TEMA 4: ANÁLISIS DE REDES.

4.0 OBJETIVOS
4.1 MÉTODOS DE RESOLUCIÓN.
4.2 TRANSFORMACIÓN DE FUENTES.
    4.2.1 TRANSFORMACIÓN DE FUENTES REALES.
    4.2.2 TRANSFORMACIÓN DE FUENTES IDEALES.
4.3 ECUACIÓN DE DEFINICIÓN DE LA RAMA.
4.4 MÉTODOS CIRCULARES.
    4.4.1 MÉTODO DE LAZOS BÁSICOS.
    4.4.2 MÉTODO DE MALLAS.
4.5 MÉTODOS NODALES.
    4.5.1 MÉTODO DE GRUPOS DE CORTE BÁSICO.
    4.5.2 MÉTODO DE NUDOS.
4.6 CIRCUITOS CON ACOPLOS MAGNÉTICOS.
4.7 BIBLIOGRAFIA

4.0 OBJETIVOS

- Conocer un modelo de “rama general de circuitos”.
- Saber obtener la ecuación de definición de una rama general.
- Conocer los distintos métodos generales de Análisis de Redes.
- Estudiar la elección del método de análisis mas adecuado.
- Discriminar entre métodos circulares y nodales para la obtención de un sistema de menor dimensión.
- Entender las diferencias entre circuitos conductivos y circuitos inductivos.
- Observar como la transformación de fuentes reales puede simplificar la resolución de circuitos.

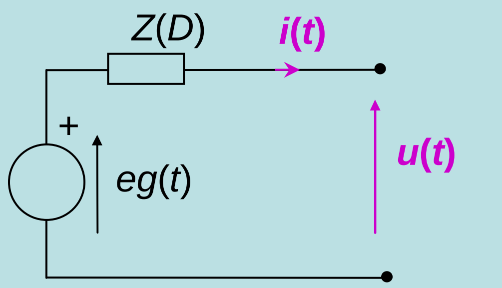
4.1 MÉTODOS DE RESOLUCIÓN.

		Ecuación	Incógnitas	Dimensión de la matriz de coeficientes	¿Hay que definir el árbol?	Fuentes del circuito
Métodos Circulares Basados en la 2ª LK	Método de **Lazos básicos**	$\left(Z^{lb}\right)\cdot\left(I^{lb}\right)=\left(Eg^{lb}\right)$	Corrientes de los lazos básicos $\boldsymbol{I}^{\mathbf{lb}}$	(r-n+1)x(r-n+1)	Si	Fuentes de Tensión
	Método de **Mallas**	$\left(Z^{m}\right)\cdot\left(I^{m}\right)=\left(Eg^{m}\right)$	Corrientes de malla $\boldsymbol{I}^{\mathbf{m}}$	(r-n+1)x(r-n+1)	No	Fuentes de Tensión
Métodos Nodales Basados en la 1ª LK	Método de **Grupos de Corte Básicos**	$\left(Y^{gcb}\right)\cdot\left(U^{gcb}\right)=\left(Ig^{gcb}\right)$	Tensiones de los grupos de corte básicos $\boldsymbol{U}^{\mathbf{gcb}}$	(n-1)x (n-1)	Si	Fuentes de Corriente
	Método de **Nudos**	$\left(Y^{n}\right)\cdot\left(U^{n}\right)=\left(Ig^{n}\right)$	Tensiones de los nudos $\boldsymbol{U}^{\mathbf{n}}$	(n-1)x (n-1)	No, Elección del nudo de referencia	Fuentes de Corriente

n: Número de nudos del circuito
r: Número de ramas del circuito

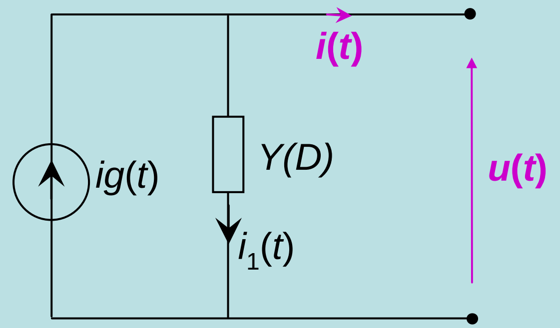
4.2 TRANSFORMACIÓN DE FUENTES. (1)

4.2.1 TRANSFORMACIÓN DE FUENTES REALES.



$$u(t) = eg(t) - Z(D) \cdot i(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{Z(D)} eg(t) - \frac{1}{Z(D)} u(t)$$



$$i(t) = ig(t) - Y(D) \cdot u(t)$$

$$u(t) = \frac{1}{Y(D)} ig(t) - \frac{1}{Y(D)} i(t)$$

Para que ambas fuentes sean equivalentes (tengan en bornes la misma tensión *u*(*t*) y corriente, *i*(*t*)), obligatoriamente deben cumplirse las siguientes expresiones:

(a) $$Z(D) = \frac{1}{Y(D)}$$

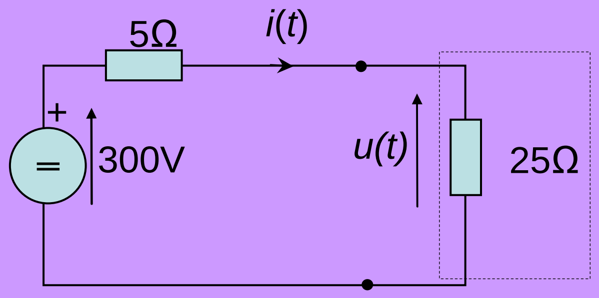
(b.1) $$i_g(t) = \frac{1}{Z(D)} eg(t) = Y(D) \cdot eg(t)$$

(b.2) $$eg(t) = \frac{1}{Y(D)} ig(t) = Z(D) \cdot ig(t)$$

4.2.1 TRANSFORMACIÓN DE FUENTES REALES.

A pesar de que las fuentes son vistas como iguales por el resto del circuito al que se conectan, su comportamiento interno es distinto.

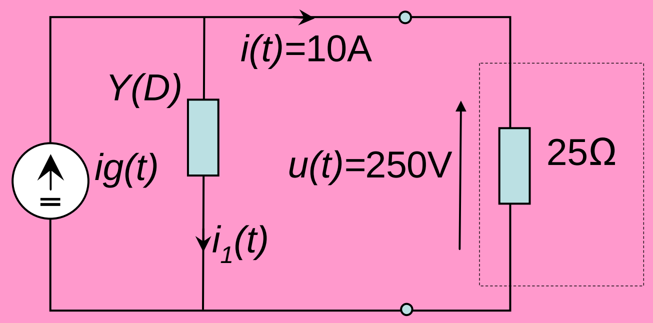
Así, por ejemplo, los rendimientos son distintos en fuentes equivalentes. A continuación se ilustra con un ejemplo:



$$\begin{cases} 300 = 30 \cdot i(t) \rightarrow i(t) = 10 \text{ A} \\ u(t) = 300 - 5 \cdot 10 = 250 \text{ V} \end{cases}$$

$$\eta = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{generada}}} = \frac{U \cdot I}{E \cdot I} = \frac{U}{E} = \frac{250}{300} = \frac{5}{6} \approx \%84$$

$\neq$



$$i(t) = ig(t) = \frac{eg(t)}{Z(\text{D})} = \frac{300}{5} = 60\text{A}$$

$$Y(\text{D}) = \frac{1}{Z(\text{D})} = \frac{1}{5} \text{ S}$$

$$i_1(t) = Y(\text{D}) \cdot u(t) = \frac{1}{5} \cdot 250 = 50\text{A}$$

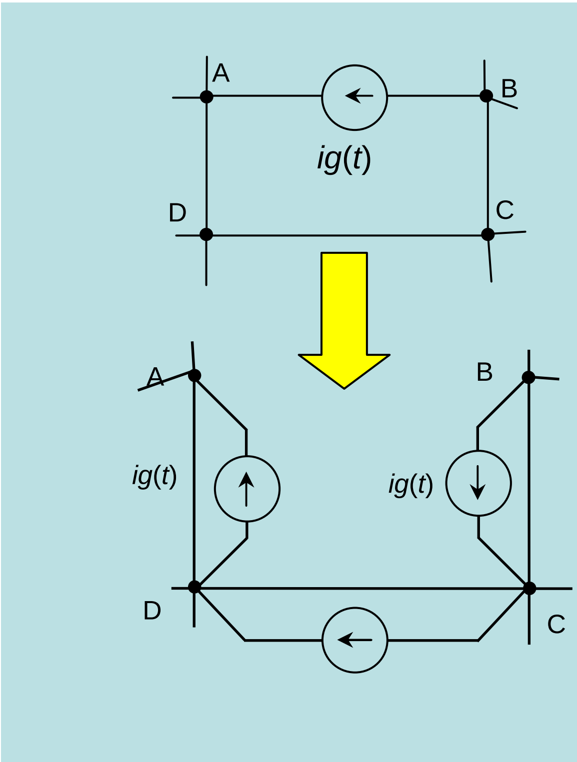
$$\eta = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{generada}}} = \frac{I \cdot U}{I_g \cdot U} = \frac{I}{I_g} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6} \approx \%17$$

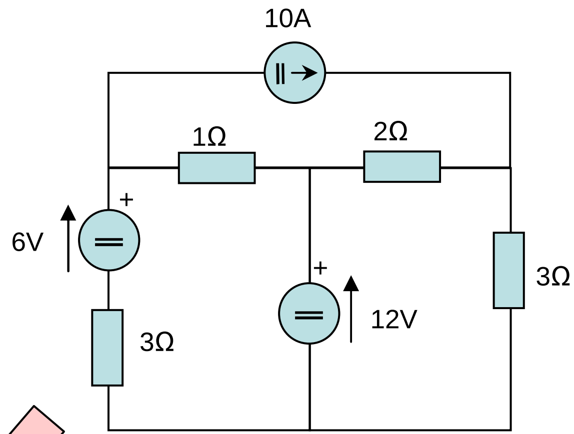
4.2 TRANSFORMACIÓN DE FUENTES. (3)
4.2.1 TRANSFORMACIÓN DE FUENTES IDEALES.

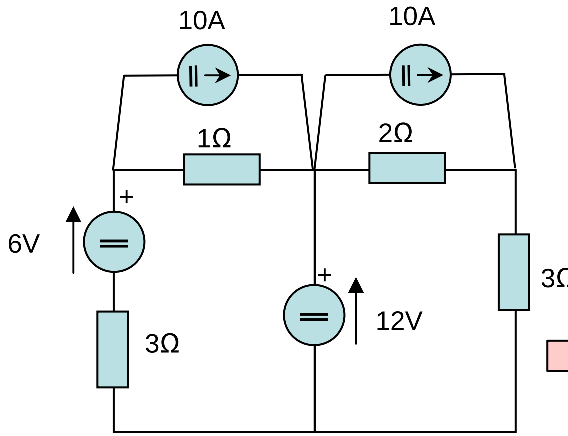
PARA TRANSFORMAR FUENTES IDEALES ES NECESARIO **TRANSFORMAR PREVIAMENTE LA GEOMETRIA DEL CIRCUITO**.

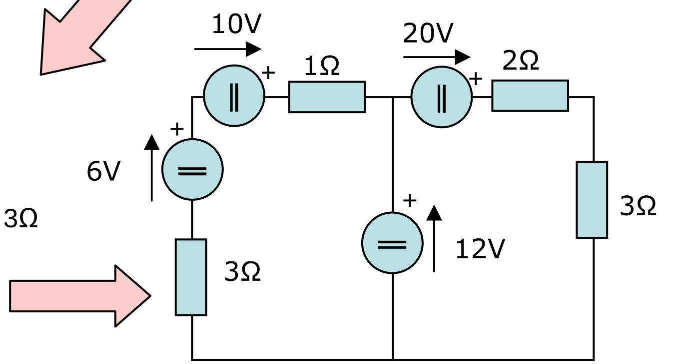
Fuente de Corriente Ideal:

Se ha de transformar la geometría del circuito de forma que en paralelo a la fuente aparezcan impedancias, teniendo además en cuenta que el resto del circuito no se percate de la transformación realizada.







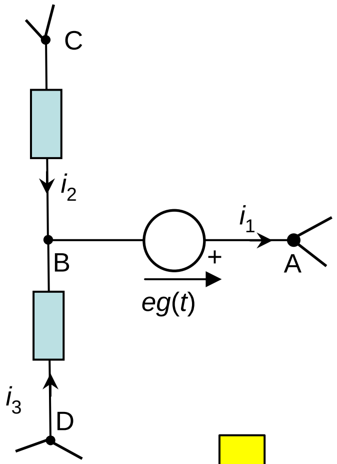


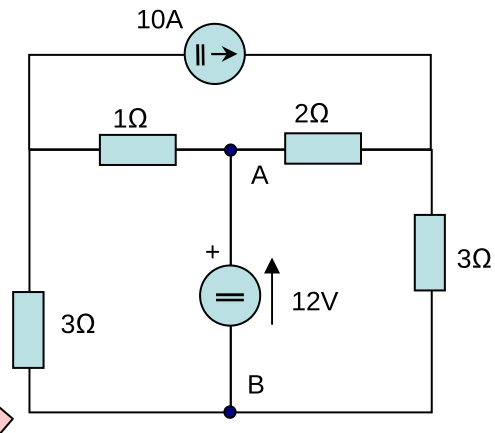
4.2 TRANSFORMACIÓN DE FUENTES. (4)

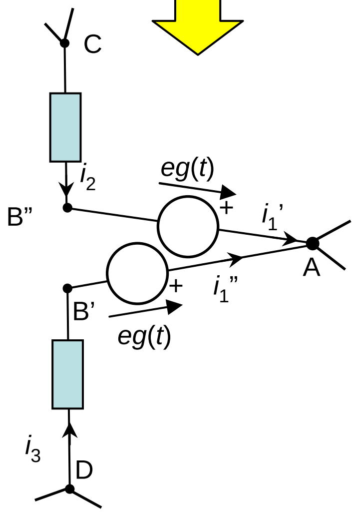
4.2.1 TRANSFORMACIÓN DE FUENTES IDEALES.

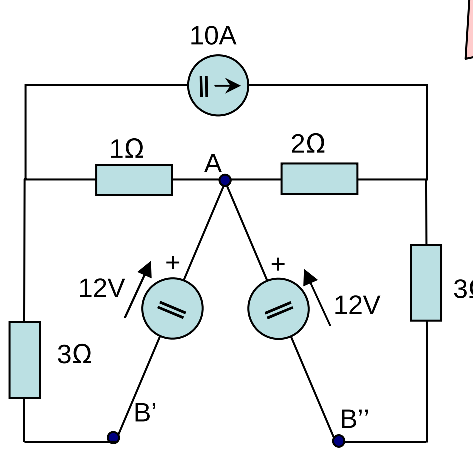
Fuente de Tensión Ideal:

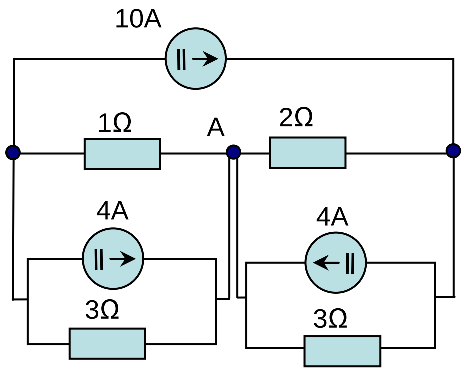
Se ha de transformar la geometría del circuito de forma que en serie con la fuente aparezcan impedancias, teniendo además en cuenta que el resto del circuito no se percate de la transformación realizada.



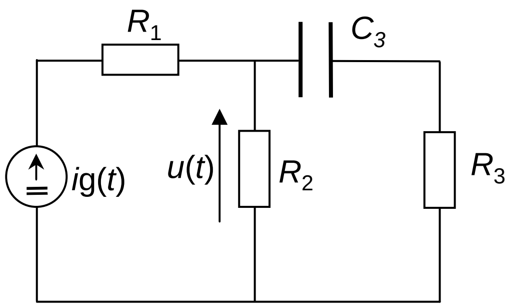


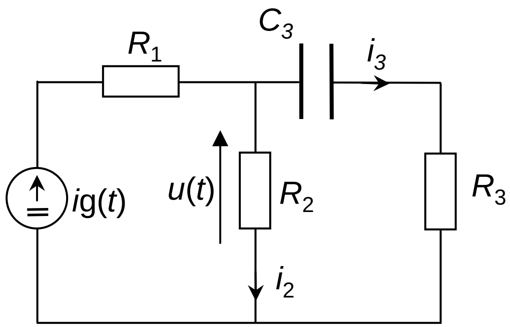


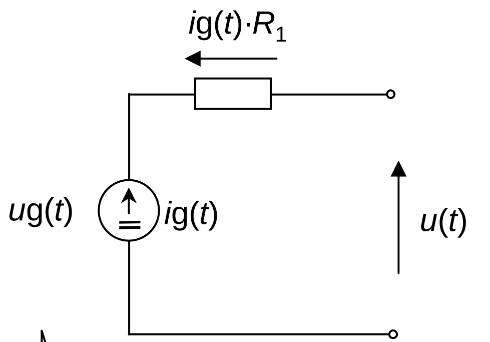




Cualquier elemento, activo o pasivo, en serie con una fuente ideal de corriente se puede eliminar del circuito, para calcular las corrientes del circuito. Una vez resuelto el circuito, el elemento, debe ser recuperado para calcular la tensión en bornes de la fuente de corriente, de la rama en la que estaba situado.





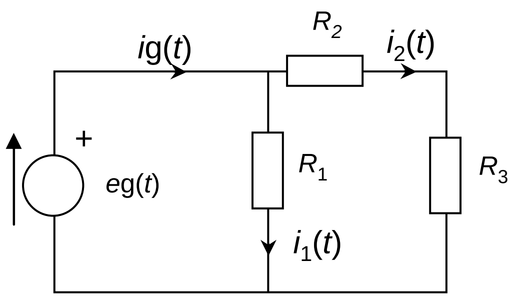


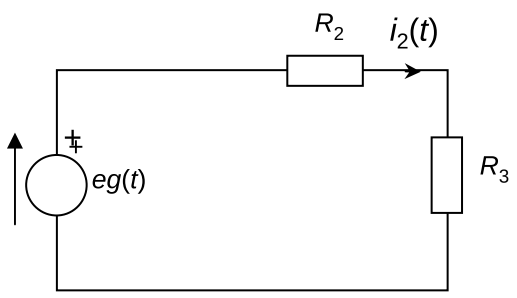
$$\left.\begin{aligned} i_2(t)+i_3(t) &= ig(t) \\ u(t) &= i_2(t)\cdot R_2 \end{aligned}\right\}$$

$u(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$ conocidos

$$ug(t)=u(t)-ig(t)\cdot R_1$$

Cualquier elemento activo o pasivo en paralelo con una fuente de tensión, puede eliminarse para el cálculo de las tensiones. Una vez resuelto el circuito debe ser recuperado para el cálculo de corrientes.





$$i_1(t) = \frac{eg(t)}{R_1}$$

y

$$i_2(t) = \frac{eg(t)}{R_2 + R_3}$$

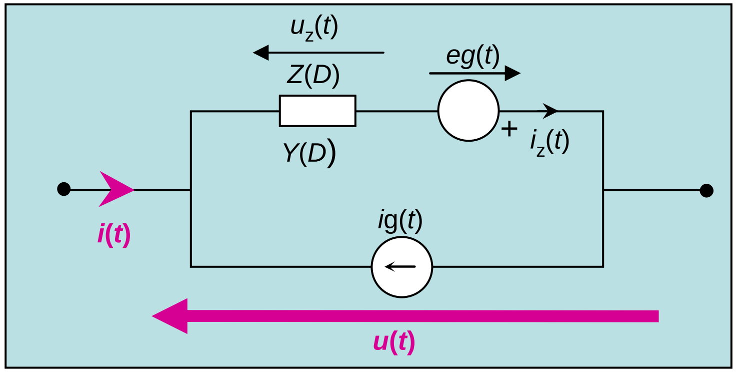
Pero ¡cuidado!

$$ig(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

4.3 ECUACIÓN DE DEFINICIÓN DE LA RAMA.

LAS INCOGNITAS DE CADA RAMA SON DOS: TENSIÓN DE RAMA $u(t)$ Y CORRIENTE DE RAMA $i(t)$

RAMA GENERAL DEL CIRCUITO: Aquella rama que contiene todos los elementos susceptibles de pertenecer a ella. Su esquema aparece a continuación, y de él se obtendrán las ecuaciones que la definen aplicando las leyes de Kirchhoff.



$$\left.\begin{aligned} u(t) &= u_Z(t) - eg(t) \\ u_Z(t) &= i_Z(t) \bullet Z(D) \\ i_Z(t) &= i(t) + ig(t) \end{aligned}\right\}$$

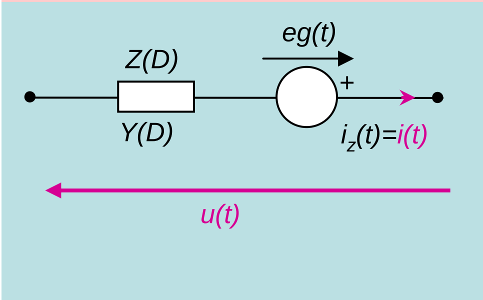
ECUACIONES DE DEFINICIÓN DE LA RAMA

$$u(t) = Z(D)\left[i(t) + ig(t)\right] - eg(t)$$

$$i(t) = Y(D)\left[u(t) + eg(t)\right] - ig(t)$$

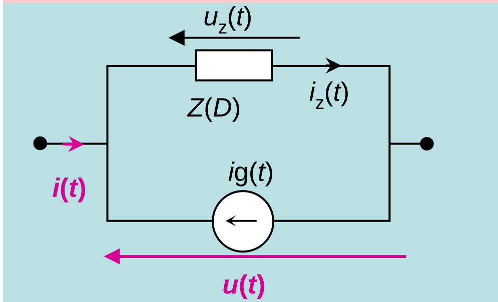
De la rama general y de sus ecuaciones de definición podremos obtener todos los casos particulares de configuraciones de ramas, sirvan de ejemplo:

Cuando $ig(t)=0$



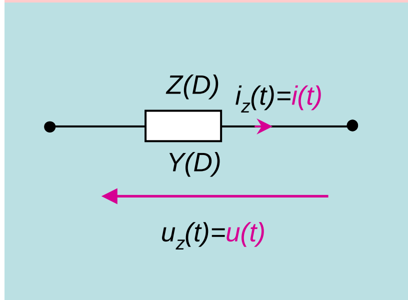
FUENTE REAL DE TENSIÓN

Cuando $eg(t)=0$



FUENTE REAL DE CORRIENTE

$ig(t)=eg(t)=0$



RAMA PASIVA

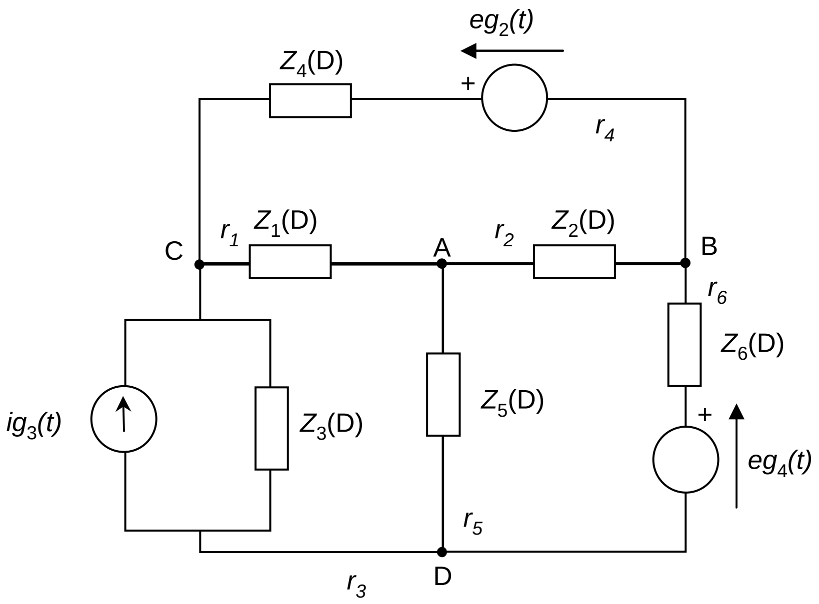
4.4 MÉTODOS CIRCULARES (1)

		Ecuación	Incógnitas	Dimensión de la matriz de coeficientes	¿Hay que definir el árbol?	Fuentes del circuito
Métodos Circulares Basados en la 2ª LK	Método de **Lazos básicos**	$\left(Z^{lb}\right)\cdot\left(I^{lb}\right)=\left(Eg^{lb}\right)$	Corrientes de los lazos básicos $\boldsymbol{I}^{\mathbf{lb}}$	(r-n+1)x(r-n+1)	Si	Fuentes de Tensión
	Método de **Mallas**	$\left(Z^{m}\right)\cdot\left(I^{m}\right)=\left(Eg^{m}\right)$	Corrientes de malla $\boldsymbol{I}^{\mathbf{m}}$	(r-n+1)x(r-n+1)	No	Fuentes de Tensión

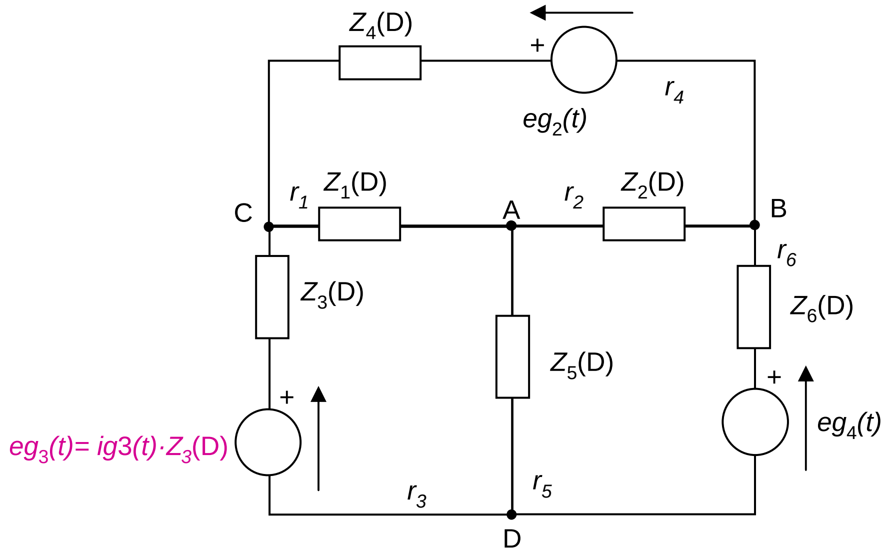
PASOS A SEGUIR:

- Transformar las fuentes de corriente en fuentes de tensión.
- Elegir el árbol del circuito (n-1 ramas, abierto y conexo).
- Dibujar los lazos básicos.
- Asignar a cada lazo básico una corriente de lazo (sentido de la corriente de la rama eslabón).
- Montar sistema matricial.
- Resolver sistema matricial: Obtener las i^{lb}
- Obtener las corrientes de rama: i^{r}, a partir de las ecuaciones que relacionan las corrientes de lazo y las de las ramas.
- Obtener las tensiones de rama, u^{r}, a partir de las ecuaciones de definición de las ramas.

4.4.1 MÉTODO DE LAZOS BÁSICOS (II)



Transformar fuentes de corriente en fuentes de tensión:

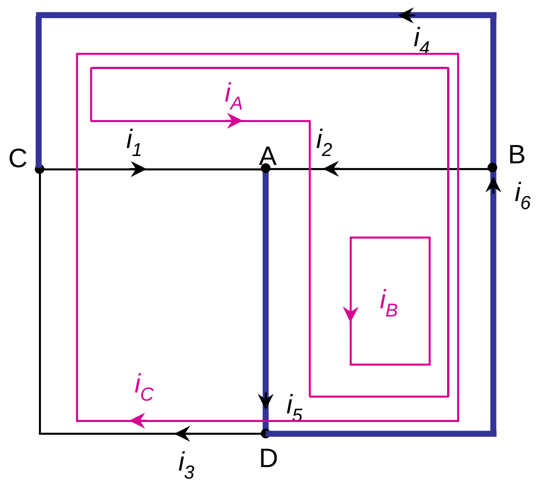


Elección del árbol (azul), lazos básicos (rosa) y corrientes de lazos: i_A, i_B, i_C.

n=4; r=6;

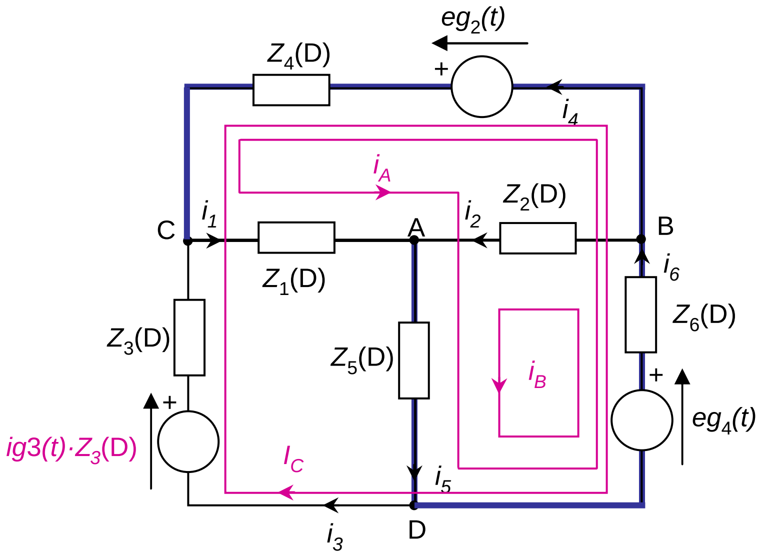
r-n+1=6-4+1=3 nº lazos básicos

n-1=3 nº ramas del árbol



Observaciones:

- Cada lazo básico solo tendrá una rama eslabón (rama del coárbol).
- La corriente del lazo coincide con la corriente del eslabón.
- Elección del árbol: Dejar como eslabones aquellas ramas de las que queremos conocer la corriente; Elegir como ramas del árbol aquellas que tienen fuentes ideales de tensión, así en la matriz de coeficientes aparecerán ceros fuera de la diagonal principal facilitando la resolución del sistema matricial.



Construcción del sistema matricial:

•Dimensión: (r-n+1)x(r-n+1)=3x3

•Forma: $\left(Z^{lb}\right)\cdot\left(I^{lb}\right)=\left(Eg^{lb}\right)$

Matriz de impedancias:

$$\begin{bmatrix} Z_1(D)+Z_5(D)+Z_6(D)+Z_4(D) & Z_5(D)+Z_6(D) & -Z_4(D)-Z_6(D) \\ Z_5(D)+Z_6(D) & Z_5(D)+Z_2(D)+Z_6(D) & -Z_6(D) \\ -Z_4(D)-Z_6(D) & -Z_6(D) & Z_3(D)+Z_6(D)+Z_4(D) \end{bmatrix}$$

- ***Los elementos de la diagonal principal, Z_{ii}*(D),** son la suma de las impedancias de las ramas de cada lazo.
- ***Los términos de fuera de la diagonal principal Z_{ij}*** **(D)** son la suma de las impedancias de las ramas compartidas por dos lazos i y j. Los términos serán positivos si las corrientes de lazo coinciden en polaridad al pasar por el elemento y negativos en caso contrario.
- La matriz es simétrica.

Vector de fuentes de tensión:

$$\begin{bmatrix} eg_2(t)+eg_4(t) \\ eg_4(t) \\ -eg_4(t)-eg_2(t)+ig_3(t)\cdot Z_3(D) \end{bmatrix}$$

Cada término del vector se obtiene haciendo la suma de las fuentes de tensión de cada lazo. El signo es positivo si la corriente de lazo coincide con la polaridad de la fuente y negativo en caso contrario.

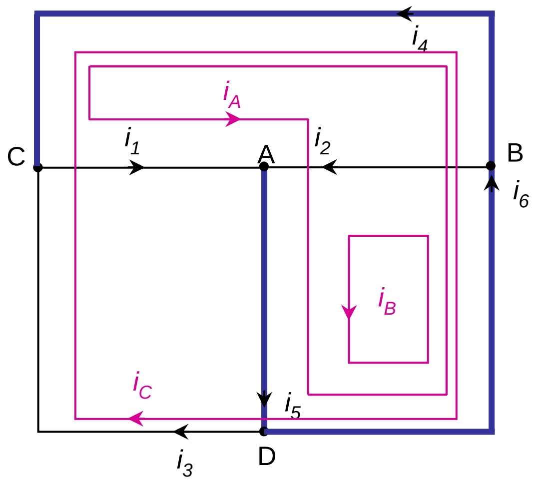
Vector de incógnitas:

Son las corrientes de lazo. $\begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix}$

Sistema Matricial:

$$\begin{bmatrix} Z_1(D)+Z_5(D)+Z_6(D)+Z_4(D) & Z_5(D)+Z_6(D) & -Z_4(D)-Z_6(D) \\ Z_5(D)+Z_6(D) & Z_5(D)+Z_2(D)+Z_6(D) & -Z_6(D) \\ -Z_4(D)-Z_6(D) & -Z_6(D) & Z_3(D)+Z_6(D)+Z_4(D) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eg_2(t)+eg_4(t) \\ eg_4(t) \\ -eg_4(t)-eg_2(t)+ig_3(t)\cdot Z_3(D) \end{bmatrix}$$

Al resolver el sistema matricial se obtienen las corrientes de lazo. Las de las ramas se obtendrán a partir de las ecuaciones que relacionan las corrientes de rama y de lazo que en este ejemplo son las siguientes:



$$\begin{cases} i_1 = i_A \\ i_2 = i_B \\ i_3 = i_C \\ i_4 = i_A - i_C \\ i_5 = i_A + i_B \\ i_6 = i_A + i_B - i_C \end{cases}$$

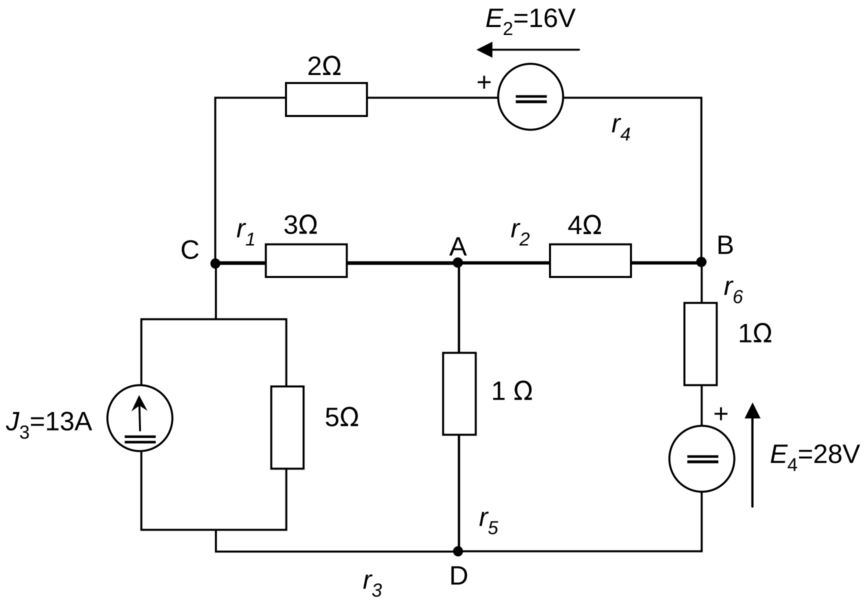
Se determinan las corrientes de cada rama como suma o resta de las corrientes de lazo que la contienen. Si la corriente de lazo es de igual polaridad que la corriente de rama, se le da signo positivo, si no signo negativo.

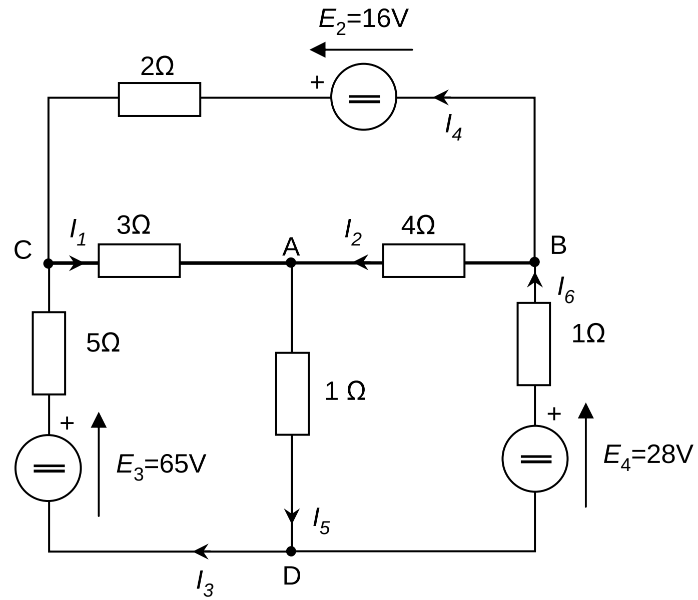
Como se puede apreciar las corrientes de los eslabones (ramas que no son del árbol) se obtienen directamente al resolver el sistema matricial ya que las corrientes de lazo coinciden con las corrientes de los eslabones.

Una vez conocidas la corrientes de todas las ramas se calculan las tensiones de rama con las ecuaciones de rama.

4.4 MÉTODOS CIRCULARES (6)
4.4.1 MÉTODO DE LAZOS BÁSICOS (V)

Ejemplo: Sirva de ejemplo un circuito con la misma topología que el anterior pero con fuentes de continua.

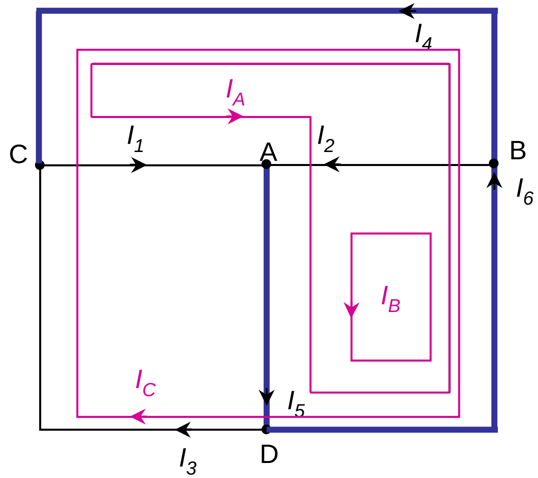




n=4; r=6;

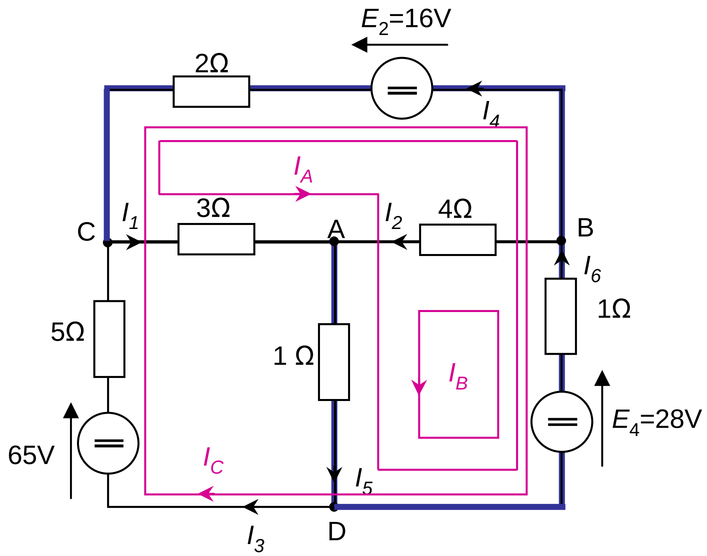
r-n+1=6-4+1=3 nº lazos básicos

n-1=3 nº ramas del árbol



$$I_1 = I_A$$
$$I_2 = I_B$$
$$I_3 = I_C$$
$$I_4 = I_A - I_C$$
$$I_5 = I_A + I_B$$
$$I_6 = I_A + I_B - I_C$$

4.4 MÉTODOS CIRCULARES (7)
4.4.1 MÉTODO DE LAZOS BÁSICOS (VI)



$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -1 \\ -3 & -1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28+16 \\ 28 \\ 65-16-28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 28 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Resolvemos por CRAMER; se obtienen las corrientes de lazo:

$$\Delta R = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -1 \\ -3 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 255$$

$$I_A = I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 44 & 2 & -3 \\ 28 & 6 & -1 \\ 21 & -1 & 8 \end{vmatrix}}{255} = 8\text{A}$$

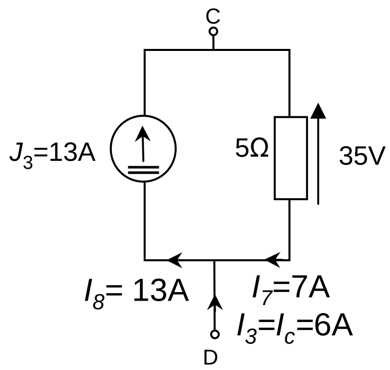
$$I_B = I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 44 & -3 \\ 2 & 28 & -1 \\ -3 & 21 & 8 \end{vmatrix}}{255} = 3\text{A}$$

$$I_C = I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 44 \\ 2 & 6 & 28 \\ -3 & -1 & 21 \end{vmatrix}}{255} = 8\text{A}$$

Se obtienen las corrientes de rama:

$$\begin{array}{llllll} I_1 = & I_A & & & = 8\text{A} \\ I_2 = & & I_B & & = 3\text{A} \\ I_3 = & & & I_C & = 6\text{A} \\ I_4 = & I_A & -I_C & & = 2\text{A} \\ I_5 = & I_A & +I_B & & = 11\text{A} \\ I_6 = & I_A & +I_B & -I_C & = 5\text{A} \end{array}$$

Se deshace el cambio en la fuentes de intensidad:



Se obtienen las tensiones de rama:

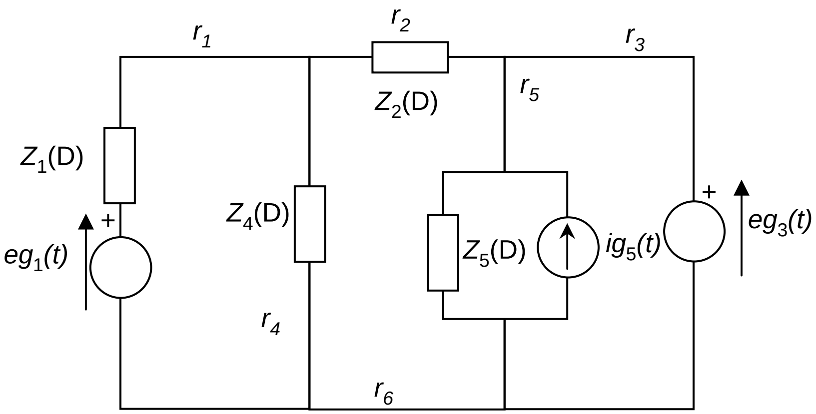
$$\begin{cases} U_1 = 3 \cdot 8 = 24\text{V} \\ U_2 = 3 \cdot 4 = 12\text{V} \\ U_3 = 65 - 5 \cdot 6 = 35\text{V} \\ U_4 = 16 - 2 \cdot 2 = 12\text{V} \\ U_5 = 1 \cdot 11 = 11\text{V} \\ U_6 = 28 - 1 \cdot 5 = 23\text{V} \end{cases}$$

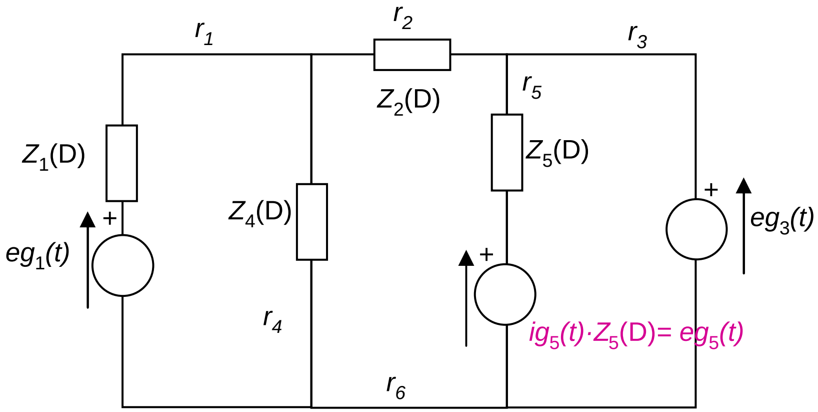
PASOS A SEGUIR:

- Transformar las fuentes de corriente en fuentes de tensión.
- Dibujar las mallas(lazos que no contienen a otro en su interior) y , cuyo número es: n-r+1
- Asignar a cada malla una corriente de malla. Aquí hay dos opciones: Dar a las corrientes de malla el sentido de la corriente de las ramas exteriores, o dar a todas el mismo sentido. De esta última forma todos los elementos de la matriz de impedancias fuera de la diagonal principal son negativos. Montar el sistema matricial.
- Resolver el sistema matricial: Obteniendo las i^{m}
- Obtener las corrientes de las ramas: i^{r}, con las ecuaciones que relacionan las corrientes de rama y las de malla.
- Obtener las tensiones de las ramas; u^{r} a partir de las ecuaciones de definición de las ramas.

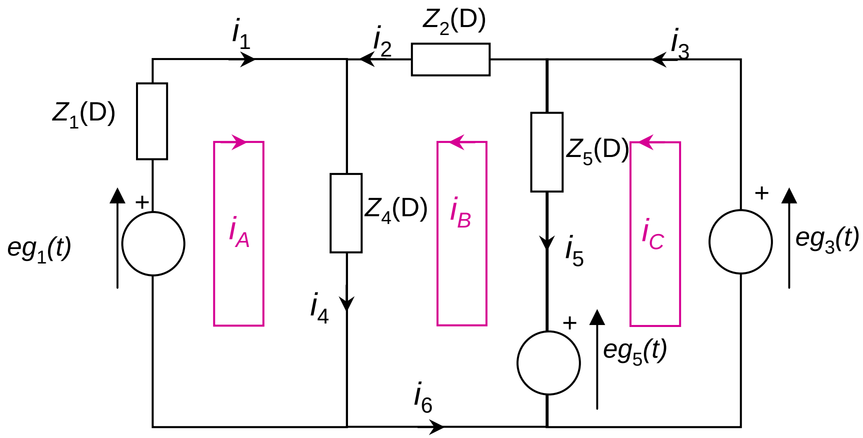
4.4 MÉTODOS CIRCULARES (9)
4.4.2 MÉTODO DE MALLAS (II)

Transformar fuentes de corriente en fuentes de tensión:





Pasamos a elegir las mallas que son aquellos lazos que no contienen otro en su interior. Coinciden con las ventanas del circuito, y su número será: r-n+1=6-4+1=3



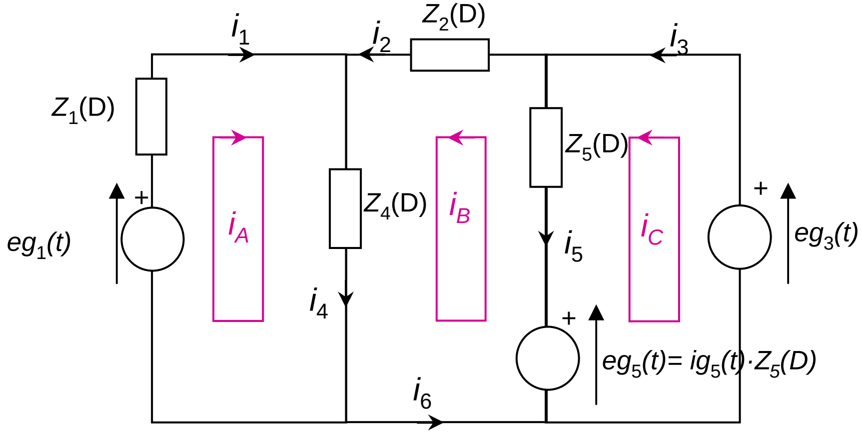
Las corrientes de malla coinciden con las corrientes de las ramas exteriores del circuito. Elegimos las corrientes de malla en el mismo sentido que las ramas que las definen.

Este método de mallas es adecuado cuando se desea conocer las corrientes exteriores del circuito. Ya que se obtienen directamente al resolver el sistema matricial.

Construcción del sistema matricial:

•Dimensión: (r-n+1)x(r-n+1)=3x3

•Forma: $\left(Z^{m}\right)\cdot\left(I^{m}\right)=\left(Eg^{m}\right)$



Matriz de impedancias:

$$\begin{bmatrix} Z_1(D)+Z_4(D) & Z_4(D) & 0 \\ Z_4(D) & Z_4(D)+Z_2(D)+Z_5(D) & -Z_5(D) \\ 0 & -Z_5(D) & Z_5(D) \end{bmatrix}$$

Los elementos de la diagonal principal, Z_{ii}(D), son la suma de las impedancias de las ramas de cada malla.
***Los términos de fuera de la diagonal principal Z_{ij}* (D)** son la suma de las impedancias de las ramas compartidas por dos mallas i y j. Los términos serán positivos si las dos corrientes de malla coinciden en polaridad al pasar por la impedancia y negativos en caso contrario. Si se toman todas las corrientes de malla en el mismo sentido, todos los elementos de fuera de la diagonal principal son negativos.
La matriz es simétrica. Nótese que aparecen ceros fuera de la diagonal principal cuando las mallas no tienen ramas en común, por lo que es un método bueno para resolver circuitos en forma de escalera, tal y como el del ejemplo.

Vector de fuentes de tensión:

$$\begin{bmatrix} eg_1(t) \\ ig_5(t)\cdot Z_5(D) \\ eg_3(t)-ig_5(t)\cdot Z_5(D) \end{bmatrix}$$

Cada término del vector se obtiene haciendo la suma de las fuentes de tensión de cada malla. El signo es positivo si la corriente de malla coincide con la polaridad de la fuente y negativo en caso contrario.

Vector de incógnitas:

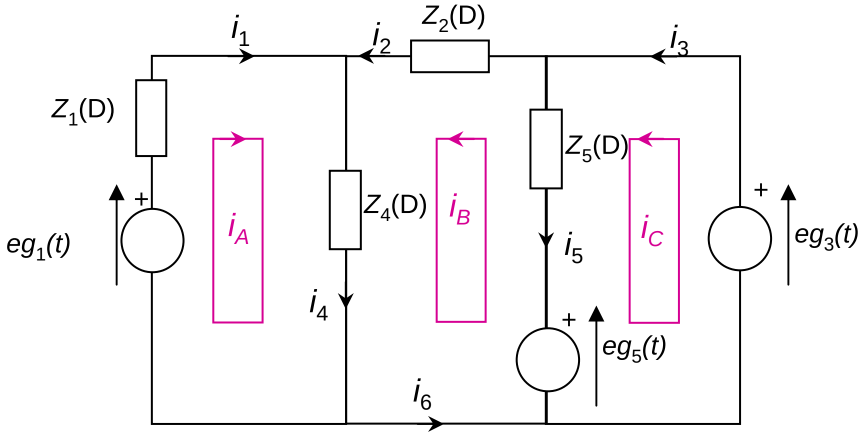
Son las corrientes de malla.

$$\begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix}$$

Sistema Matricial:

$$\begin{bmatrix} Z_1(D)+Z_4(D) & Z_4(D) & 0 \\ Z_4(D) & Z_4(D)+Z_2(D)+Z_5(D) & -Z_5(D) \\ 0 & -Z_5(D) & Z_5(D) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eg_1(t) \\ ig_5(t) \cdot Z_5(D) \\ eg_3(t) - ig_5(t) \cdot Z_5(D) \end{bmatrix}$$

Al resolver el sistema matricial se obtienen las corrientes de malla. Las de las ramas se obtendrán a partir de las ecuaciones que relacionan las corrientes de rama y de malla que en este ejemplo son las siguientes:

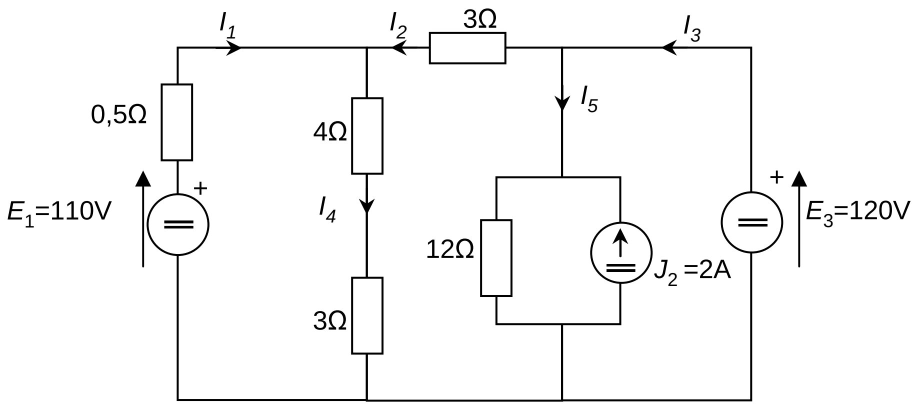


$$\begin{cases} i_1 = i_A \\ i_2 = i_B \\ i_3 = i_C \\ i_4 = i_A + i_B \\ i_5 = i_C - i_B \\ i_6 = i_2 = i_B \end{cases}$$

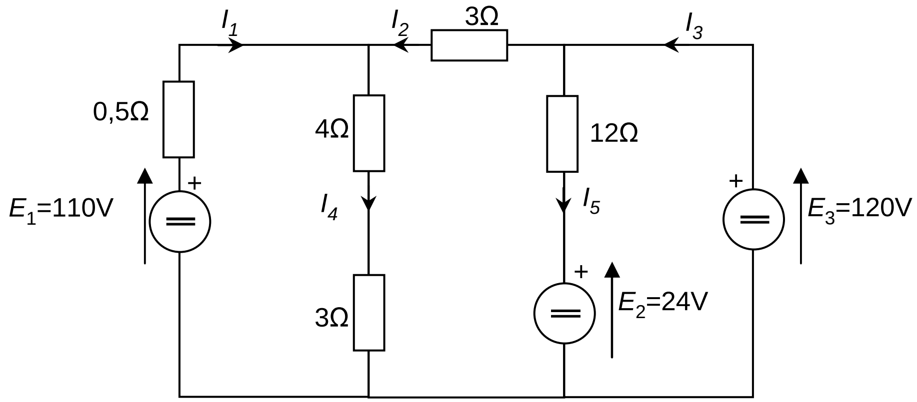
Se determinan las corrientes de cada rama como suma o resta de las corrientes de malla que la contienen. Si la corriente de lazo es de igual polaridad que la corriente de rama, se le da signo positivo, si no signo negativo.

Una vez conocidas la corrientes de todas las ramas. Se calculan las tensiones de rama con las ecuaciones de rama.

Ejemplo: Sirva de ejemplo un circuito con similar topología que el anterior alimentado con fuentes de continua.

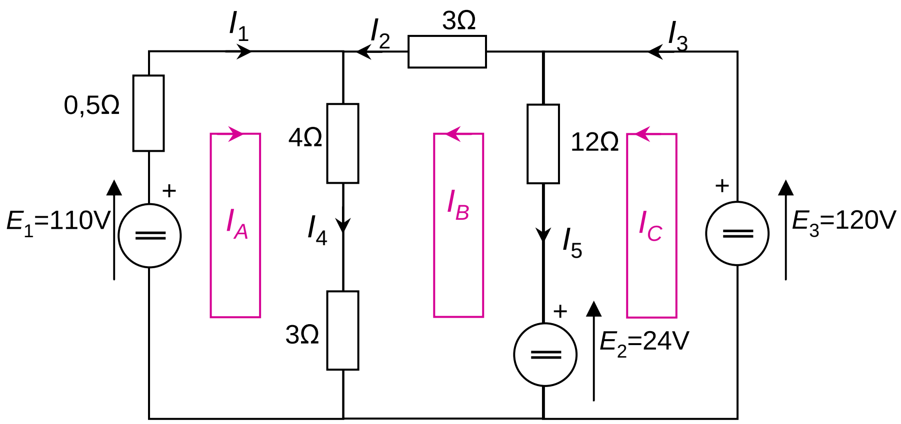


Se transforma la fuente de corriente en fuente de tensión:



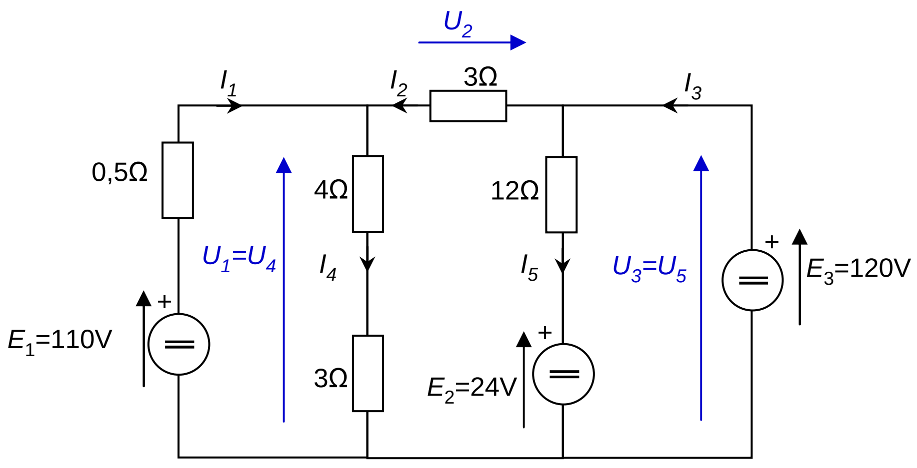
Se eligen las mallas, cuyo número será:

r-n+1=6-4+1=3



Las corrientes de malla coinciden con las corrientes de las ramas exteriores del circuito: $I_3=I_C$, $I_1=I_A$,$I_B=I_2$

$$\begin{bmatrix} 7{,}5 & 7 & 0 \\ 7 & 22 & -12 \\ 0 & -12 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 24 \\ 120-24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 24 \\ 96 \end{bmatrix}$$



Por CRAMER planteamos la resolución de I_B

$$I_B = I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7{,}5 & 110 & 0 \\ 7 & 24 & -12 \\ 0 & 96 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7{,}5 & 7 & 0 \\ 7 & 22 & -12 \\ 0 & -12 & 12 \end{vmatrix}} = 5\text{A}$$

Las otras dos corrientes se pueden obtener más fácilmente desarrollando la primera y la tercera fila del sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} 7{,}5 & 7 & 0 \\ 7 & 22 & -12 \\ 0 & -12 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 24 \\ 120-24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 24 \\ 96 \end{bmatrix}$$

$$7{,}5 \cdot I_A + 7 \cdot I_B = 110 \rightarrow I_A = \frac{110 - 7 \cdot 5}{7{,}5} = 10\text{A}$$

$$-12 \cdot I_B + 12 \cdot I_C = 96 \rightarrow I_C = \frac{96 + 12 \cdot 5}{12} = 13\text{A}$$

Las corrientes de las ramas se obtienen a partir de las corriente de malla:

$$\begin{cases} I_1 = I_A & = 10\text{A} \\ I_2 = I_B & = 5\text{A} \\ I_3 = I_C & = 13\text{A} \\ I_4 = I_A + I_B & = 15\text{A} \\ I_5 = I_C - I_B & = 8\text{A} \\ I_6 = I_2 = I_B = 5\text{A} & \end{cases}$$

Las Tensiones de las ramas las obtendremos de las ecuaciones de definición de las ramas.

$$\begin{cases} U_1 = 110 - 10 \cdot 0{,}5 = 105\text{V} \\ U_2 = 3 \cdot 5 = 15\text{V} \\ U_3 = 120\text{V} \\ U_4 = U_1 = 7 \cdot 15 = 105\text{V} \\ U_5 = U_3 = 24 - 12 \cdot 12 = -120\text{V} \\ U_6 = 0\text{V} \end{cases}$$

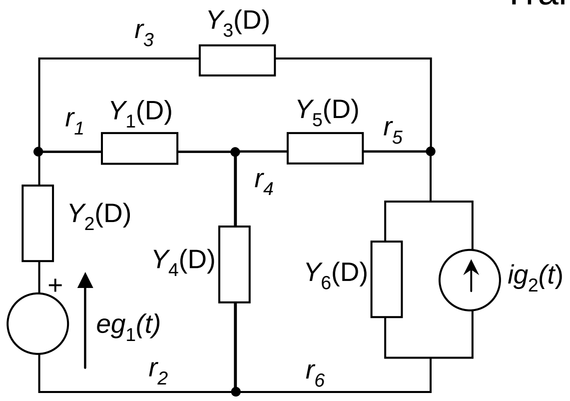
4.5 MÉTODOS NODALES (1)

		Ecuación	Incógnitas	Dimensión de la matriz de coeficientes	¿Hay que definir el árbol?	Fuentes del circuito
Métodos Nodales Basados en la 1ª LK	Método de **Grupos de Corte Básicos**	$\left(Y^{\mathrm{gcb}}\right)\cdot\left(U^{\mathrm{gcb}}\right)=\left(Ig^{\mathrm{gcb}}\right)$	Tensiones de los grupos de corte básicos $\boldsymbol{U}^{\mathbf{gcb}}$	(n-1)x (n-1)	Si	Fuentes de Corriente
	Método de **Nudos**	$\left(Y^{\mathrm{n}}\right)\cdot\left(U^{\mathrm{n}}\right)=\left(Ig^{n}\right)$	Tensiones de los nudos $\boldsymbol{U}^{\mathbf{n}}$	(n-1)x (n-1)	No, Elección del nudo de referencia	Fuentes de Corriente

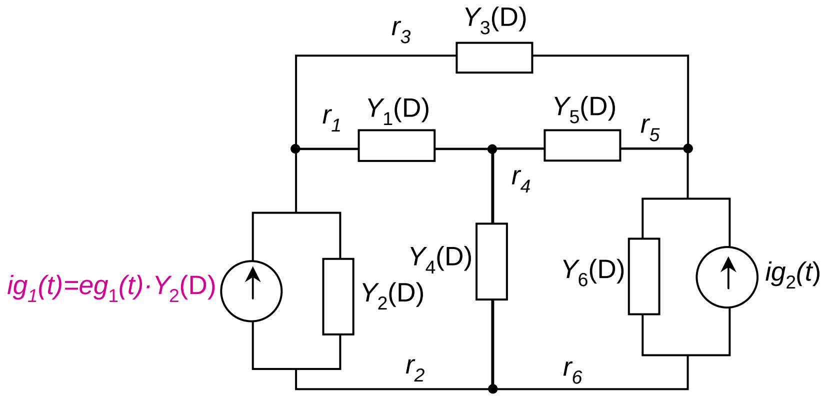
PASOS A SEGUIR:

- Transformar las fuentes de tensión en fuentes de corriente.
- Elegir el árbol (con n-1 ramas, abierto y conexo).
- Dibujar los grupos de corte básicos respecto al árbol escogido: Son aquellos grupos de corte que solo cortan una rama del árbol siendo el resto eslabones.
- Asignar a cada uno de los grupos de corte básicos, una tensión de grupo de corte. (sentido: el de la tensión de la rama del árbol)
- Construir el sistema matricial.
- Resolver el sistema matricial: Obtener las u^{gcb}
- Obtener las tensiones de las ramas: u^r a partir de las ecuaciones que relacionan las tensiones de rama y las de los grupos de corte básicos.
- Obtener las corrientes de rama; i^r con las ecuaciones de definición de las ramas.

4.5 MÉTODOS NODALES (3)
4.5.1 MÉTODO DE GRUPOS DE CORTE BÁSICOS. (II)



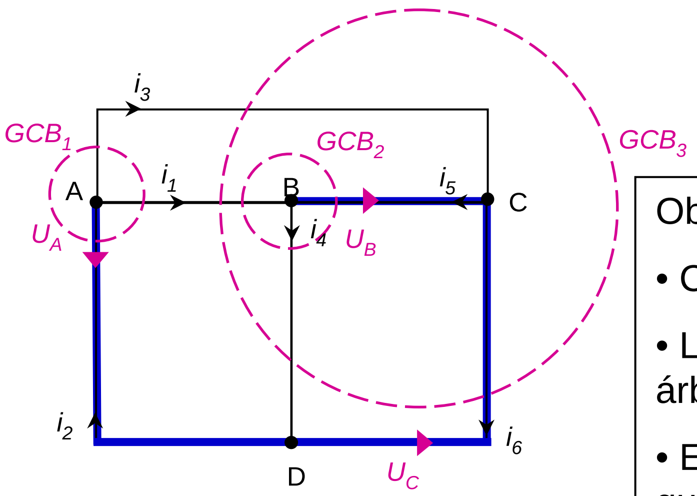
Transformación de fuentes: fuentes de tensión en fuentes de corriente.



Elección del árbol (azul) de los grupos de corte básicos (rosa), y a continuación tensiones de los grupos de corte: u_A, u_B y u_C

n=4; r=6;

n-1=3= nº ramas del árbol=nº de grupos de corte básicos



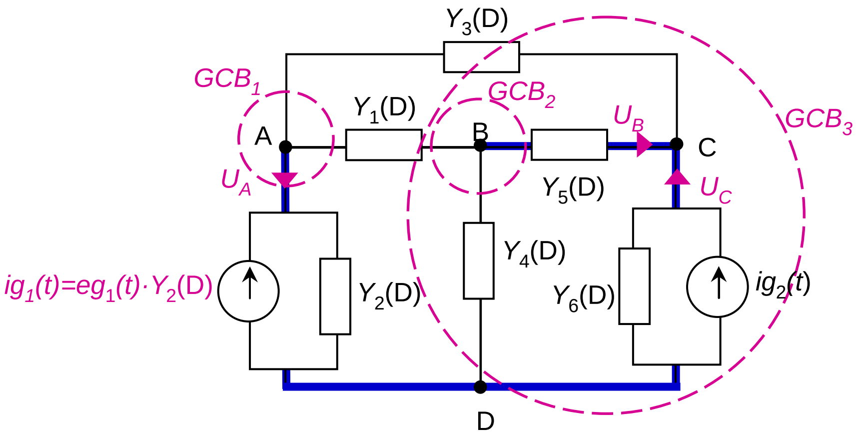
Observaciones:

- Cada grupo de corte básico solo cortará una rama de árbol.
- La tensión del grupo de corte coincide con la tensión de la rama del árbol, que corta.
- Elección del árbol: Elegir como rama del árbol aquellas ramas de las que se desea conocer la tensión; Eligiendo como ramas del coarbol aquellas que tengan fuentes ideales de corriente se obtienen ceros en la matriz de coeficientes, fuera de la diagonal principal.

4.5.1 MÉTODO DE GRUPOS DE CORTE BÁSICOS. (III)

Construcción del sistema matricial:

- Dimensión: (n-1)x(n-1)=3x3
- Forma: $\left(Y^{gcb}\right)\cdot\left(U^{gcb}\right)=\left(Ig^{gcb}\right)$

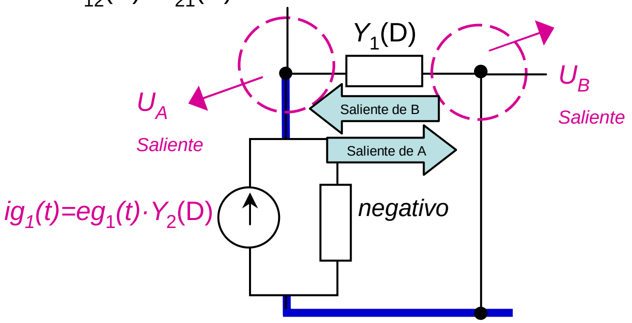


Matriz de admitancias:

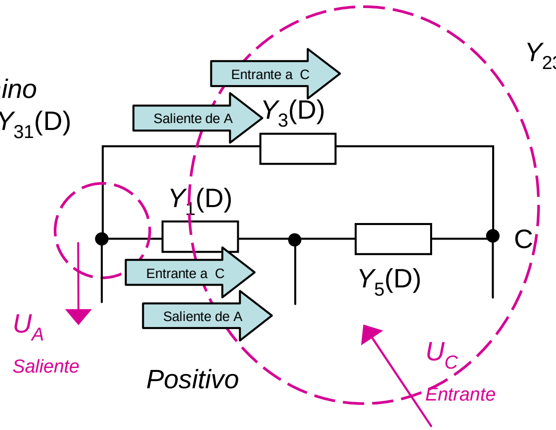
$$\begin{bmatrix} Y_3(D)+Y_1(D)+Y_2(D) & -Y_1(D) & Y_3(D)+Y_1(D) \\ -Y_1(D) & Y_1(D)+Y_5(D)+Y_4(D) & -Y_1(D)-Y_4(D) \\ Y_3(D)+Y_1(D) & -Y_1(D)-Y_4(D) & Y_1(D)+Y_4(D)+Y_6(D)+Y_3(D) \end{bmatrix}$$

Escritura de la matriz de admitancias:
Los elementos de la diagonal principal $Y_{ii}(D)$ serán la suma de las admitancias de las ramas que corta cada GCB. Los términos Y_{ij} (D) son la suma de las admitancias de las ramas cortadas simultáneamente por los dos GCB i y j. Las admitancias son positivas cuando dibujadas sobre las admitancias dos flechas en el mismo sentido (entrantes o salientes al GCB) que las tensiones de referencia de los dos GCB que cortan la rama, son coincidentes y negativas en caso contrario.

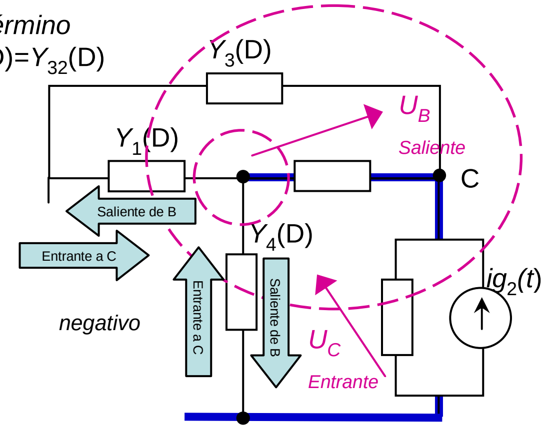
Término $Y_{12}(D)=Y_{21}(D)$



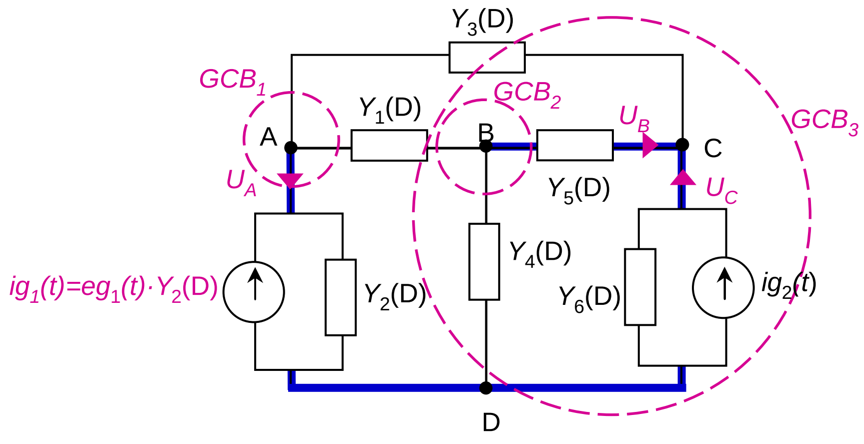
Término $Y_{13}(D)=Y_{31}(D)$



Término $Y_{23}(D)=Y_{32}(D)$



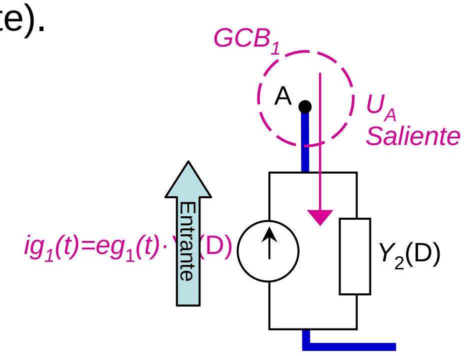
4.5.1 MÉTODO DE GRUPOS DE CORTE BÁSICOS. (IV)



Vector de fuentes de corriente:

$$\begin{bmatrix} -eg_1(t)\cdot Y_2(D) \\ 0 \\ ig_2(t) \end{bmatrix}$$

Cada término del vector se obtiene haciendo la suma de las fuentes de corriente de las ramas cortadas por cada GCB. El signo es positivo si la corriente de la fuente coincide con la tensión de referencia del grupo de corte (es entrante o saliente al grupo de corte).



Vector de tensiones de GCB:

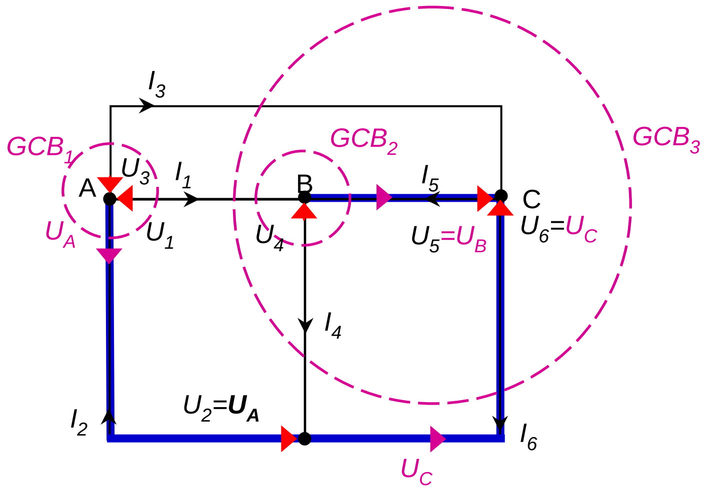
$$\begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix}$$

4.5 MÉTODOS NODALES (6)
4.5.1 MÉTODO DE GRUPOS DE CORTE BÁSICOS. (V)

Sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} Y_3(D)+Y_1(D)+Y_2(D) & -Y_1(D) & Y_3(D)+Y_1(D) \\ -Y_1(D) & Y_1(D)+Y_5(D)+Y_4(D) & -Y_1(D)-Y_4(D) \\ Y_3(D)+Y_1(D) & -Y_1(D)-Y_4(D) & Y_1(D)+Y_4(D)+Y_6(D)+Y_3(D) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -eg_1(t)\cdot Y_2(D) \\ 0 \\ ig_2(t) \end{bmatrix}$$

Una vez resuelto el sistema, se conocerán las tensiones de los grupos de corte básicos. Para determinar las tensiones de las ramas, hay que emplear las ecuaciones que relacionan las tensiones de rama y de grupo de corte.



$$u_1 = u_B - u_A - u_C$$
$$u_2 = u_A$$
$$u_3 = -u_C - u_A$$
$$u_4 = -u_B + u_C$$
$$u_5 = u_B$$
$$u_6 = u_C$$

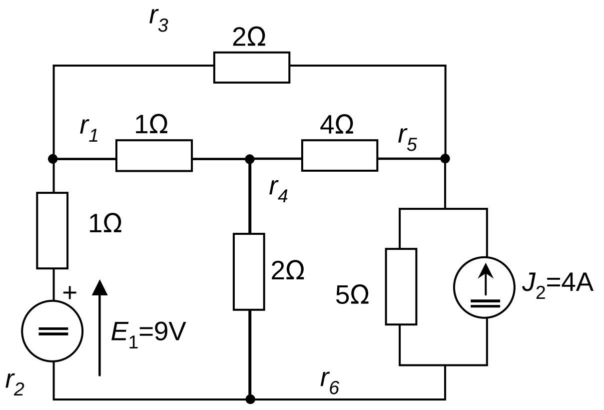
Las ecuaciones que relacionan las tensiones de rama y las de los grupos de corte, se construyen de la siguiente forma: Cada tensión de rama es la suma o resta de tantas tensiones de grupo de corte, como grupos de corte corten la rama. Si la tensión de la rama es del mismo sentido respecto al grupo de corte, que la tensión del grupo de corte, entonces signo positivo, si no, negativo. Es decir, para la tensión de la rama 1. Esta rama es cortada por los grupos de corte 1, 2 y 3, luego la tensión de la rama será una combinación de estas tres tensiones: U_A,U_B,U_C; U_1 es entrante respecto al GCB$_1$ siendo la tensión del grupo de corte, U_B, saliente luego no coinciden y U_A llevará signo negativo. U_1 es saliente respecto al GCB$_2$ al igual que la tensión U_B luego la tensión U_B es de signo positivo; Finalmente U_1 es saliente respecto al GCB$_3$ cuya tensión es entrante luego U_c se resta.

Quedando: U_1=-U_A+U_B-U_C;

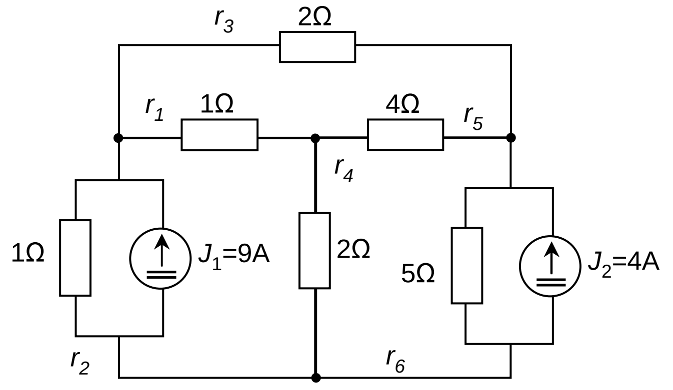
Y así sucesivamente se construyen todas las ecuaciones que relacionan tensiones de rama y de grupo de corte.

4.5.1 MÉTODO DE GRUPOS DE CORTE BÁSICOS. (VI)

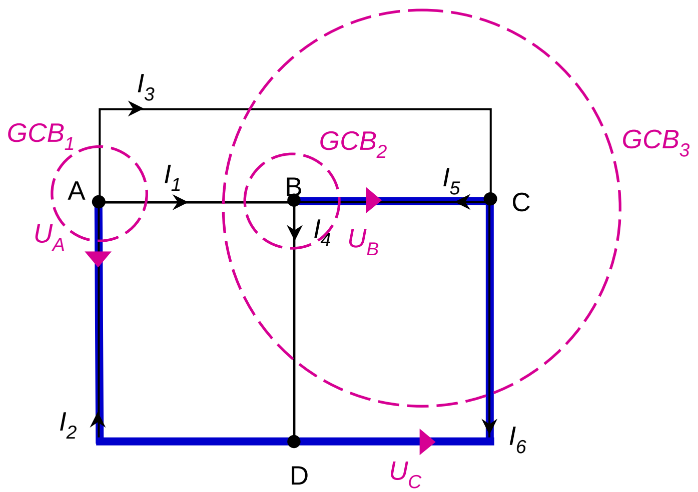
Ejemplo: Sirva de ejemplo un circuito con similar topología que el anterior alimentado con fuentes de continua.



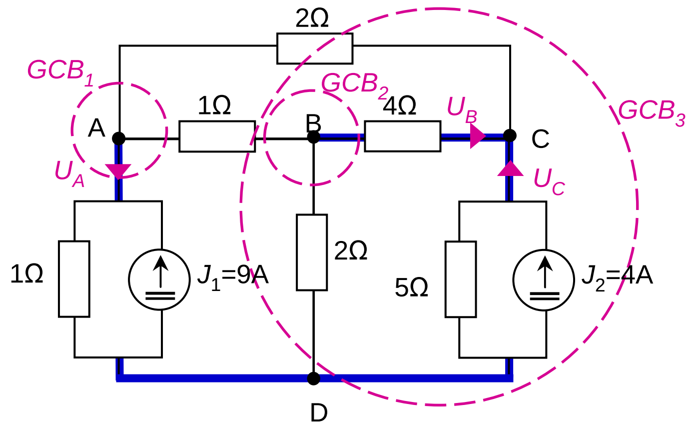
Se transforma la fuente de tensión en fuente de corriente:



Se elige el árbol del circuito que tendrá n-1=4-1=3 ramas. A continuación, y respecto al árbol seleccionado se eligen los grupos de corte básico que son aquellos que solo cortan una rama de árbol. Y para finalizar se asigna a cada grupo de corte una tensión, en general de igual polaridad que la rama del árbol que contiene. Las tensiones que se obtienen al resolver el sistema matricial son precisamente esas tensiones de las ramas del árbol.



Planteamiento del sistema matricial:



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+1+1 & -1 & \frac{1}{2}+1 \\ -1 & \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1 & -\left(\frac{1}{2}+1\right) \\ \frac{1}{2}+1 & -\left(\frac{1}{2}+1\right) & \frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2{,}5 & -1 & 1{,}5 \\ -1 & 1{,}75 & -1{,}5 \\ 1{,}5 & -1{,}5 & 2{,}2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Se resuelve, por ejemplo empleando CRAMER:

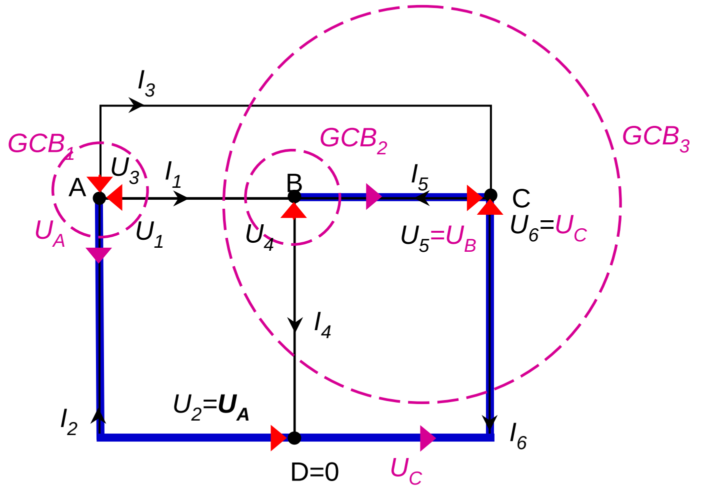
$$\Delta Y = \begin{vmatrix} 2{,}5 & -1 & 1{,}5 \\ -1 & 1{,}75 & -1{,}5 \\ 1{,}5 & -1{,}5 & 2{,}2 \end{vmatrix} = 2{,}3625 \text{ S}$$

$$U_A = \frac{\begin{vmatrix} -9 & -1 & 1{,}5 \\ 0 & 1{,}75 & -1{,}5 \\ 4 & -1{,}5 & 2{,}2 \end{vmatrix}}{\Delta Y} = \frac{-18{,}9}{2{,}3625} = -8\text{V}$$

$$U_B = \frac{\begin{vmatrix} 2{,}5 & -9 & 1{,}5 \\ -1 & 0 & -1{,}5 \\ 1{,}5 & 4 & 2{,}2 \end{vmatrix}}{\Delta Y} = \frac{9{,}45}{2{,}3625} = 4\text{V}$$

$$U_C = \frac{\begin{vmatrix} 2{,}5 & -1 & -9 \\ -1 & 1{,}75 & 0 \\ 1{,}5 & -1{,}5 & 4 \end{vmatrix}}{\Delta Y} = \frac{23{,}625}{2{,}3625} = 10\text{V}$$

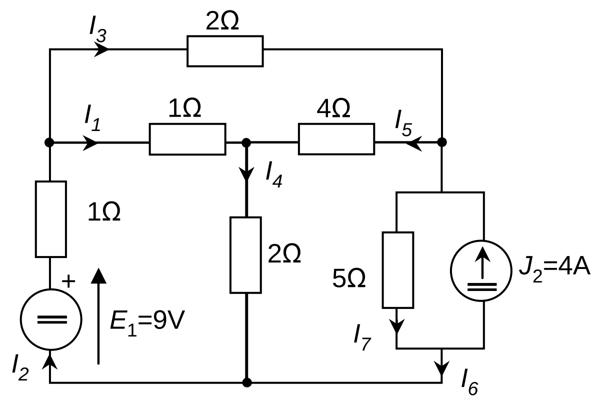
A partir de las tensiones de los grupos de corte se obtienen las de las ramas:



$$U_1 = U_B - U_A - U_C = 4 + 8 - 10 = 2\text{V}$$
$$U_2 = U_A = -8\text{V}$$
$$U_3 = -U_C - U_A = -10 + 8 = -2\text{V}$$
$$U_4 = -U_B + U_C = -4 + 10 = 6\text{V}$$
$$U_5 = U_B = 4\text{V}$$
$$U_6 = U_C = 10\text{V}$$

Finalmente y para determinar las corrientes de las ramas se recurrirá a las ecuaciones de la rama.

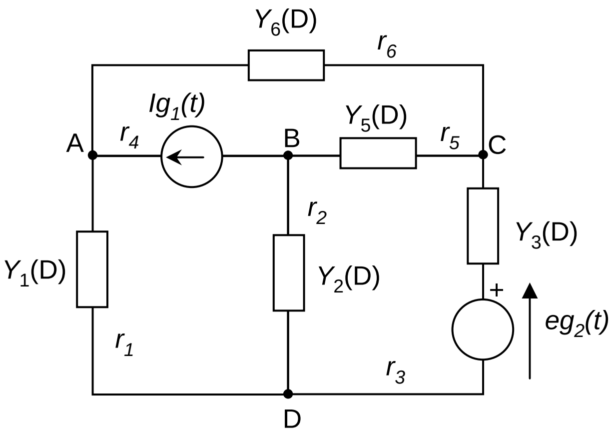
$$\begin{cases} I_1 = U_1 \cdot 1 = 2 \cdot 1 = 2\text{A} \\ I_2 = (U_2 + E_1) \cdot 1 = (-8+9) \cdot 1 = 1\text{A} \\ I_3 = U_3 \cdot 0{,}5 = -2 \cdot 0{,}5 = -1\text{A} \\ I_4 = U_4 \cdot 0{,}5 = 6 \cdot 0{,}5 = 3\text{A} \\ I_5 = U_5 \cdot 0{,}25 = 4 \cdot 0{,}25 = 1\text{A} \\ I_6 = I_7 - J_2 = U_6 \cdot \frac{1}{5} - 4 = 10 \cdot \frac{1}{5} - 4 = -2\text{A} \end{cases}$$



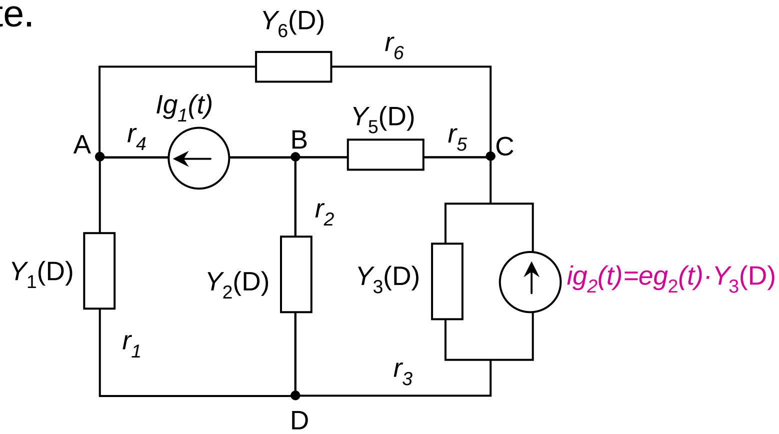
PASOS A SEGUIR:

- Transformar las fuentes de tensión en fuentes de corriente.
- Elección del nudo de referencia.
- Dibujar las tensiones de nudo, tensiones entre nudo de referencia y todos los demás. Lo más práctico y dibujarlas todas salientes o todas entrantes respecto al nudo de referencia.
- Construir el sistema matricial.
- Resolver el sistema matricial: Obtener las u^n
- Obtener las tensiones de las ramas: u^r a partir de las ecuaciones que relacionan las tensiones de rama y las de los nudos.
- Obtener las corrientes de rama; i^r con las ecuaciones de definición de las ramas.

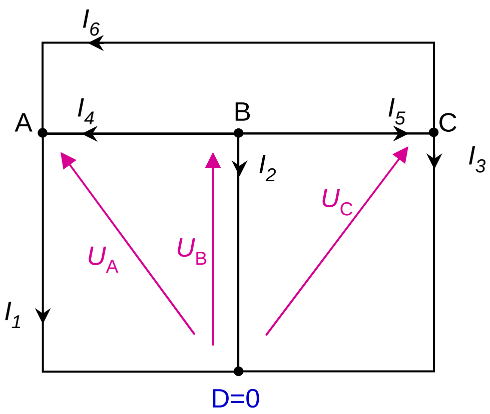
4.5 MÉTODOS NODALES (11)
4.5.1 MÉTODO DE NUDOS. (II)



Transformación de fuentes: fuentes de tensión en fuentes de corriente.



Elección del nudo de referencia (azul), a continuación se dibujan las tensiones de nudo entre el nudo de referencia y todos los demás cuy número es: n-1=4-1=3 y que denominaremos: u_A, u_B y u_C



Observaciones:

•Las tensiones de nudo son las tensiones de las ramas que están entre el nudo de referencia y los subsiguientes. Y son las que se obtienen al resolver el sistema matricial, de modo que la elección adecuada del nudo sirve para seleccionar las ramas de las que deseamos conocer la tensión.

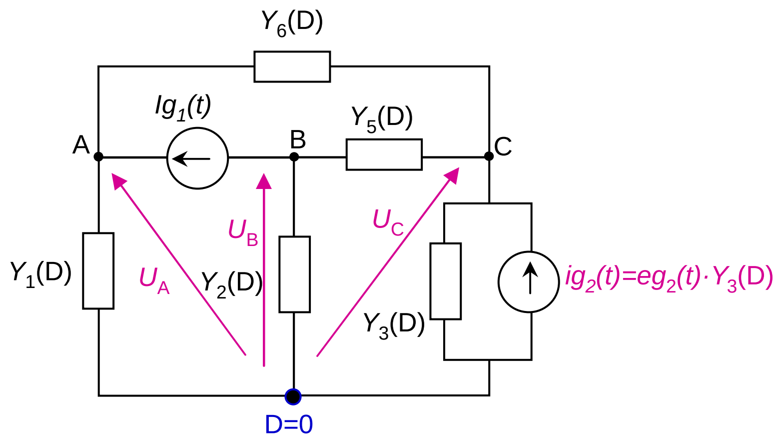
• El sentido de las tensiones pueden ser dos: Las de las tensiones de las ramas o todas salientes o entrantes. Si se eligen todas de igual polaridad la construcción de la matriz de admitancias se simplifica, pues todos los términos fuera de la diagonal principal serán negativos.

4.5 MÉTODOS NODALES (12)
4.5.1 MÉTODO DE NUDOS. (III)

Construcción del sistema matricial:

•Dimensión: (n-1)x(n-1)=3x3

•Forma: $\left(Y^{n}\right)\cdot\left(U^{n}\right)=\left(Ig^{n}\right)$

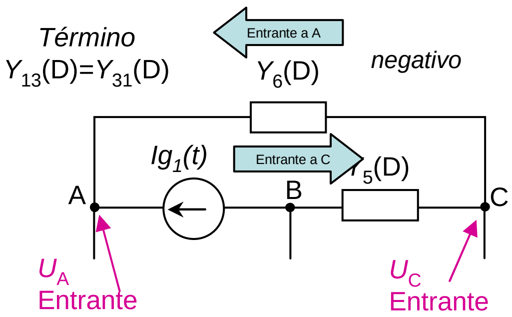


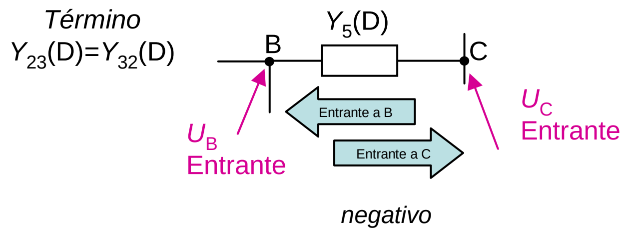
Matriz de admitancias:

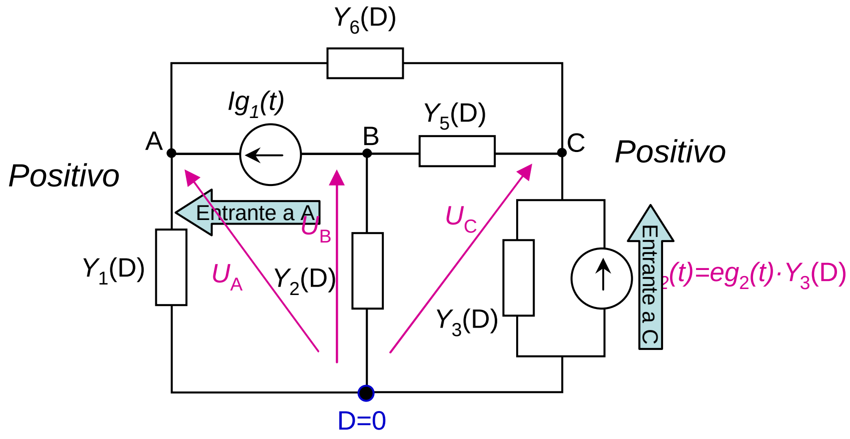
$$\begin{bmatrix} Y_1(D)+Y_6(D) & 0 & -Y_6(D) \\ 0 & Y_2(D)+Y_5(D) & -Y_5(D) \\ -Y_6(D) & -Y_5(D) & Y_6(D)+Y_5(D)+Y_3(D) \end{bmatrix}$$

Los elementos de la diagonal principal Y_{ii}(D) son la suma de las admitancias de las ramas que llegan a cada nudo.

Los elementos de las posiciones ij y ji, Y_{ij}(D) son la suma de las admitancias de las ramas compartidas por los nudos i y j, Las admitancias son positivas cuando dibujadas sobre las admitancias dos flechas en el mismo sentido (entrantes o salientes al nudo) que las tensiones de los dos nudos de la rama, las flechas son coincidentes y negativas en caso contrario. Aunque si se toman todas las tensiones de nudo salientes o entrantes al nudo de referencia, las admitancias Y_{ij}(D) serán negativas y no hay que hacer el estudio del signo. Veámoslo:







Vector de fuentes de corriente:

$$\begin{bmatrix} ig_1(t) \\ 0 \\ eg_2(t)\cdot Y_3(\mathrm{D}) \end{bmatrix}$$

Cada término del vector se obtiene haciendo la suma de las fuentes de corriente de las ramas que llegan al nudo. El signo es positivo si la corriente de la fuente es de igual forma que la tensión del nudo (entrante o saliente al nudo).

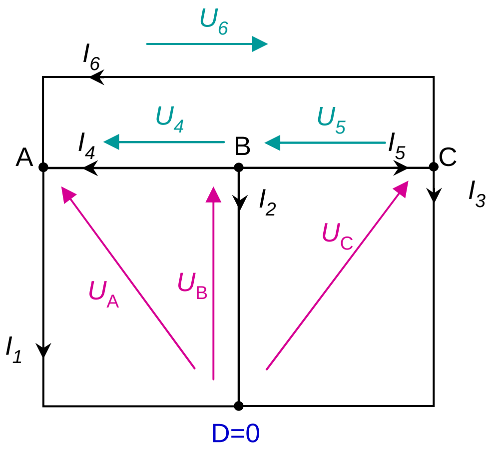
Vector de tensiones de nudo:

$$\begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix}$$

Sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} Y_1(\mathrm{D})+Y_6(\mathrm{D}) & 0 & -Y_6(\mathrm{D}) \\ 0 & Y_2(\mathrm{D})+Y_5(\mathrm{D}) & -Y_5(\mathrm{D}) \\ -Y_6(\mathrm{D}) & -Y_5(\mathrm{D}) & Y_6(\mathrm{D})+Y_5(\mathrm{D})+Y_3(\mathrm{D}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ig_1(t) \\ 0 \\ eg_2(t)\cdot Y_3(\mathrm{D}) \end{bmatrix}$$

Una vez resuelto el sistema matricial serán conocidas las tensiones de nudo las de rama se obtienen a través de las ecuaciones que relacionan las tensiones de nudo y de rama. Para obtenerlas basta con aplicar la segunda ley de Kirchhoff en distintos caminos cerrados del circuito.

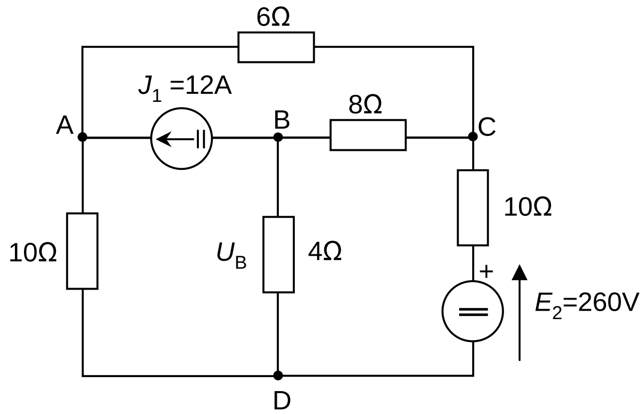


$$U_4 = U_A - U_B$$
$$U_5 = U_B - U_C$$
$$U_6 = U_C - U_A$$

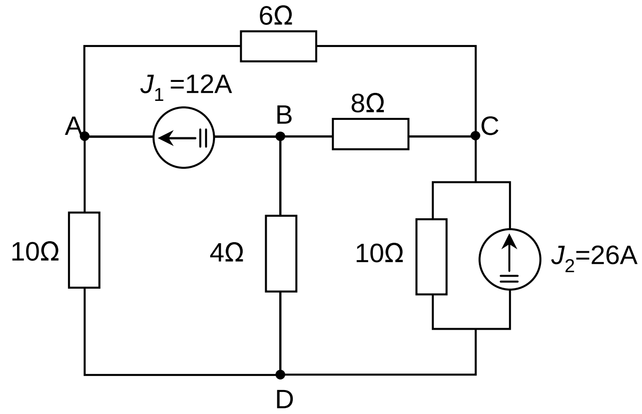
Las corrientes de las ramas se determinarán a partir de la ecuación de definición de la rama.

4.5.1 MÉTODO DE NUDOS. (VI)

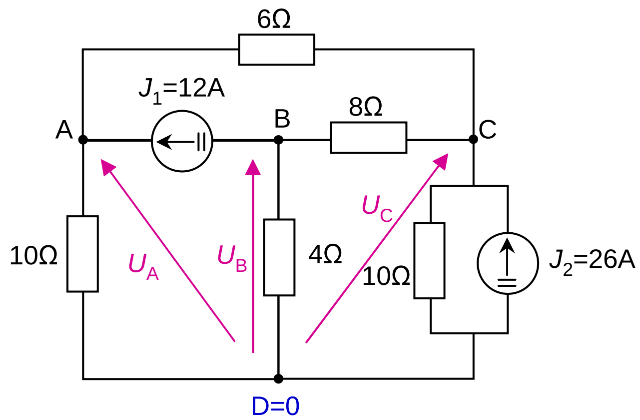
Ejemplo: Sirva de ejemplo un circuito con similar topología que el anterior alimentado con fuentes de continua.



Se transforma la fuente de tensión en fuente de corriente:

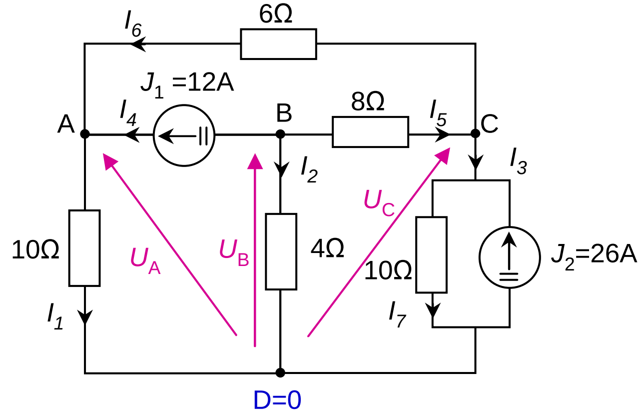


Se elige un nudo de referencia. A continuación, se determinarán las tensiones entre este nudo de referencia y los demás el número de nudos tensiones será: n-1=4-1=3. La polaridad de estas tensiones pueden ser las de la rama que definen o todas entrantes o salientes respecto al nudo de referencia esto último facilita la construcción de la matriz de admitancias, donde todas las de fuera de la diagonal principal serán negativas.



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{10}+\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4}+\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -12 \\ 26 \end{bmatrix}$$

4.5 MÉTODOS NODALES (16)
4.5.1 MÉTODO DE NUDOS. (VII)



Resolución del sistema matricial por ejemplo empleando CRAMER:

$$\Delta Y = |Y| = \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{6}\right) & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{8} & \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{8}{30} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{8} & \frac{94}{240} \end{vmatrix} = \frac{177}{7200}$$

$$U_A = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 0 & -\frac{1}{6} \\ -12 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 26 & -\frac{1}{8} & \frac{94}{240} \end{vmatrix}}{\frac{177}{7200}} = 120\text{V} \qquad U_B = \frac{\begin{vmatrix} \frac{8}{30} & 12 & -\frac{1}{6} \\ 0 & -12 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{6} & 26 & \frac{94}{240} \end{vmatrix}}{\frac{177}{7200}} = 8\text{V} \qquad U_C = \frac{\begin{vmatrix} \frac{8}{30} & 0 & 12 \\ 0 & \frac{3}{8} & -12 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{8} & 26 \end{vmatrix}}{\frac{177}{7200}} = 120\text{V}$$

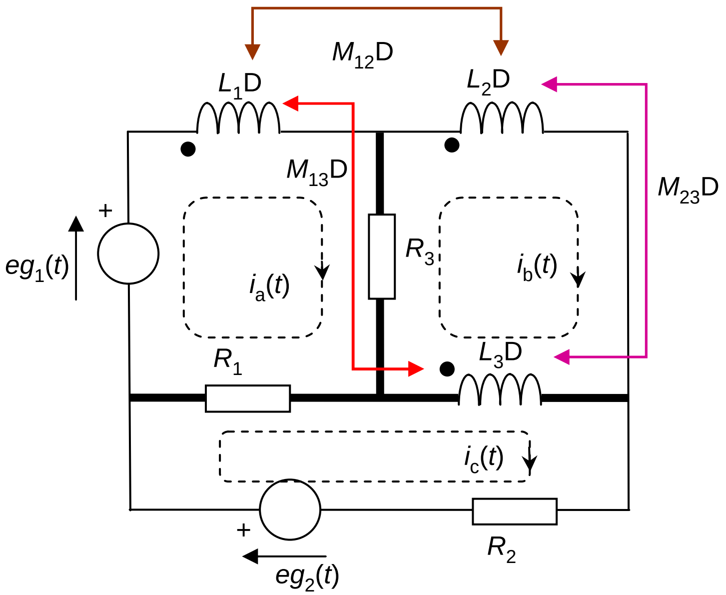
A partir de las tensiones de nudo se obtendrán las tensiones de las ramas, sin más que aplicar la segunda ley de Kirchhoff se obtendrán las ecuaciones que relacionan tensiones de rama y de nudo:

$$U_{AB} = U_A - U_B = 120 - 8 = 112\text{V}$$
$$U_{CA} = U_C - U_A = 120 - 120 = 0\text{V}$$
$$U_{BC} = U_B - U_C = 8 - 120 = -112\text{V}$$

Las corrientes de rama finalmente a partir de las ecuaciones de la rama:

$$\begin{cases} I_1 = U_A \cdot \frac{1}{10} = 120 \cdot \frac{1}{10} = 12\text{A} \\ I_2 = U_B \cdot \frac{1}{4} = -8 \cdot \frac{1}{4} = 2\text{A} \\ I_3 = -26 + I_7 = -26 + \frac{1}{10} \cdot 120 = -14\text{A} \\ I_4 = J_2 = 12\text{A} \\ I_5 = U_{BC} \cdot \frac{1}{8} = -112 \cdot \frac{1}{8} = -14\text{A} \\ I_6 = U_{AC} \cdot \frac{1}{6} = 0\text{A} \end{cases}$$

Se resuelven aplicando métodos circulares. Todos pasos a seguir en la resolución del circuito son así aquellos que se han indicado en la resolución de circuitos por mallas o lazos básicos.
Sin embargo estos circuitos presentan ciertas particularidades a la hora de escribir de la matriz de impedancias. Particularidades que explicamos a continuación a través de un ejemplo.



Escritura de la matriz de impedancias:
Aparecen términos del tipo M_{ij}(D) que representan el acoplo magnético entre las ramas i y j en las que hay bobinas con acoplo magnético.
Las tensiones de las ramas i y j son de la forma:

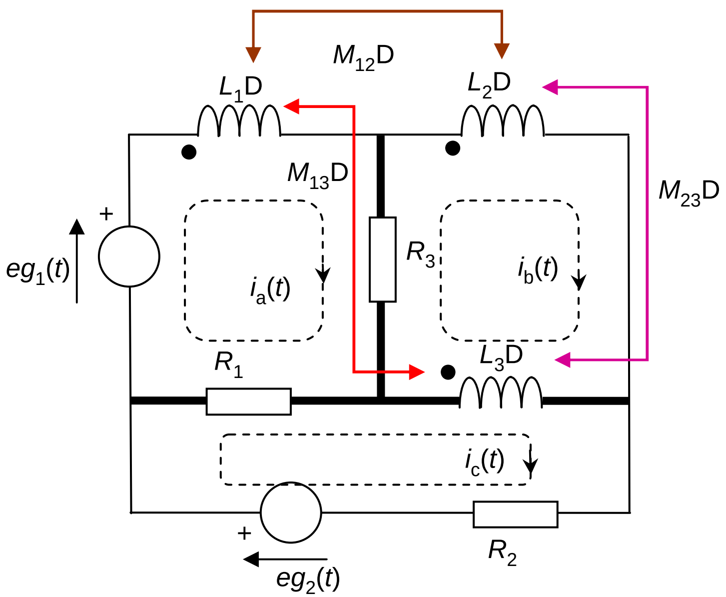
$$U_i(t) = L_i\mathrm{D}i_i(t) \pm M\mathrm{D}i_j(t)$$
$$U_j(t) = \pm M\mathrm{D}i_i(t) + L_j\mathrm{D}i_j(t)$$

Donde los términos **$\pm M_{ij}$D** representan las **impedancia operacional mutuas del acoplo**.
• Son + si las corrientes (de malla o lazo) son entrante en ambas por los puntos correspondientes (puntos homólogos)
• Son – si una de las corrientes es entrante y otra saliente.una entrante otra saliente

$$\begin{bmatrix} Z_{aa}(\mathrm{D}) & Z_{ab}(\mathrm{D}) & Z_{ac}(\mathrm{D}) \\ Z_{ba}(\mathrm{D}) & Z_{bb}(\mathrm{D}) & Z_{bc}(\mathrm{D}) \\ Z_{ca}(\mathrm{D}) & Z_{cb}(\mathrm{D}) & Z_{cc}(\mathrm{D}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eg_a(t) \\ eg_b(t) \\ eg_c(t) \end{bmatrix}$$

Impedancias de malla:

$$\begin{cases} Z_{aa}(\mathrm{D}) = L_1\mathrm{D} + R_3 + R_1 \\ Z_{bb}(\mathrm{D}) = R_3 + L_2\mathrm{D} + L_3\mathrm{D} - 2M_{23}(\mathrm{D}) \\ Z_{cc}(\mathrm{D}) = R_1 + R_2 + L_3\mathrm{D} \end{cases}$$



Impedancias compartidas por las mallas

$Z_{ab}(\mathrm{D}) = -R_3 + M_{12}(\mathrm{D}) - M_{13}(\mathrm{D})$

M_{12} positiva entran las corrientes de malla por los puntos en las 2.

M_{13} negativa no entran las corrientes de malla por los puntos en las 2.

$Z_{ac}(\mathrm{D}) = -R_1 + M_{13}(\mathrm{D})$

M_{13} positiva entran las corrientes de malla por los puntos en las 2.

$Z_{bc}(\mathrm{D}) = -L_3\mathrm{D} + M_{23}(\mathrm{D})$

M_{23} positiva entran las corrientes de malla por los puntos en las 2.

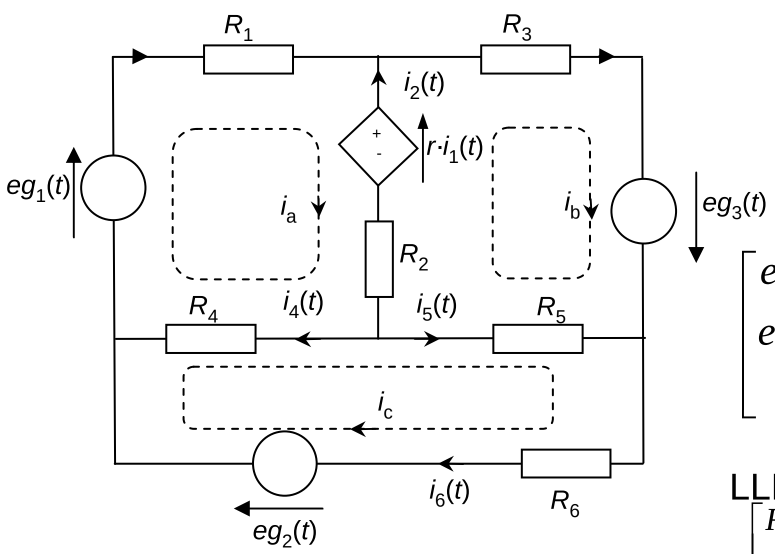
Sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} L_1\mathrm{D} + R_3 + R_1 & -R_3 + M_{12}\mathrm{D} - M_{13}\mathrm{D} & -R_1 + M_{13}\mathrm{D} \\ -R_3 + M_{12}\mathrm{D} - M_{13}\mathrm{D} & R_3 + L_2\mathrm{D} + L_3\mathrm{D} - 2M_{23}\mathrm{D} & -L_3\mathrm{D} + M_{23}\mathrm{D} \\ -R_1 + M_{13}\mathrm{D} & -L_3\mathrm{D} + M_{23}\mathrm{D} & R_1 + R_2 + L_3\mathrm{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eg_1(t) \\ 0 \\ eg_2(t) \end{bmatrix}$$

4.7 CIRCUITOS CON FUENTES DEPENDIENTES .(1)

SE RESUELVEN CON CUALQUIERA DE LOS MÉTODOS ANALIZADOS HASTA EL MOMENTO. A CONTINUACIÓN SE TRANSFORMA EL SISTEMA MATRICIAL:

FUENTE DE TENSIÓN DEPENDIENTE DE CORRIENTE (r =TRANSRESISTENCIA)



$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+R_4 & -R_2 & -R_4 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_5 & -R_5 \\ -R_4 & -R_5 & R_4+R_5+R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eg_1(t)-r\cdot i_1(t) \\ eg_3(t)+r\cdot i_1(t) \\ eg_2(t) \end{bmatrix}$$

FORMA QUE TOMA EL VECTOR DE TENSIONES:

$$\begin{bmatrix} eg_1(t)-r\cdot i_1(t) \\ eg_3(t)+r\cdot i_1(t) \\ eg_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eg_1(t) \\ eg_3(t) \\ eg_6(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r\cdot i_a(t) \\ -r\cdot i_a(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eg_1(t) \\ eg_3(t) \\ eg_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

LLEVANDO ESTA TRANSFORMACIÓN AL SISTEMA MATRICIAL:

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+R_4 & -R_2 & -R_4 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_5 & -R_5 \\ -R_4 & -R_5 & R_4+R_5+R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eg_1(t) \\ eg_3(t) \\ eg_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

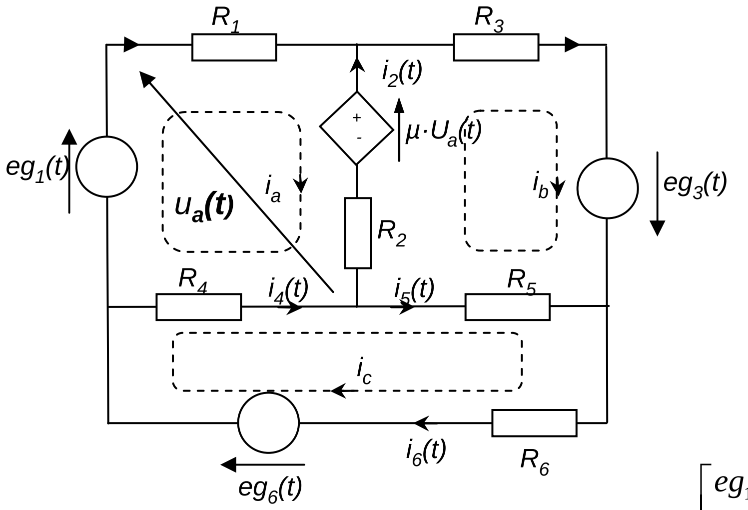
PASAMOS A LA DERECHA EL TERMINO NEGATIVO DE LA IZQUIERDA:

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+R_4 & -R_2 & -R_4 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_5 & -R_5 \\ -R_4 & -R_5 & R_4+R_5+R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eg_1(t) \\ eg_3(t) \\ eg_2(t) \end{bmatrix}$$

EXTRAER EL VECTOR DE CORRIENTES COMO MULTIPLO COMUN:

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+R_4+r & -R_2 & -R_4 \\ -R_2-r & R_2+R_3+R_5 & -R_5 \\ -R_4 & -R_5 & R_4+R_5+R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eg_1(t) \\ eg_3(t) \\ eg_2(t) \end{bmatrix}$$

FUENTE DE TENSIÓN DEPENDIENTE DE TENSION (μ)



$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+R_4 & -R_2 & -R_4 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_5 & -R_5 \\ -R_4 & -R_5 & R_4+R_5+R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eg_1(t)-\mu\cdot u_a(t) \\ eg_3(t)+\mu\cdot u_a(t) \\ eg_6(t) \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} u_a(t) &= eg_1(t)+R_4\cdot i_4(t) \\ i_4(t) &= -i_a+i_c \end{aligned}\right\} \quad u_a(t)=eg_1(t)-R_4\cdot i_a(t)+R_4\cdot i_c$$

Y:

$$\mu\cdot u_a(t)=\mu\cdot eg_1(t)-\mu\cdot R_4\cdot i_a(t)+\mu\cdot R_4\cdot i_c$$

FORMA QUE TOMA EL VECTOR DE TENSIÓN:

$$\begin{bmatrix} eg_1(t)-\mu\cdot eg_1(t)+\mu\cdot R_4\cdot i_a-\mu\cdot R_4\cdot i_c \\ eg_3(t)+\mu\cdot eg_1(t)-\mu\cdot R_4\cdot i_a+\mu\cdot R_4\cdot i_c \\ eg_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eg_1(t)-\mu\cdot eg_1(t) \\ eg_3(t)+\mu\cdot eg_1(t) \\ eg_6(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mu\cdot R_4 & 0 & \mu\cdot R_4 \\ \mu\cdot R_4 & 0 & -\mu\cdot R_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

LO LLEVAMOS AL SISTEMA MATRICIAL Y PASAMOS EL SUMANDO NEGATIVO A LA DERECHA:

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+R_4 & -R_2 & -R_4 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_5 & -R_5 \\ -R_4 & -R_5 & R_4+R_5+R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu\cdot R_4 & 0 & \mu\cdot R_4 \\ \mu\cdot R_4 & 0 & -\mu\cdot R_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eg_1(t)-\mu\cdot eg_1(t) \\ eg_3(t)+\mu\cdot eg_1(t) \\ eg_6(t) \end{bmatrix}$$

EXTRAYENDO COMO MULTIPLO COMUN EL VECTOR DE CORRIENTES:

$$\boxed{\begin{bmatrix} R_1+R_2+R_4-\mu\cdot R_4 & -R_2 & -R_4+\mu\cdot R_4 \\ -R_2+\mu\cdot R_4 & R_2+R_3+R_5 & -R_5-\mu\cdot R_4 \\ -R_4 & -R_5 & R_4+R_5+R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eg_1(t)-\mu\cdot eg_1(t) \\ eg_3(t)+\mu\cdot eg_1(t) \\ eg_6(t) \end{bmatrix}}$$

4.7 BIBLIOGRAFIA

- V.M. Parra Prieto y otros, Teoría de Circuitos, Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid 1990. Tema VII.
- E. Alfaro Segovia, Teoría de Circuitos y Electrometría. El autor, Madrid 1970. Capitulo IV, lecciones 8, 9, 10.
- R.L. Boylestad, Análisis Introductorio de Circuitos, Prentice Hall 1995. Tema 9.
- A. Bruce Carlson, Teoría de Circuitos, Thomson, Madrid 2002. Capítulo 4.
- A. Gómez, J.A. Olivera, Problemas resueltos de Teoría de Circuitos, Paraninfo, Madrid 1990. Capitulo 2.
- J.A. Edminister, M. Nahvi, Circuitos Eléctricos (Problemas resueltos) McGraw Hill, Madrid 1997. Capítulo 4.
- UNE 21302-131 Vocabulario Electrotécnico. Parte 131: Teoría de Circuitos.