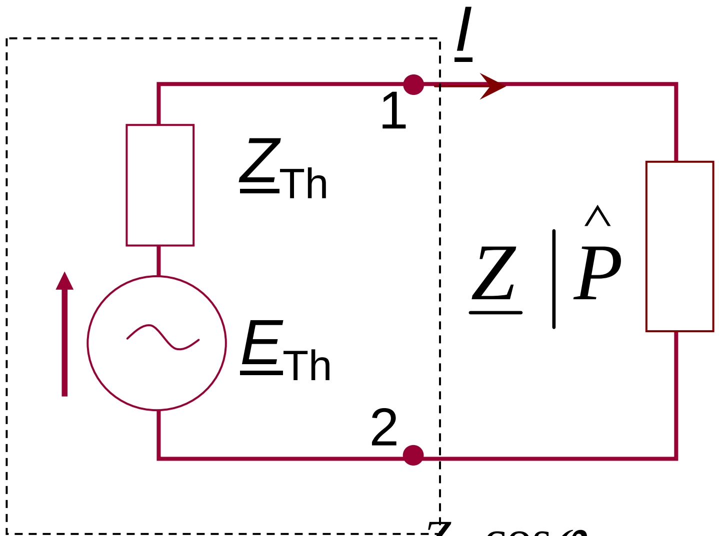
$$I^2 = \frac{E_{Th}{}^2}{\left(R_{Th} + R\right)^2 + \left(X_{Th} + X\right)^2} \Rightarrow \hat{P} \rightarrow \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}X} = 0$$

$$P = R \cdot \frac{E_{Th}{}^2}{\left(R_{Th} + R\right)^2 + \left(X_{Th} + X\right)^2}$$

Se puede decir que la potencia será máxima cuando en la ecuación el denominador sea mínimo, lo cual se cumple para $X_{Th} + X = 0$, es decir $X = -X_{Th}$

Máximo condicionado

Condición: $\underline{Z}$= Z∠φ donde φ es un valor cte. entonces



$$P = R \cdot I^2$$

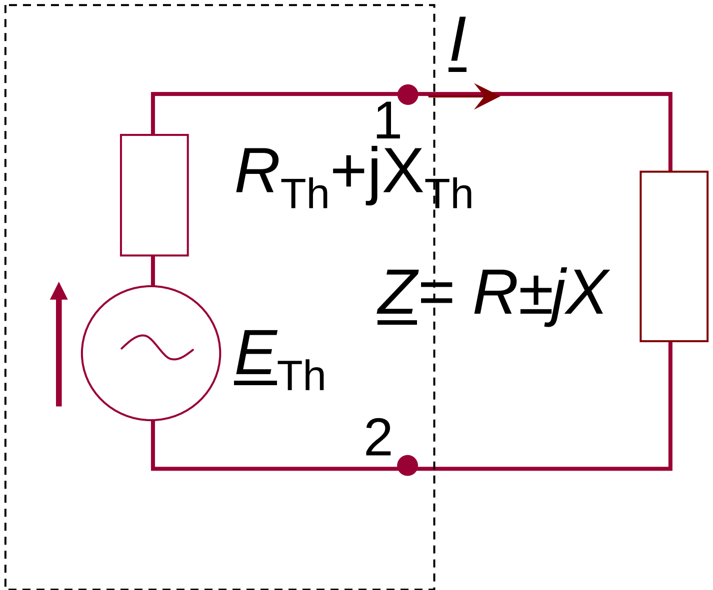
$$P = R \cdot \frac{E_{Th}{}^2}{\left(R_{Th} + R\right)^2 + \left(X_{Th} + X\right)^2}$$

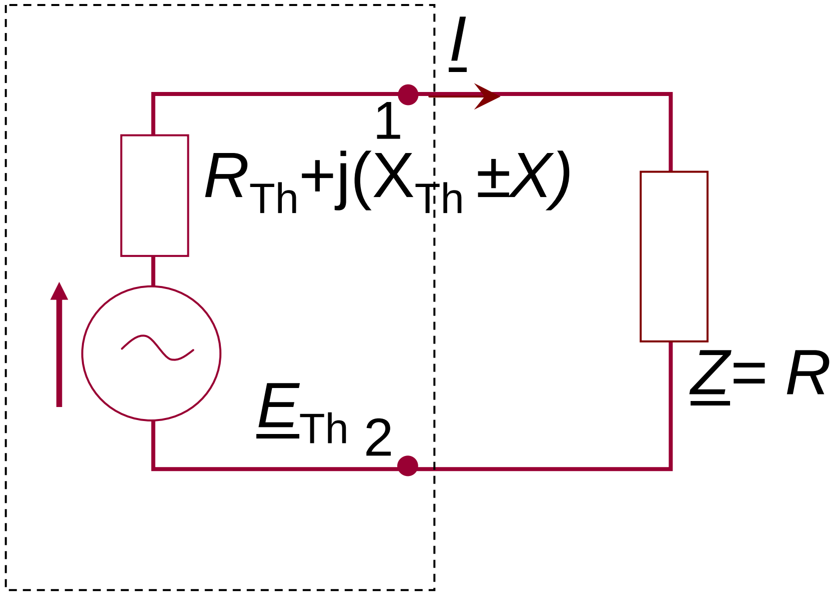
$$\Rightarrow P = E_{Th}{}^2 \cdot \frac{Z \cdot \cos\varphi}{\left(R_{Th} + Z \cdot \cos\varphi\right)^2 + \left(X_{Th} + Z \cdot \operatorname{sen}\varphi\right)^2}$$

$$\hat{P} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Z} = 0 \Rightarrow \left|\underline{Z}\right| = \left|\underline{Z}_{Th}\right| \Rightarrow \underline{Z} = \left|\underline{Z}_{Th}\right|_{\angle\varphi°}$$

Máximo condicionado

Condición: $\underline{Z} = R + jX$; donde X es un valor cte. y R puede ser cualquier valor, este caso puede reducirse al anterior, para ello agrupamos $\underline{Z}_{Th} = R_{Th} + jX_{Th}$ con la X de $\underline{Z} = R + jX$, con lo que tendremos una $\underline{Z}' = R_{Th} + j(X_{Th} \pm X)$ y la impedancia de carga se reduce a R y se puede estudiar como el caso anterior $\underline{Z} = Z\angle\varphi = R\angle 0º$ LUEGO, si consideramos el caso anterior, $R = |\underline{Z}'|$





$$R = \sqrt{R_{Th}^2 + \left(X_{Th} \pm X\right)^2}$$

6.3 BIBLIOGRAFIA

- V.M. Parra Prieto y otros, Teoría de Circuitos, Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid 1990. Tema XIII, XIV y XV.
- E. Alfaro Segovia, Teoría de Circuitos y Electrometría. El autor, Madrid 1970. Capitulo V, lecciones 12, 13 y 14.
- J.W. Nilsson, Circuitos Eléctricos, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington 1995. Capitulo 10 y 11.
- Z. Aginako y otros, Zirkuituen Teoriako 100 Ariketa, Elhuyar, Usurbil 2006. 1. atala.
- A. Gómez, J.A. Olivera, Problemas resueltos de Teoría de Circuitos, Paraninfo, Madrid 1990. Capitulo 1 y 5.
- A. Gómez Expósito y otros, Teoría de Circuitos, Ejercicios de autoevaluación, Thomson, Madrid 2005. Capítulo 2 y 3.
- L.I. Eguiluz, Pruebas objetivas de Ingeniería Eléctrica, Alambra, Madrid 1986. Parte 1: C y Parte 1: D.
- P. Sánchez Barrios y otros, Teoría de Circuitos, Pearson Educación, Madrid 2007. Capitulo 1.
- UNE-EN 60059: 2000 Valores normalizados CEI para la intensidad de corriente eléctrica.
- UNE 21302-131. Parte 131: Teoría de Circuitos.