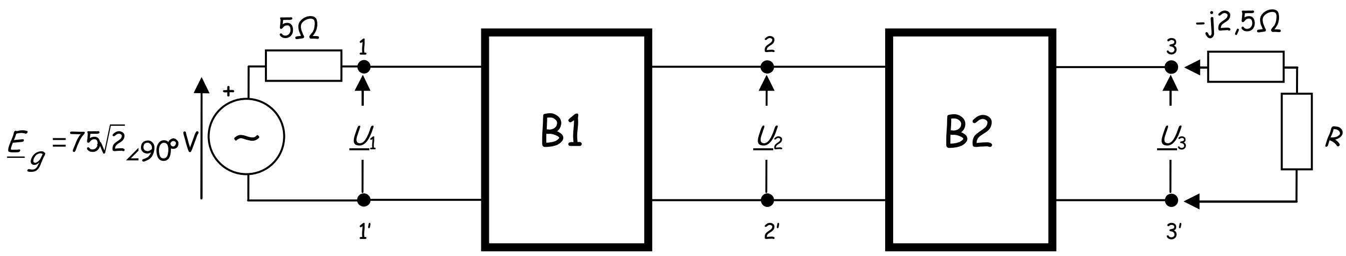
Dos bipuertas idénticos, B1 y B2 están asociados en cascada, tal y como se indica en la figura, y están caracterizados por su matriz de transmisión "T": $\underline{A}$=0,5; $\underline{B}$=j7,5 Ω ; $\underline{C}$=j0,1S; $\underline{D}$=0,5.



Se pide:

1 Los bipuertas B1 y B2, ¿Son recíprocos?, ¿Son simétricos?
2 Obtener su equivalente en T si es posible.
3 Obtener los parámetros de transmisión, Be, del bipuerta de la asociación B1, B2.
4 Obtener el equivalente en T del bipuerta Be.
5 Si a los terminales 1 1' se le acopla una fuente real de tensión de $\underline{E}_g = 75\sqrt{2}\angle 90^\circ$ V y $\underline{Z}$=5Ω, obténgase el equivalente de Thevenin respecto de los terminales 3 3'.
6 Si los terminales 3 3' se cierran mediante una impedancia $\underline{Z}$=(R-j2,5)Ω determínese el valor de R para que a $\underline{Z}$ se la transfiera potencia máxima.
7 Valor de dicha potencia máxima.
8 Ganancia de tensión con los terminales 3 3' a circuito abierto. $G_U = \dfrac{\underline{U}_3}{\underline{U}_1}$

RESOLUCIÓN:

1 Reciprocidad y simetría.

Matriz de parámetros de transmisión:

$$T = \begin{bmatrix} 0{,}5 & j7{,}5 \\ j0{,}1 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$|T| = \begin{vmatrix} 0{,}5 & j7{,}5 \\ j0{,}1 & 0{,}5 \end{vmatrix} = 0{,}25 + 0{,}75 = 1\,; \qquad \text{como } |T| = 1 \text{ es recíproco.}$$

0,5=0,5 ; como $\underline{A}$=$\underline{D}$ es simétrico.

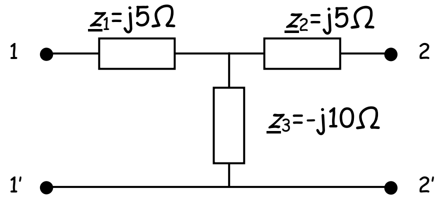
También se puede deducir la reciprocidad y la simetría con el apartado 2, ya se verá.

2 Equivalente en T.

Se observa que es recíproco: $\underline{z}_{12} = \underline{z}_{21} = \dfrac{1}{\underline{C}} = \dfrac{\Delta T}{\underline{C}}$; pues $\Delta T = 1$

$$\underline{z}_1 = \frac{0{,}5-1}{j0{,}1} = \frac{-0{,}5}{j0{,}1} = j5\Omega\,; \qquad \underline{z}_2 = \frac{0{,}5-1}{j0{,}1} = \frac{-0{,}5}{j0{,}1} = j5\Omega\,; \qquad \underline{z}_3 = \frac{1}{j0{,}1} = -j10\Omega$$

Y simétrico pues: $\underline{z}_1 = \underline{z}_2 \quad \rightarrow \quad \underline{z}_{11} = \underline{z}_{22}$



3 Obtener los parámetros de transmisión, Be, del bipuerta de la asociación B1, B2.

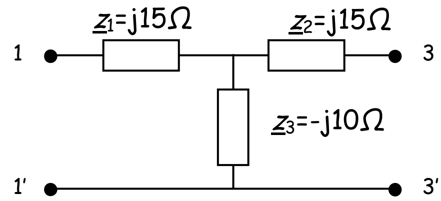
$$Te = \begin{bmatrix} 0{,}5 & j7{,}5 \\ j0{,}1 & 0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 & j7{,}5 \\ j0{,}1 & 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & j7{,}5 \\ j0{,}1 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

Y debe ser simétrico y recíproco al serlo sus componentes B1 y B2

4 Obtener el equivalente en T del bipuerta Be.

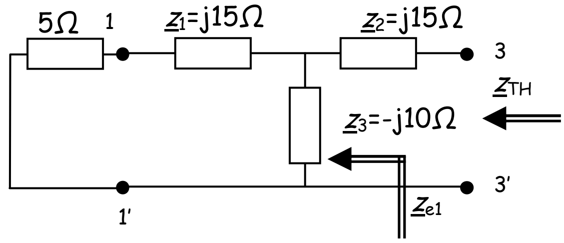
$$\underline{z}_1 = \underline{z}_2 = \frac{-0{,}5-1}{j0{,}1} = \frac{-1{,}5}{j0{,}1} = j15\Omega$$

$$\underline{z}_3 = \frac{1}{\underline{C}} = \frac{1}{j0{,}1} = -j10\Omega$$



5 Equivalente de Thevenin

Impedancia de Thevenin

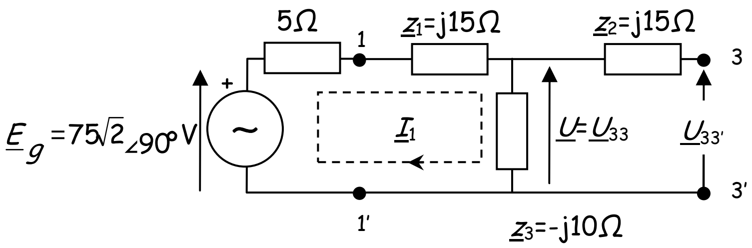


$$\underline{z}_{e1} = \frac{(5+j15)\cdot(-j10)}{5+j15-j10} = \frac{150-j50}{5+j5} = \frac{30-j10}{1+j}\Omega$$

$$\underline{z}_{e1} = \frac{30-j10}{1+j}\cdot\frac{1-j}{1-j} = \frac{20-j40}{2} = (10-j20)\Omega$$

$$\underline{z}_{e2} = \underline{z}_{TH} = 10-j20+j15 = (10-j5)\Omega$$

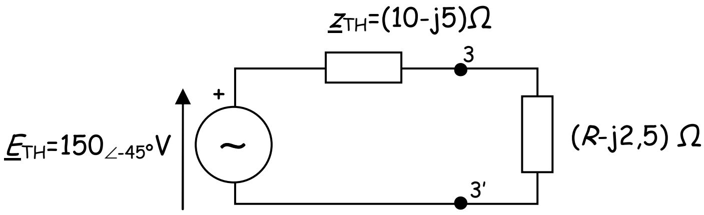
Tensión de Thevenin



$$\underline{I}_1 = \frac{75\sqrt{2}_{\angle 90^\circ}}{5+j5} = \frac{75\sqrt{2}_{\angle 90^\circ}}{45\sqrt{2}_{\angle 45^\circ}} = 15_{\angle 45^\circ} A$$

$\underline{U} = 15_{\angle 45^\circ} \cdot 10_{\angle -90^\circ} = 150_{\angle -45^\circ}$ V como $\underline{U} = \underline{U}_{33'} = \underline{E}_{TH} = 150_{\angle -45^\circ}$ V

6 Valor de R para que a $\underline{Z}$ se la transfiera potencia máxima.



$$R = \sqrt{10^2 + (5+2,5)^2} = 12,5\Omega$$

7 Valor de la potencia máxima

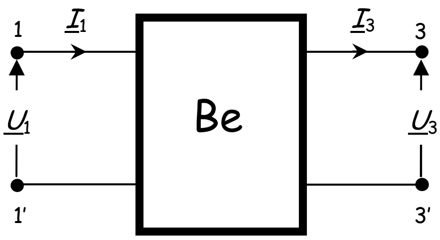
$$\hat{P} = \frac{150^2}{(10+12,5)^2 + (5+2,5)^2} \cdot 12,5 = 500 \text{ W}$$

8 Ganancia de tensión con los terminales 3 y 3' a circuito abierto.

Las condiciones del circuito abierto son:

$\underline{I}_3 = 0\ A$

$\underline{U}_3 = 150_{\angle -45^\circ}$ V



Se plantea la ecuación matricial

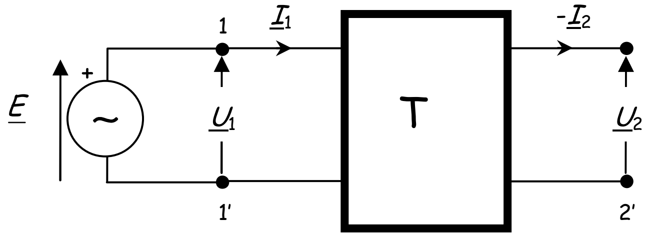
$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & j7,5 \\ j0,1 & -0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_3 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene la siguiente relación con $\underline{I}_3 = 0$: $\underline{U}_1 = -0,5 \cdot \underline{U}_3$

Y finalmente la ganancia de tensión será:

$$\underline{G}_u = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_3}{-0{,}5\cdot\underline{U}_3} = -2 = 2_{\angle 180^\circ}$$

Otra forma para obtener el equivalente de Thevenin: utilizando la teoría de bipuertas.



Las ecuaciones características, empleando parámetros de transmisión:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

Los parámetros del circuito equivalente de Thevenin se definen de la siguiente forma:

$$\underline{z}_{TH} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_1=0} \qquad \text{y} \qquad \underline{E}_{TH} = \underline{U}_2\big|_{\underline{I}_2=0}$$

Impedancia de Thevenin: para obtenerla se sustituye la condición que la tensión en la puerta de entrada debe ser nula en la primera ecuación característica:

$$\underline{U}_1 = \underline{A}\cdot\underline{U}_2 - \underline{B}\cdot\underline{I}_2 \quad \rightarrow \quad 0 = \underline{A}\cdot\underline{U}_2 - \underline{B}\cdot\underline{I}_2 \quad \rightarrow \underline{U}_2 = \frac{\underline{B}\cdot\underline{I}_2}{\underline{A}}$$

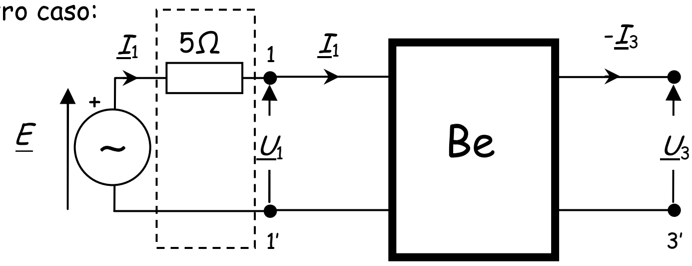
Luego la impedancia de Thevenin es:

$$\underline{z}_{TH} = \frac{\dfrac{\underline{B}\cdot\underline{I}_2}{\underline{A}}}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}} \quad \Leftrightarrow \underline{z}_{TH} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}}$$

Tensión de Thevenin: para obtenerla se sustituye en la primera ecuación la condición de nulidad de corriente en la segunda puerta:

$$\underline{U}_1 = \underline{A}\cdot\underline{U}_2 - \underline{B}\cdot\underline{I}_2 \quad \rightarrow \quad \underline{E} = \underline{A}\cdot\underline{U}_2 - \underline{B}\cdot 0 \quad \rightarrow \quad \underline{U}_2 = \frac{\underline{E}}{\underline{A}} \qquad\qquad \underline{E}_{\mathrm{TH}} = \frac{1}{\underline{A}}\cdot\underline{E}$$

En nuestro caso:



La impedancia conectada a la puerta uno, puede ser tratada como otro bipuerta asociado al Be en cascada, su matriz en parámetros T se puede premultiplicar a la de Be para obtener la matriz T de todo el conjunto:

$$\begin{bmatrix} \underline{E} \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0{,}5 & j7{,}5 \\ j0{,}1 & -0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_3 \\ -\underline{I}_3 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \underline{E} \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 + j0{,}5 & -2{,}5 + j7{,}5 \\ j0{,}1 & -0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_3 \\ -\underline{I}_3 \end{bmatrix}$$

Con las expresiones que se han obtenido de la tensión y la impedancia de Thevenin, se calculan a continuación:

$$\underline{z}_{TH} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}} = \frac{-2{,}5 + j7{,}5}{-0{,}5 + j0{,}5} = (10 - j5)\Omega$$

$$\underline{E}_{TH} = \underline{U}_2 = \frac{\underline{E}}{\underline{A}} = \frac{75\sqrt{2}_{\angle 90^\circ}}{-0{,}5 + j0{,}5} = 150_{\angle -45^\circ}\text{V}$$