Tema 5: TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LAS REDES.

5.0 OBJETIVOS

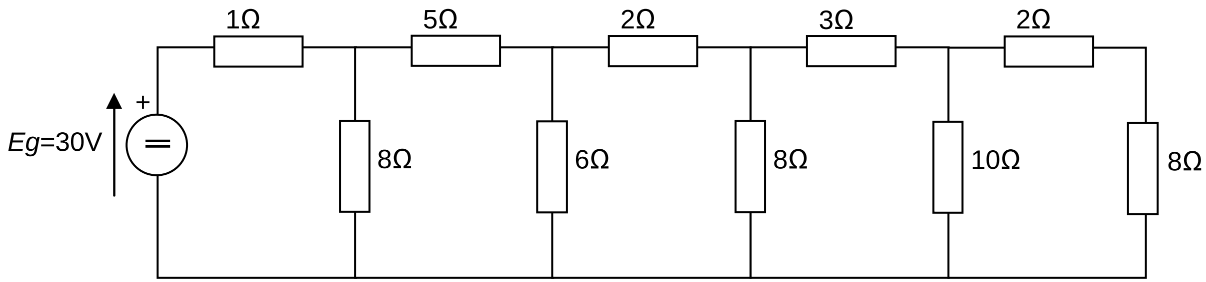
- Entender la importancia de los teoremas en la resolución de cuestiones tanto teóricas como prácticas.
- Distinguir cuando un circuito es lineal o no.
- Saber identificar cuando un circuito es o no reciproco.
- Comprender porque el principio de superposición es solo válido en sistemas lineales.
- Valorar la superposición en la resolución de circuitos lineales con fuentes de distinto carácter.
- Asumir que la regla de sustitución es solo aplicable si no se modifica el circuito.
- Conocer casos reales donde se utiliza el teorema de compensación.

■ **Linealidad:**

En un circuito lineal, la señal de salida es proporcional a la de entrada.

Este principio se puede aplicar directamente en circuitos en forma de escaleras alimentados por una única fuente situada al principio del circuito.

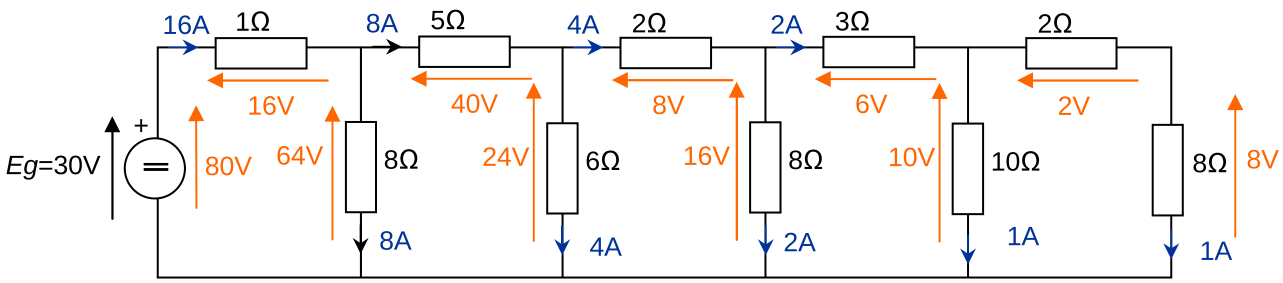
Ejemplo:



Suponemos la señal de salida de valor unitario (1A).
Obtendremos el valor de la señal de entrada para el valor de salida unidad elegido.

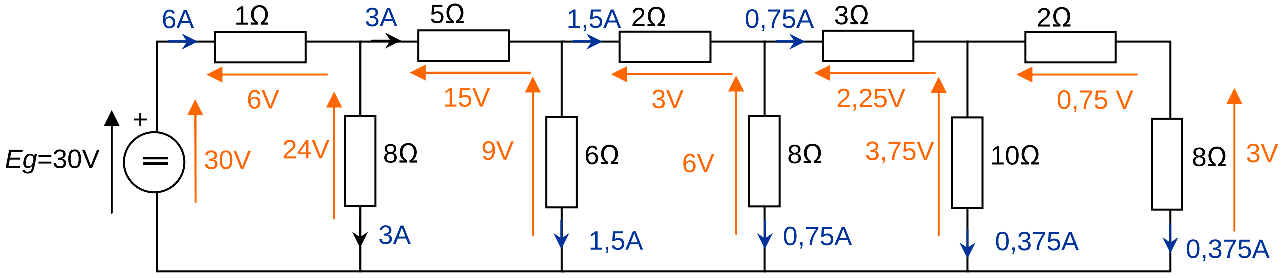
Definimos el valor de la constante K (las soluciones se obtienen multiplicando por K).

$$\left.\begin{array}{l} 80\text{V} \rightarrow 1\text{A} \\ 30\text{V} \rightarrow \text{K} \end{array}\right\} \text{K} = \frac{3}{8}$$



$$\text{K} = \frac{\text{Salida}}{\text{Entrada}} \rightarrow \text{Salida} = \text{K} \cdot \text{Señal de entrada}$$

5.1 SUPERPOSICIÓN Y LINEALIDAD. (2)

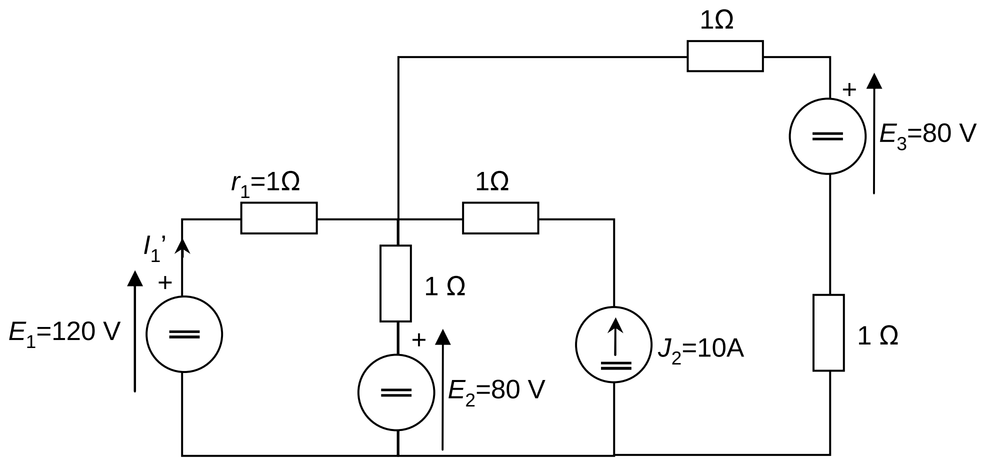


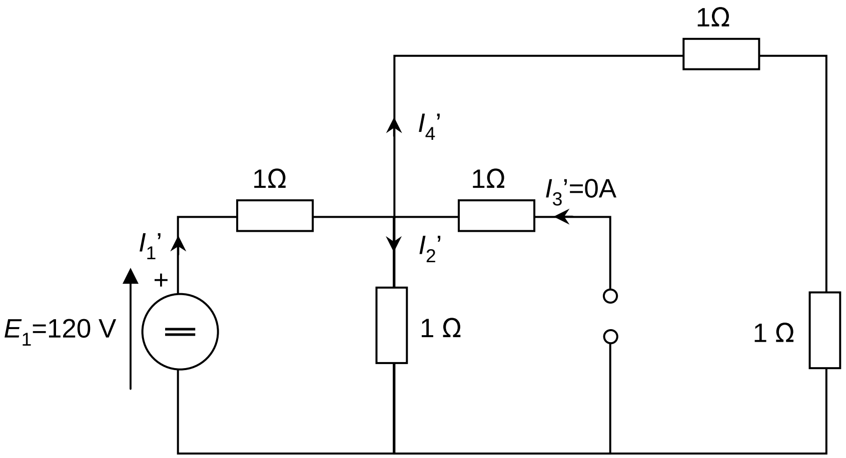
Superposición:

Para un circuito alimentado por varias fuentes de alimentación la señal de salida se puede obtener como suma de varias señales, es decir como suma de las señales de varios circuitos. Cada uno de estos circuitos, tendrá todas las fuentes pasivizadas excepto una.

Para pasivizar las fuentes de tensión se cortocircuitan y las de corriente se dejan a circuito abierto.

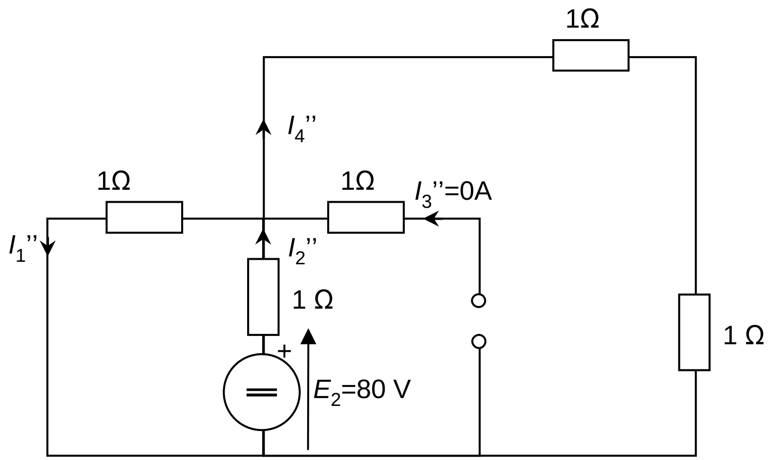
Ejemplo: En el circuito de la figura, calcúlese el valor de la corriente I_1.





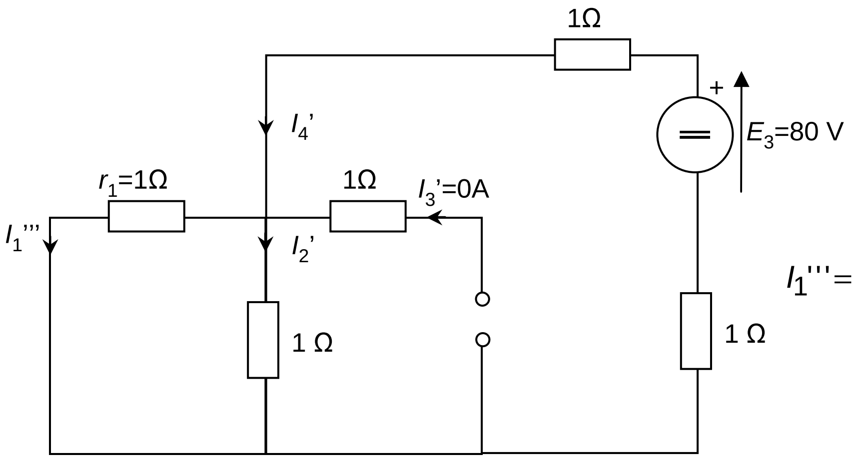
$$I_1' = \frac{120}{1 + \frac{1 \cdot 2}{1+2}} = 72\text{A}$$

CIRCUITO Nº 1: Obtenemos la resistencia total vista por la fuente que no es más que dos resistencias de 1Ω y 2 Ω en paralelo y con una tercera de 1Ω en serie. La corriente que circula por la fuente es la tensión de la fuente dividida por la resistencia total del circuito.



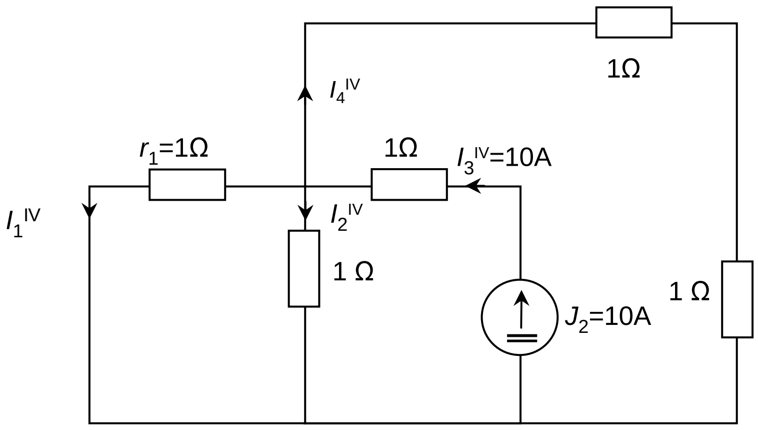
$$I_1'' = \frac{80}{1 + \frac{2 \cdot 1}{2+1}} \cdot \frac{2}{1+2} = 32\text{A}$$

CIRCUITO Nº 2: Se calcula igual que antes la corriente que la fuente proporciona al circuito, calculando para ello la resistencia total del circuito vista por la fuente, en este caso la fuente E_2. A continuación se aplica la fórmula del divisor de corriente. Nótese que la corriente I_1" a cambiado de sentido.



$$I_1''' = \frac{80}{2 + \frac{1 \cdot 1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 16\text{A}$$

CIRCUITO Nº 3: Se hace igual que el circuito nº 2. Obteniendo previamente la corriente total del circuito y calculando I_1''' seguidamente empleando la formula del divisor de corriente.



CIRCUITO Nº4: Lo resolvemos teniendo en cuenta la propiedad proporcionalidad Las ramas de las corrientes I_1^{IV}, I_2^{IV} e I_4^{IV} están en paralelo. Las corrientes I_1^{IV} e I_2^{IV} son iguales por tener sus ramas la misma resistencia y la corriente I_4^{IV} es la mitad por tener el doble de resistencia. Con estos datos formamos el sistema de ecuaciones que nos permita determinar el valor de la corriente I_1^{IV} que se persigue:

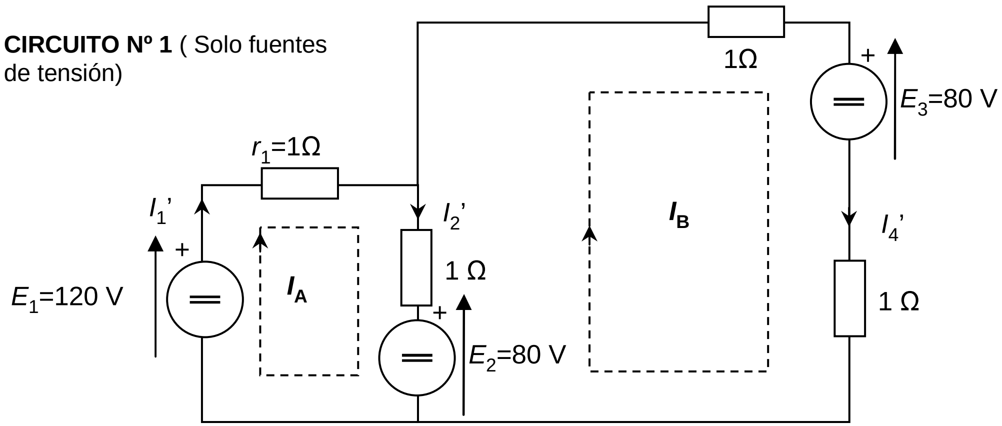
$$\begin{cases} I_1^{IV} = I_2^{IV} \\ I_4^{IV} = \dfrac{I_1^{IV}}{2} \\ I_1^{IV} + I_2^{IV} + I_4^{IV} = 10 \end{cases} \rightarrow I_1^{IV} + I_1^{IV} + \frac{I_1^{IV}}{2} = 10 \rightarrow I_1^{IV} = 4\text{A}$$

RESPUESTA :Como la superposición de las cuatro señales. $I_1 = I_1' - I_1'' - I_1''' - I_1^{IV} = 72 - 32 - 16 - 4 = 20\text{A}$

5.1 SUPERPOSICIÓN Y LINEALIDAD. (6)

En lugar de superponer cuatro circuitos uno por cada fuente. Otra opción es, superponer dos: un circuito tendrá todas las fuentes de tensión y otro todas las de corriente, así se evita hacer la transformación de fuentes.

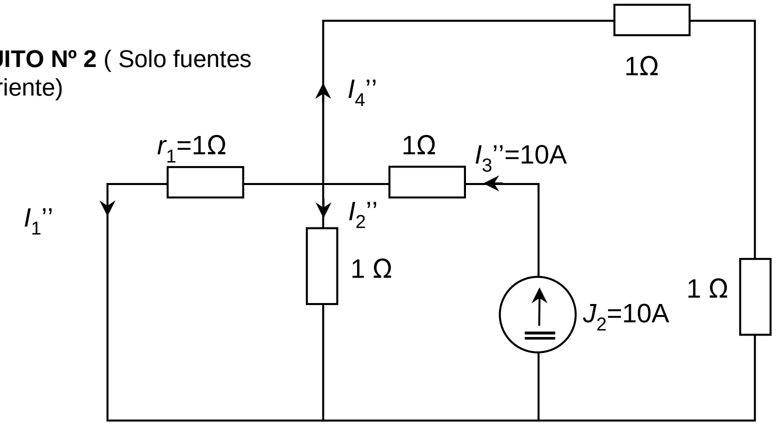
CIRCUITO Nº 1 (Solo fuentes de tensión)



$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120-80 \\ 80-80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_A = I_1' = \frac{\begin{vmatrix} 40 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{120}{6-1} = 24A$$

CIRCUITO Nº 2 (Solo fuentes de corriente)



Lo resolvemos igual que antes se ha resuelto el circuito nº4, ya que como se puede apreciar es el mismo.

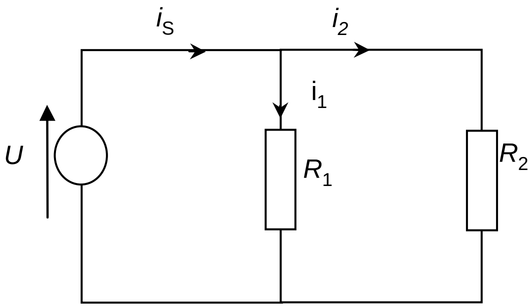
$$\begin{cases} I_1'' = I_2'' \\ I_4'' = \dfrac{I_1''}{2} \\ I_1'' + I_2'' + I_4'' = 10 \end{cases} \rightarrow I_1'' + I_1'' + \frac{I_1''}{2} = 10 \rightarrow I_1'' = 4A$$

RESPUESTA :Como la superposición de las dos señales. $I_1 = I_1' - I_1'' = 24 - 4 = 20A$

- Solo se emplea cuando los circuitos resultantes son realmente sencillos.
- Cuando existan fuentes de diferente naturaleza o de diferente frecuencia se debe aplicar forzosamente este teorema.

- Nota:

En este ejercicio del ejemplo para resolver los subcircuitos dos y tres, se ha empleado el ***divisor de corriente*** recordemos en que consiste:

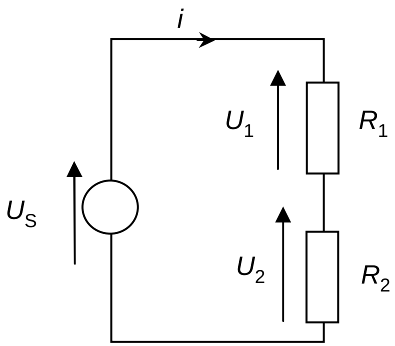


$$U = R_1 \cdot i_1 = i_2 \cdot R_2 = i_S \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = i_S \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$i_1 = i_S \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Igualmente podemos hablar del ***divisor de tensión***:

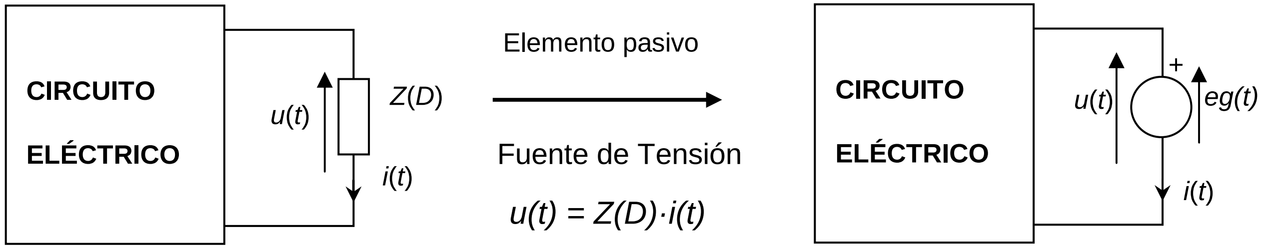


$$U_S = R_1 \cdot i + i \cdot R_2 \quad \text{o} \quad i = \frac{U_S}{R_1 + R_2}$$

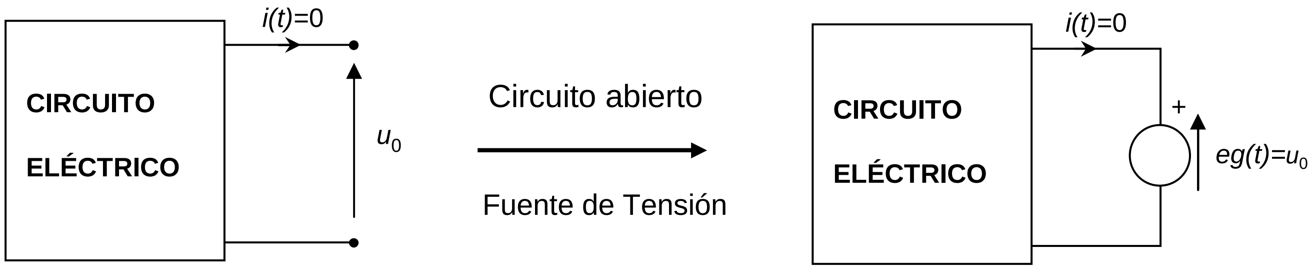
$$U_1 = R_1 \cdot i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_S$$

$$U_1 = R_2 \cdot i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_S$$

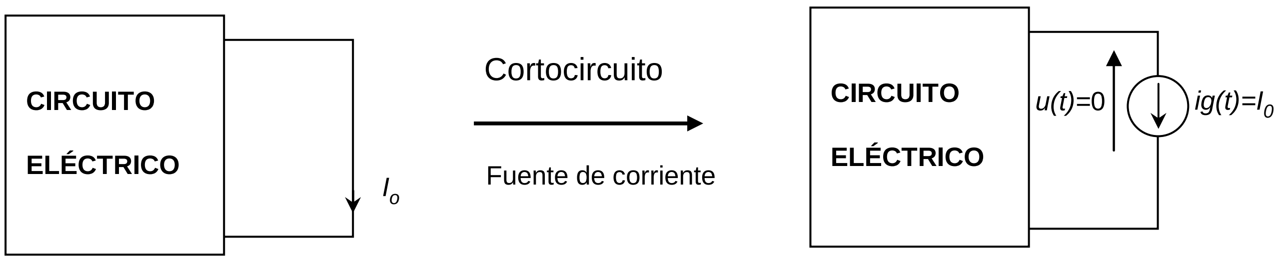
Conocida la relación u(t)=Z(D)·i(t) ó i(t)=Y(D)·u(t) entre los terminales de un elemento pasivo, podremos sustituir el elemento por una fuente de tensión de valor u(t) o por una fuente de corriente de valor i(t) ya que al aplicar las leyes de Kirchhoff en el circuito, las ecuaciones de definición no variarán; estas fuentes serán fuentes dependientes.



Se sustituye el elemento pasivo por una fuente de tensión cuyo valor es la caída de tensión en bornes del elemento pasivo. Pero la corriente en ambos circuitos ha de ser la misma.



Se sustituye el circuito abierto por una fuente de tensión cuyo valor es la tensión en bornes del circuito abierto. La corriente en ambos circuitos es nula.

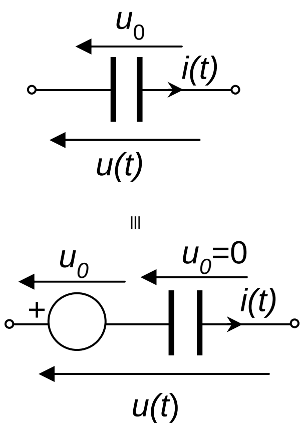


Se sustituye el cortocircuito por una fuente de corriente cuyo valor es la corriente del cortocircuito. Siendo la tensión en ambos circuitos la misma y nula.

Como se puede observar cuando el elemento ha sido sustituido por una fuente de tensión la corriente debía adquirir un valor determinado y cuando se ha sustituido por una fuente de corriente, esta estaba supeditando a una tensión determinada. A esto es a lo que se refiere cuando en el enunciado se dice que la fuente es dependiente.

Esta regla puede emplearse para la representación de una bobina o un condensador cargados inicialmente, veámoslo:

a) Caso del condensador cargado inicialmente :

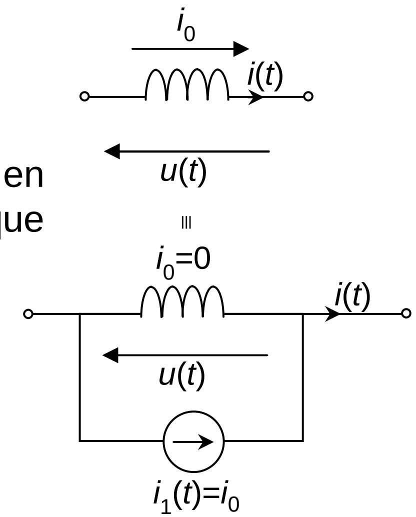


El condensador previamente cargado tienen en sus bornes la tensión u_0 que se sustituye por una fuente ideal de tensión de valor u_0, en serie con un condensador sin carga. De modo que el comportamiento del conjunto es el mismo que el de el condensador con carga.

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)\mathrm{d}t = u_0 + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)\mathrm{d}t$$

b) Caso de la bobina con carga inicial :

La bobina previamente cargada se puede sustituir por una bobina sin carga en paralelo con una fuente ideal de corriente cuya corriente es la corriente que previamente tenía la bobina.

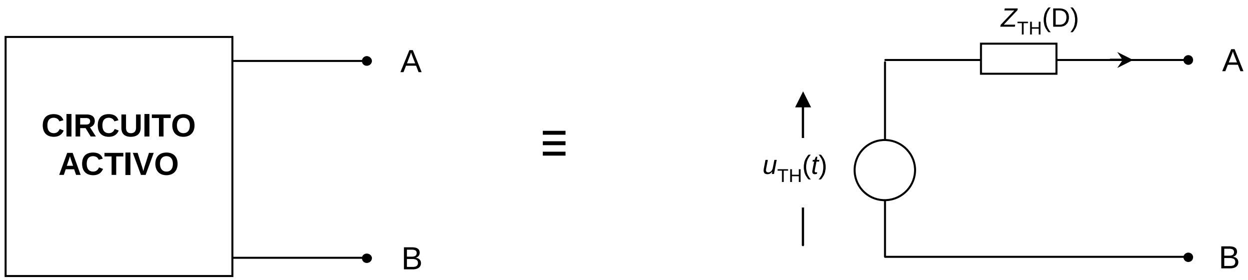


Ambos circuitos cumplen la misma ecuación:

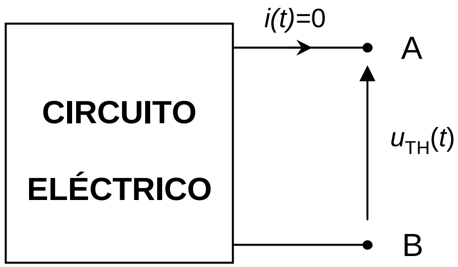
$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} u(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u(t)\mathrm{d}t = i_0 + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u(t)\mathrm{d}t$$

5.3 TEOREMA DE THEVENIN.

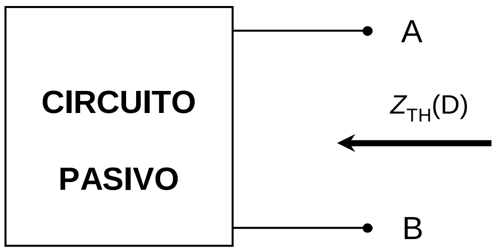
El circuito equivalente de un circuito activo entre dos cualesquiera de sus puntos, constará, según Thevenin, de una fuente de tensión y una impedancia en serie con la fuente, conectados entre los puntos mencionados.



El valor de la fuente de Tensión: $u_{TH}(t)$ será aquel valor de tensión que aparece entre los bornes del dipolo cuando este está a circuito abierto.



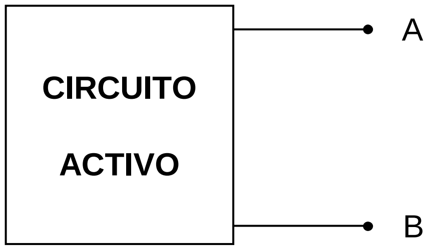
La impedancia Z_{TH}(D): será la impedancia de entrada que hay entre los bornes del dipolo. Para calcularlo se deben pasivizar las fuentes (cortocircuitar las fuentes de tensión y dejar a circuito abierto las de corriente).

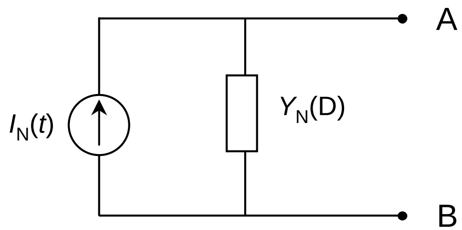


•Cuando en el circuito haya fuentes dependientes, se coloca cualquier tensión entre los bornes del dipolo, se determina la corriente i(t) entre A y B, y posteriormente se obtiene el valor de Z_{TH}(D) con la expresión: $\dfrac{u(t)}{i(t)}$

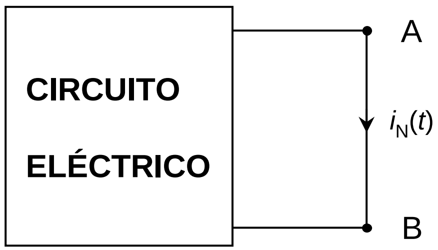
•Si en el circuito hay acoplos magnéticos entre las partes del circuito que se encuentran a la izquierda y la derecha de A y B (bornes entre los que se calcula el equivalente) no se puede aplicar Thevenin.

El circuito equivalente de un dipolo activo (circuito eléctrico con dos bornes accesibles), según Norton, consta de una fuente de corriente ideal y una admitancia en paralelo con esta.

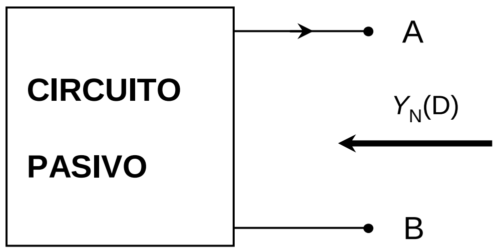




Valor de la fuente de corriente $i_N(t)$, es la corriente en bornes del dipolo, cuando está en cortocircuito, y manteniendo su sentido.

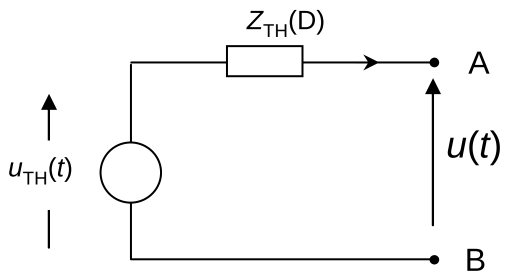


Valor de la admitancia, es la admitancia de entrada al circuito cuando el circuito está pasivizado.

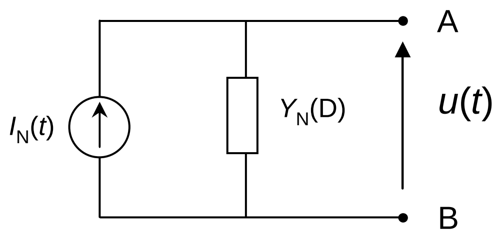


Al aplicar los teoremas de Norton y Thevenin a un mismo dipolo, los dos circuitos que se obtienen serán equivalentes, veámoslo:

a) Ambos equivalentes a circuito abierto:



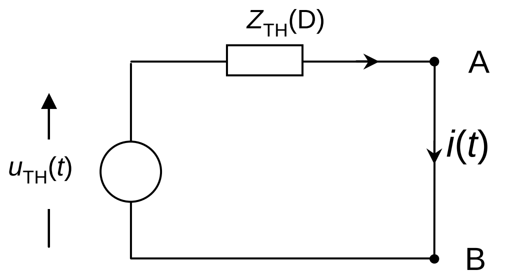
$$u(t) = u_{TH}(t)$$



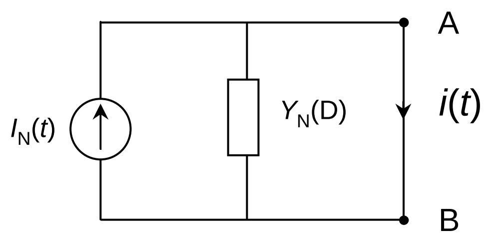
$$u(t) = \frac{i_N(t)}{Y_N(D)}$$

$$u_{TH}(t) = \frac{i_N(t)}{Y_N(D)} \quad (1)$$

b) Cortocircuitando ambos circuitos:



$$i(t) = \frac{u_{TH}(t)}{Z_{TH}(D)}$$



$$i(t) = i_N(t)$$

$$i_N(t) = \frac{u_{TH}(t)}{Z_{TH}(D)} \quad (2)$$

De las expresiones (1) y (2) $u_{TH}(t) = \dfrac{i_N(t)}{Y_N(D)} = \dfrac{\dfrac{u_{TH}(t)}{Z_{TH}(D)}}{Y_N(D)} \rightarrow 1 = Z_{TH}(D) \cdot Y_N(D)$

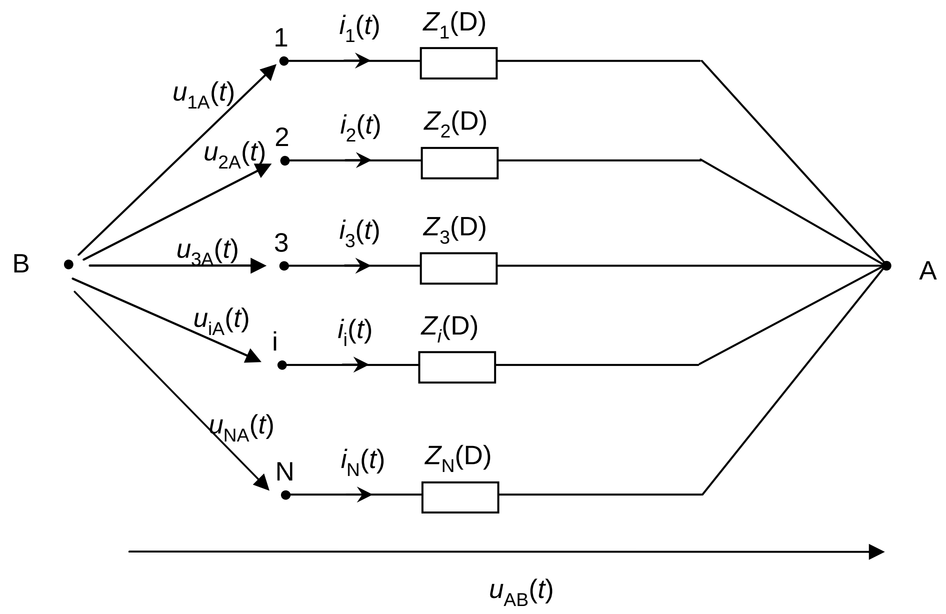
Relación entre parámetros de ambos circuitos

$$Z_{TH}(D) = \frac{1}{Y_N(D)}$$

$$Y_N(D) = \frac{1}{Z_{TH}(D)}$$

$$Z_{TH}(D) = \frac{u_{TH}(t)}{i_N(t)}$$

Gracias a este teorema, para conocer la tensión $u_{AB}(t)$ entre dos puntos A y B de un circuito basta con conocer las impedancias de las ramas que confluyen en B y las tensiones de las ramas que confluyen en A.

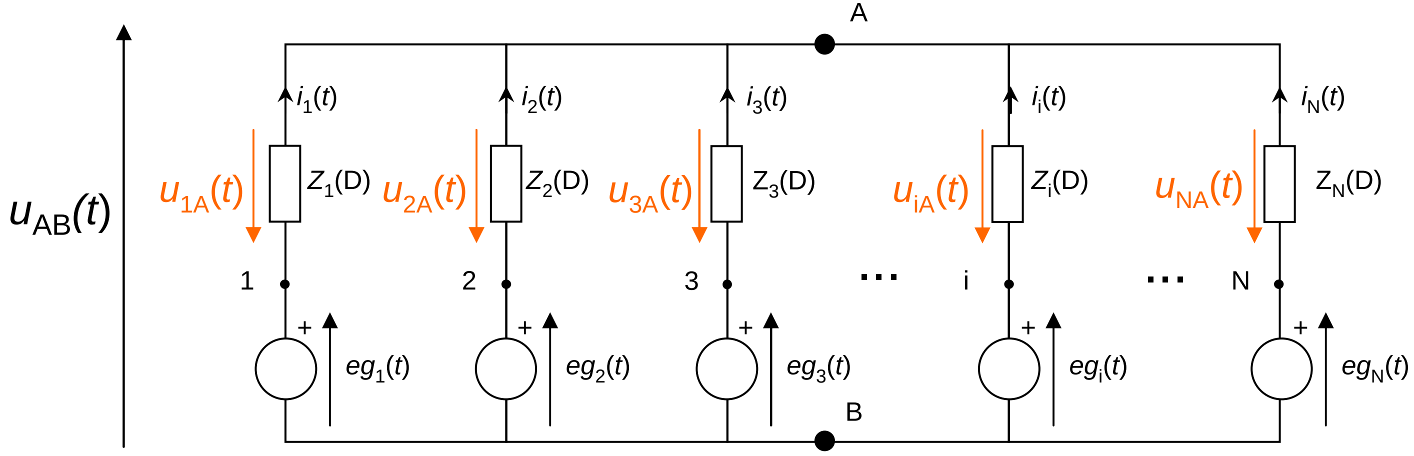


Vamos a modificar el circuito empleando la regla de la sustitución de forma que resulte más cómodo para la demostración :

-Las impedancias de las ramas se sustituyen por fuentes de tensión.

-Las tensiones que se han representado se sustituyen por impedancias.

5.5 TEOREMA DE MILLMAN (2)



La 2ª LK en cada rama:

$$u_{1A}(t) = e_{g1}(t) - u_{AB}(t)$$
$$u_{2A}(t) = e_{g2}(t) - u_{AB}(t)$$
$$u_{3A}(t) = e_{g3}(t) - u_{AB}(t)$$

....

$$u_{iA}(t) = e_{gi}(t) - u_{AB}(t)$$

....

$$u_{NA}(t) = e_{gN}(t) - u_{AB}(t)$$

La ley de Ohm en las impedancias de cada rama:

$$i_1(t) = \frac{u_{1A}(t)}{Z_1(D)} = Y_1(D)\cdot u_{1A}(t)$$
$$i_2(t) = \frac{u_{2A}(t)}{Z_2(D)} = Y_2(D)\cdot u_{2A}(t)$$
$$i_3(t) = \frac{u_{3A}(t)}{Z_3(D)} = Y_3(D)\cdot u_{3A}(t)$$

....

$$i_i(t) = \frac{u_{iA}(t)}{Z_i(D)} = Y_i(D)\cdot u_{iA}(t)$$

....

$$i_N(t) = \frac{u_{NA}(t)}{Z_N(D)} = Y_N(D)\cdot u_{NA}(t)$$

La 1ª LK en el nudo A:

$$i_1(t) = Y_1(D)\cdot\left(e_{g1}(t) - u_{AB}(t)\right) = Y_1(D)\cdot e_{g1}(t) - Y_1(D)\cdot u_{AB}(t)$$
$$i_2(t) = Y_2(D)\cdot\left(e_{g2}(t) - u_{AB}(t)\right) = Y_2(D)\cdot e_{g2}(t) - Y_2(D)\cdot u_{AB}(t)$$
$$i_3(t) = Y_3(D)\cdot\left(e_{g3}(t) - u_{AB}(t)\right) = Y_3(D)\cdot e_{g3}(t) - Y_3(D)\cdot u_{AB}(t)$$

....

$$i_i(t) = Y_i(D)\cdot\left(e_{gi}(t) - u_{AB}(t)\right) = Y_i(D)\cdot e_{gi}(t) - Y_i(D)\cdot u_{AB}(t)$$

....

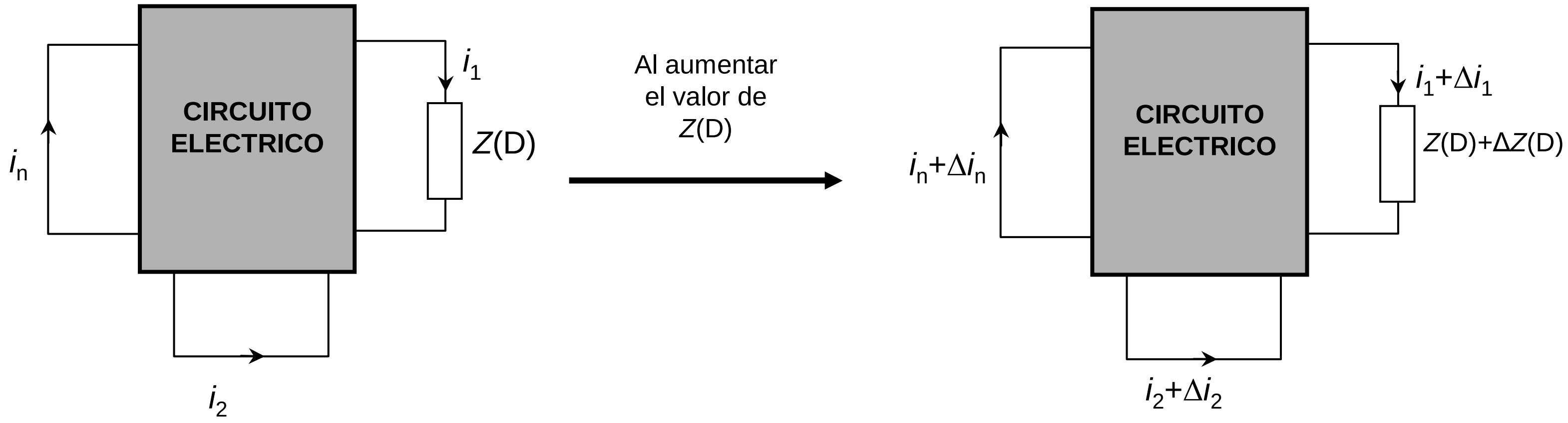
$$i_n(t) = Y_n(D)\cdot\left(e_{gn}(t) - u_{AB}(t)\right) = Y_n(D)\cdot e_{gn}(t) - Y_n(D)\cdot u_{AB}(t)$$

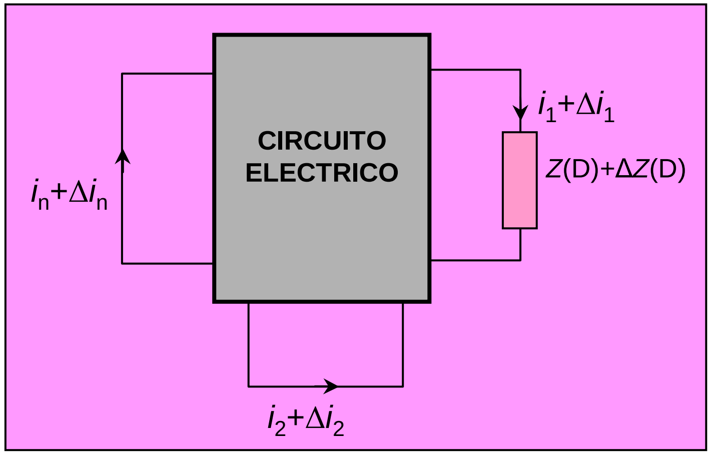
$$\sum_{i=1}^{n} i_i(t) = 0 = \sum_{i=1}^{n} Y_i(D)\cdot e_{gi}(t) - u_{AB}(t)\cdot\sum_{i=1}^{N} Y_i(D) \Rightarrow u_{AB}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i(D)\cdot e_{gi}(t)}{\sum_{i=1}^{n} Y_i(D)}$$

Gracias a la aplicación sucesiva de la regla de la sustitución se establece un teorema que nos va a permitir conocer de forma muy sencilla, (solamente resolviendo dos circuitos) como varían las corrientes de todas las ramas de un circuito al variar la impedancia de una rama.

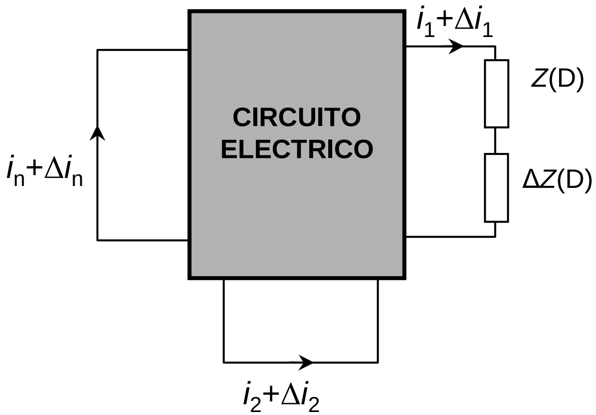
- Es muy útil, para analizar los efectos de las tolerancias de los elementos, es decir, para analizar los errores que las tolerancias inducen en el cálculo de las corrientes.
- Mediante este teorema se pueden calcular las variaciones que las corrientes de las ramas sufren al cambiar el valor de una de las impedancias del circuito, permitiendo en el diseño de un circuito tantear hasta lograr la impedancia adecuada de diseño.

DESARROLLO:

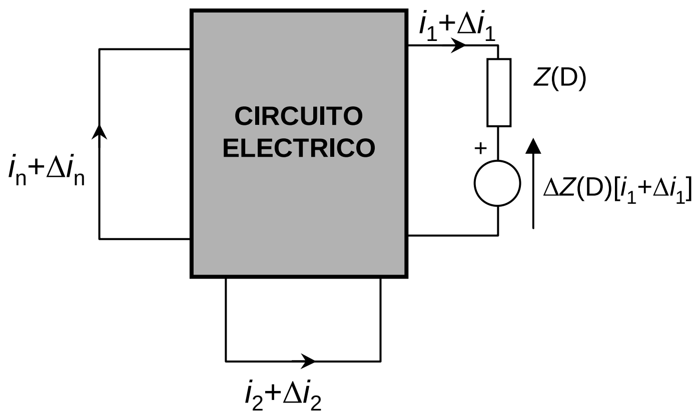




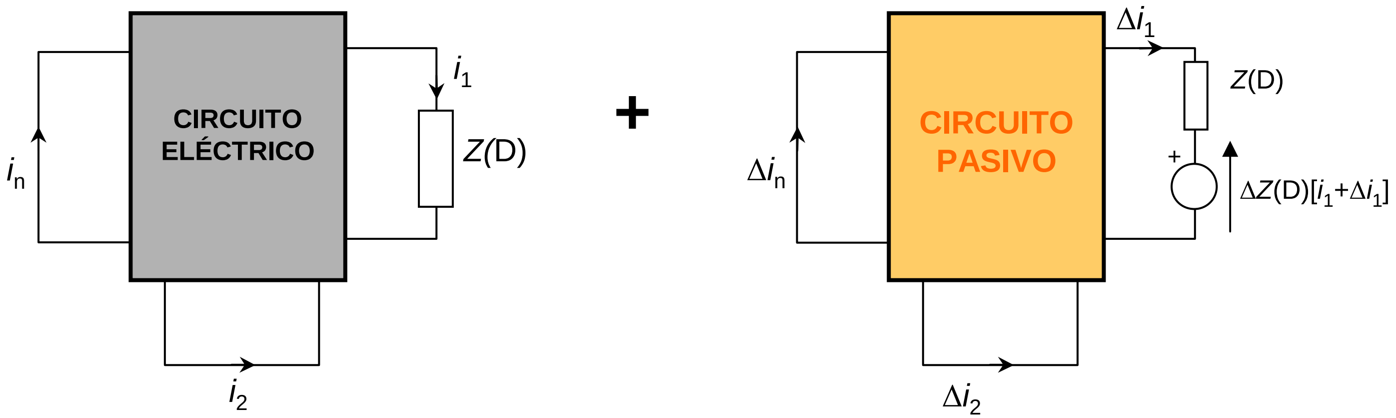
1 Se separan $Z(D)$ y $\Delta Z(D)$ en dos impedancias distintas, conectadas en serie.



2 Aplicando la regla de la sustitución en el elemento $\Delta Z(D)$, aparece la fuente de valor $\Delta Z(D)(i_1+\Delta i_1)$ en la rama modificada:



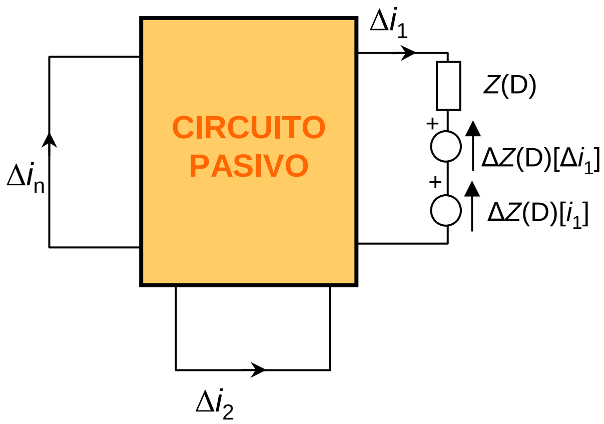
3 Se aplica el Teorema de superposición:
Por un lado se analiza el circuito que posee todas las fuentes del circuito excepto la de valor $\Delta Z(D)(i_1+\Delta i_1)$, el circuito del principio. Y por otro el circuito que solo tienen la fuente: $\Delta Z(D)(i_1+\Delta i_1)$

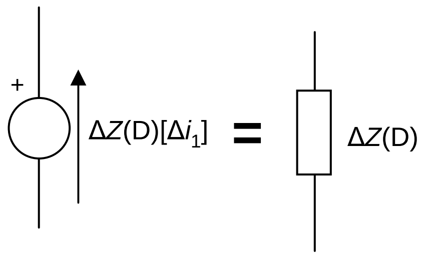


Circuito del principio

Circuito pasivo que solo tiene como elemento activo aquella fuente de alimentación obtenida de aplicar la ley de la sustitución. $\Delta Z(D)(i_1+\Delta i_1)=\Delta Z(D)\cdot i_1+\Delta Z(D)\cdot\Delta i_1$ donde los dos últimos sumandos son fuentes de tensión

4

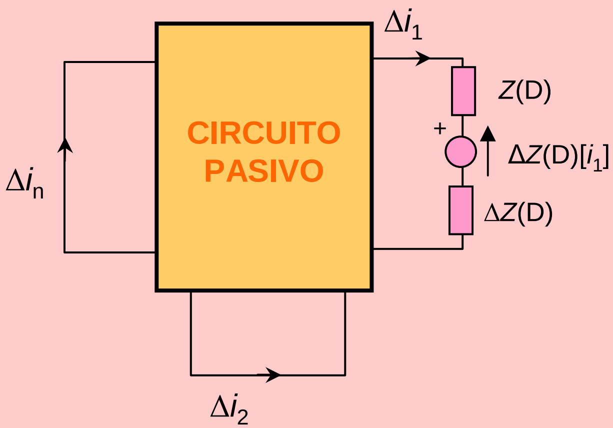




Aplicando de forma inversa la regla de la sustitución.

5

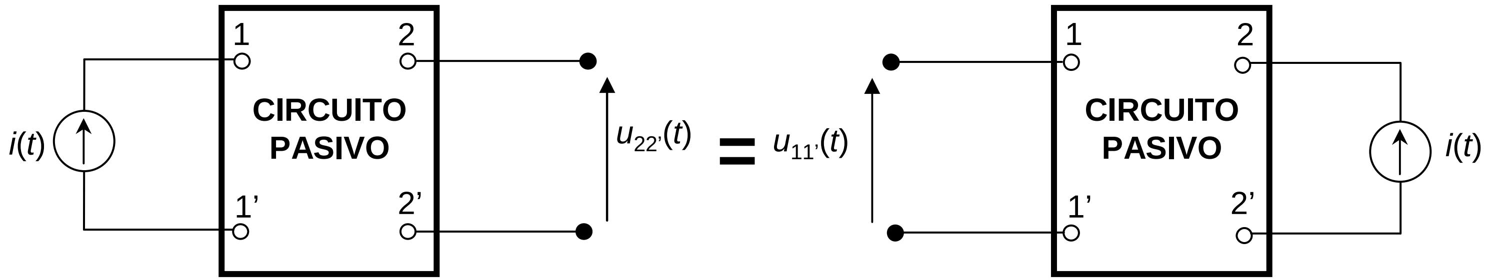
El circuito que finalmente se resolverá:



En este circuito se calcula directamente todas las Δi_n. Es decir, las variaciones de corriente en las ramas al añadir una impedancia de valor $\Delta Z(D)$ en una de las ramas.

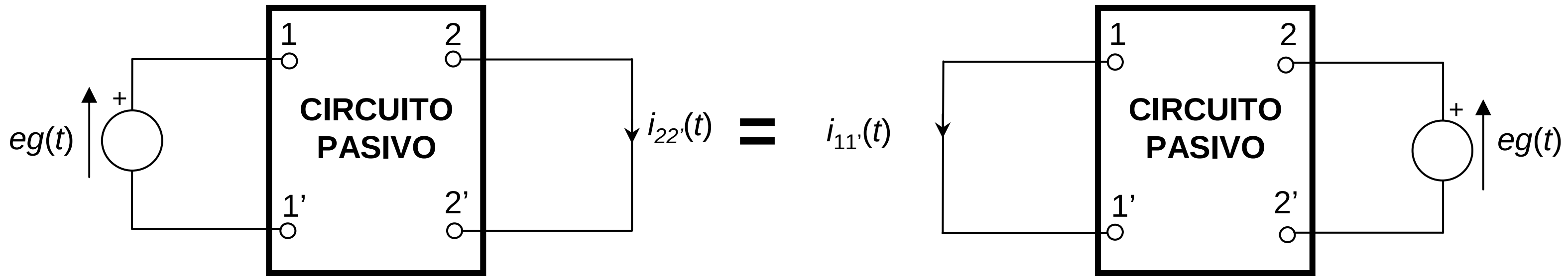
5.7 TEOREMA DE RECIPROCIDAD (1)
5.7.1 PRIMER ENUNCIADO.

Sea un circuito pasivo con cuatro terminales. Si se inserta una fuente de corriente ideal entre dos de sus terminales (1 y 1') aparece una tensión $u_{22'}(t)$ entre los puntos 2 y 2' a circuito abierto. Por otro lado, si se conecta la anterior fuente de corriente entre los terminales 2 y 2' la tensión que aparecerá entre 1 y 1' $u_{11'}(t)$ será del mismo valor que la $u_{22'}(t)$ anterior.



5.7.2 SEGUNDO ENUNCIADO.

Sea un circuito pasivo con cuatro terminales (1, 1’, 2, 2’) accesibles. Supongamos que entre los terminales 1 y 1’ se interpone una fuente de tensión y que se cortocircuitan los terminales 2 y 2’, así aparece una corriente de 2 a 2’ que vale $i_{22'}(t)$. Sin embargo si se coloca la fuente anterior entre los terminales 2 y 2’ y se cortocircuitan los terminales 1 y 1’ la corriente que circulará de 1 a 1’, $i_{11'}(t)$ será de igual valor que la $i_{22'}(t)$.



5.8 BIBLIOGRAFIA

- V.M. Parra Prieto y otros, Teoría de Circuitos, Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid 1990. Tema XVI.
- E. Alfaro Segovia, Teoría de Circuitos y Electrometría. El autor, Madrid 1970. Capitulo 7, lecciones 17, 18 y 19..
- R.L. Boylestad, Análisis Introductorio de Circuitos, Prentice Hall, México 1998. Capítulo 9.
- A. Gómez, J.A. Olivera, Problemas resueltos de Teoría de Circuitos, Paraninfo, Madrid 1990. Capitulo 3.
- P. Sánchez Barrios y otros, Teoría de Circuitos, Pearson Educación, Madrid 2007. Capitulo 1.