Para obtener los parámetros $\underline{Z}$ de un bipuerta dado se le han realizado los siguientes ensayos:

- Ensayo en vacío: se alimenta el bipuerta por la puerta 1, dejando la puerta 2 a circuito abierto.
- Ensayo de cortocircuito: se alimenta el bipuerta por la puerta 2, dejando la puerta 1 cortocircuitada.

Los resultados obtenidos de los mencionados ensayos son:

Ensayo en vacío: $\underline{Z}_{10}=R_{10}= 8\Omega$

Ensayo de cortocircuito: $\underline{Z}_{2CC}=R_{2CC}= 3{,}5\Omega$

En estas condiciones, determínese:

1 Matriz de impedancias del bipuerta.
2 Equivalente en T del bipuerta.
3 Para obtener un valor de $\underline{Z}_{entrada} = 5\Omega$, impedancia a conectar en la puerta de salida.
4 Valor de la impedancia a conectar en la puerta de salida para que se le transfiera potencia máxima. Determínese asimismo el valor de la mencionada potencia máxima, si en la entrada se conecta una fuente real de tensión tal que :$\underline{E}g=24_{\angle 0°}$V y $Rg=4\Omega$.

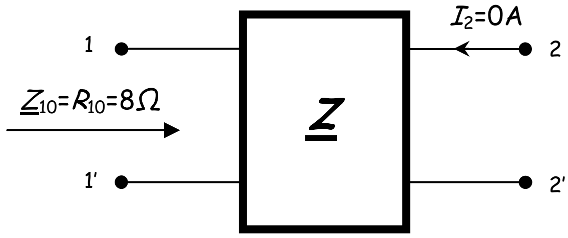


Fig. 1: Ensayo de vacío

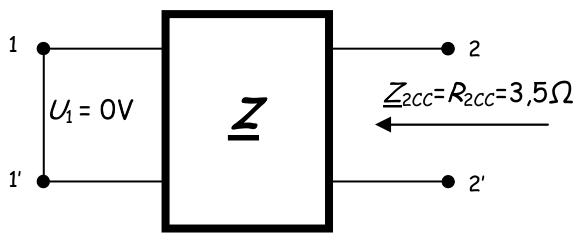


Fig. 2: Ensayo de cortocircuito

RESOLUCIÓN:

1 Matriz de impedancias.

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{z}_{11}\cdot\underline{I}_1 + \underline{z}_{12}\cdot\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{z}_{21}\cdot\underline{I}_1 + \underline{z}_{22}\cdot\underline{I}_2 \end{cases}$$

Como se sabe que el bipuerta es recíproco y simétrico, entonces:

$$\begin{cases} \underline{z}_{11} = \underline{z}_{22} \\ \text{y} \\ \underline{z}_{21} = \underline{z}_{12} \end{cases}$$

quedan las ecuaciones de definición de la siguiente forma: $\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{z}_{11}\cdot\underline{I}_1 + \underline{z}_{21}\cdot\underline{I}_2 & (1) \\ \underline{U}_2 = \underline{z}_{21}\cdot\underline{I}_1 + \underline{z}_{11}\cdot\underline{I}_2 & (2) \end{cases}$

Del ensayo de vacío se sabe:

$$\underline{z}_{10} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = 8\Omega \quad (3)$$

Del ensayo de cortocircuito por otro lado conocemos:

$$\underline{z}_{2CC} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_1=0} = 3{,}5\Omega \quad (4)$$

Si en la ecuación de definición (1) se establecen las condiciones del ensayo de vacío :$\underline{I}_2$=0, se puede despejar el valor de $\underline{z}_{11}$:

$$\underline{U}_1 = \underline{z}_{11}\cdot\underline{I}_1 + \underline{z}_{21}\cdot\underline{I}_2 \quad (1) \quad \xrightarrow{\underline{I}_2=0} \underline{U}_1 = \underline{z}_{11}\cdot\underline{I}_1 \quad \rightarrow \underline{z}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}$$

Que no es otro que el obtenido en la ecuación (3): Tensión de la puerta uno dividida por la corriente de la puerta uno, cuando la corriente de la segunda puerta es nula. De donde se deduce que:

$$\underline{z}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = 8\Omega$$

Operando de la misma forma si en la ecuación de definición (1) se establecen las condiciones del ensayo de cortocircuito:$\underline{U}_1$=0.

$$\underline{U}_1 = \underline{z}_{11}\cdot\underline{I}_1 + \underline{z}_{21}\cdot\underline{I}_2 \quad (1) \xrightarrow{\underline{U}_1=0} \quad 0 = \underline{z}_{11}\cdot\underline{I}_1 + \underline{z}_{21}\cdot\underline{I}_2 \rightarrow \underline{I}_1 = -\frac{\underline{z}_{21}}{\underline{z}_{11}}\cdot\underline{I}_2$$

Se lleva esta relación a la ecuación de definición (2):

$$\underline{U}_2 = \underline{z}_{21}\cdot\underline{I}_1 + \underline{z}_{11}\cdot\underline{I}_2 \quad (2) \quad \rightarrow \underline{U}_2 = \underline{z}_{21}\cdot\left(-\frac{\underline{z}_{21}}{\underline{z}_{11}}\cdot\underline{I}_2\right) + \underline{z}_{11}\cdot\underline{I}_2 = \underline{I}_2\left(\underline{z}_{11} - \frac{\underline{z}_{21}^2}{\underline{z}_{11}}\right)$$

Si en esta última relación, se divide la tensión de la segunda puerta entre la corriente de la segunda puerta, se llega a la ecuación (4). De modo que obtenemos una relación entre parámetros de impedancias:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \left(\underline{z}_{11} - \frac{\underline{z}_{21}^2}{\underline{z}_{11}}\right)$$

$$\underline{z}_{2CC} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_1=0} = 3{,}5\Omega \quad (4)$$

$$\underline{z}_{11} - \frac{\underline{z}_{21}^2}{\underline{z}_{11}} = 3{,}5 \rightarrow \underline{z}_{11}^2 - \underline{z}_{21}^2 - 3{,}5\underline{z}_{11} = 0$$

Como se sabe que $\underline{z}_{11}$=8 Ω entonces:

$$\underline{z}_{11}^2 - \underline{z}_{21}^2 - 3{,}5\underline{z}_{11} = 0$$

$$8^2 - \underline{z}_{21}^2 - 3{,}5 \cdot 8 = 0 \rightarrow \underline{z}_{21} = \sqrt{64-28} = \sqrt{36} = \pm 6\Omega$$

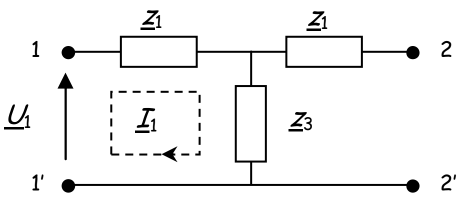
Como es un número complejo, de parte real únicamente se elige el valor positivo.

Y la matriz de impedancias del bipuerta queda como sigue:

$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ y sus ecuaciones de definición: } \begin{cases} \underline{U}_1 = 8 \cdot \underline{I}_1 + 6 \cdot \underline{I}_2 & (1) \\ \underline{U}_2 = 6 \cdot \underline{I}_1 + 8 \cdot \underline{I}_2 & (2) \end{cases}$$

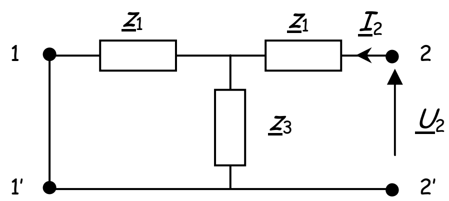
Otra forma de hacerlo: Con el equivalente en T. Dado que es un bipuerta recíproco y simétrico su equivalente en T tendrá las impedancias longitudinal de igual valor, a la que llamamos $\underline{z}_1$ y la impedancia transversal será $\underline{z}_3$.

Ensayo de vacío:



$$\underline{z}_{10} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = 8 = \underline{z}_1 + \underline{z}_3$$

Ensayo de cortocircuito:



$$\underline{z}_{2CC} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_1=0} = 3{,}5 = \frac{\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_3}{\underline{z}_1 + \underline{z}_3} + \underline{z}_1$$

$$\frac{\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_3}{\underline{z}_1 + \underline{z}_3} + \underline{z}_1 = 3{,}5 \quad \rightarrow \quad \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_3 + \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_3 + \underline{z}_1^2 - 3{,}5\underline{z}_1 - 3{,}5\underline{z}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_3 + \underline{z}_1^2 - 3{,}5\underline{z}_1 - 3{,}5\underline{z}_3 = 0$$

De esta forma se dispone de dos ecuaciones con dos incógnitas, que se resolverá a continuación.

De la ecuación del ensayo en vacío se despeja $\underline{z}_3$ en función de $\underline{z}_1$, relación que se lleva a la ecuación del ensayo de cortocircuito:

$$\begin{cases} \underline{z}_3 = 8 - \underline{z}_1 \\ 2 \cdot \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_3 + \underline{z}_1^2 - 3{,}5\underline{z}_1 - 3{,}5\underline{z}_3 = 0 \end{cases}$$

$$2\cdot\underline{z}_1\cdot(8-\underline{z}_1)+\underline{z}_1^2-3{,}5\cdot\underline{z}_1-3{,}5(8-\underline{z}_1)=0$$
$$-\underline{z}_1^2+16\cdot\underline{z}_1-28=0$$

Ecuación de segundo grado que se resuelve:

$$\underline{z}_1=\frac{-16\pm\sqrt{16^2-4\cdot(-1)\cdot(-28)}}{2\cdot(-1)}=\frac{-16\pm 12}{-2}=14\Omega \text{ ó } 2\Omega$$

Para $\underline{z}_1$=14 Ω, $\underline{z}_3$=8-14=-6 Ω, valor que no es posible por ser una resistencia negativa.

Para $\underline{z}_1$=2 Ω, $\underline{z}_3$=8-2=6 Ω, solución posible.

Una vez determinados los parámetros del equivalente en T, se pueden determinar los parámetros de la matriz de impedancias:

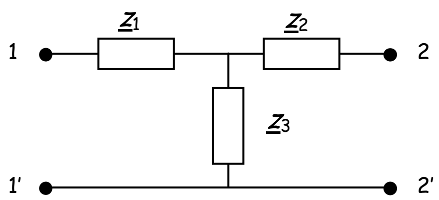
$$\underline{z}_3=\underline{z}_{12}=\underline{z}_{21}=6\Omega$$

$\underline{z}_1=\underline{z}_{11}-\underline{z}_{12} \quad\rightarrow\quad \underline{z}_{11}=\underline{z}_1+\underline{z}_{12}=2+6=8\Omega$, además se sabe que: $\underline{z}_{11}=\underline{z}_{22}=8\Omega$

Queda finalmente la matriz de impedancias de la siguiente forma:

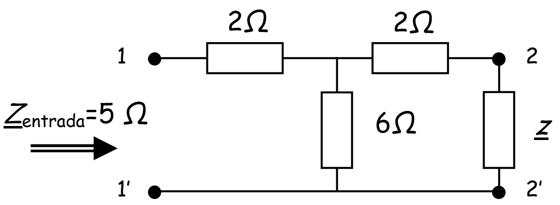
$$[\underline{Z}]=\begin{bmatrix}8 & 6\\ 6 & 8\end{bmatrix}$$

2 Equivalente en T del bipuerta.



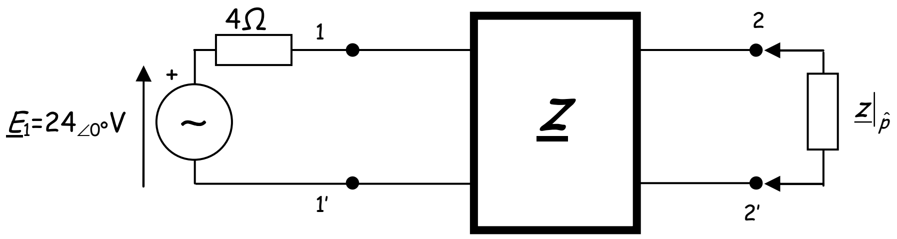
$$\underline{z}_1=\underline{z}_{11}-\underline{z}_{12}=8-6=2\Omega$$
$$\underline{z}_2=\underline{z}_{11}-\underline{z}_{12}=8-6=2\Omega$$
$$\underline{z}_3=\underline{z}_{12}=6\Omega$$

3 Para obtener un valor de $\underline{Z}_{entrada}$ = 5Ω, impedancia a conectar en la puerta de salida.



$$\underline{z}_{entrada}=\frac{(\underline{z}+2)\cdot 6}{\underline{z}+8}+2=5$$
$$6\underline{z}+12+2\underline{z}+16-5\underline{z}-40=0$$
$$3\underline{z}=12$$
$$\underline{z}=4\Omega$$

4 Equivalente de Thevenin.



Tensión de Thevenin:

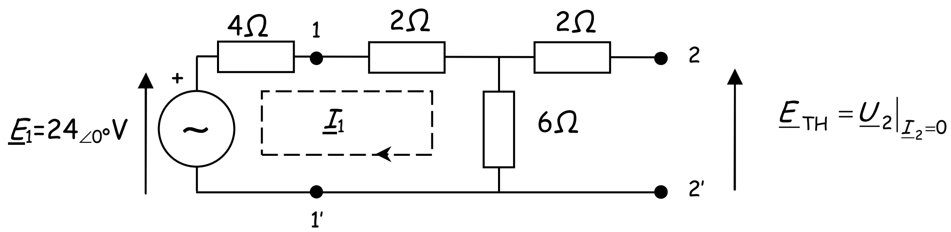
Se define como: $\underline{E}_{TH} = \underline{U}_2\big|_{\underline{I}_2=0}$

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = 8 \cdot \underline{I}_1 + 6 \cdot \underline{I}_2 & (1) \\ \underline{U}_2 = 6 \cdot \underline{I}_1 + 8 \cdot \underline{I}_2 & (2) \\ \underline{I}_2 = 0 & (5) \\ \underline{U}_1 = 24_{\angle 0^\circ} - 4 \cdot \underline{I}_1 & (6) \end{cases}$$

Llevando los valores de $\underline{I}_2$ y $\underline{U}_1$ a la ecuación (1) queda: $24_{\angle 0^\circ} - 4 \cdot \underline{I}_1 = 8 \cdot \underline{I}_1 \rightarrow \underline{I}_1 = 2A$
A continuación llevando los valores $\underline{I}_2$ e $\underline{I}_1$ a la ecuación (2) se obtiene el valor de la tensión de Thevenin:

$$\underline{E}_{TH} = \underline{U}_2 = 6 \cdot \underline{I}_1 = 6 \cdot 2 = 12V$$

También se puede obtener la tensión de Thevenin a partir del equivalente en T del bipuerta:

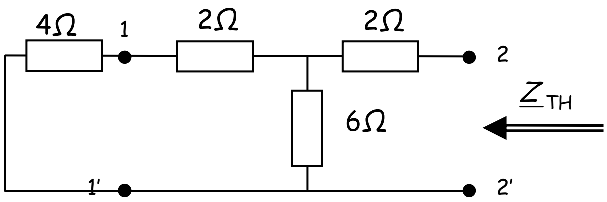


$$\underline{I}_1 = \frac{24_{\angle 0^\circ}}{4+2+6} = 2A$$

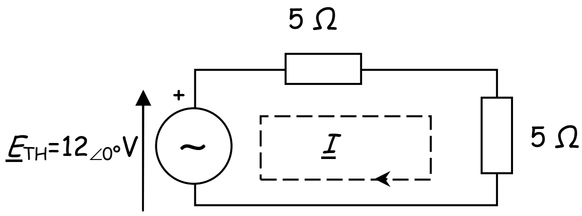
Y la tensión es la misma que hay en bornes de la resistencia de 6 Ω:

$$\underline{E}_{TH} = \underline{U}_2\big|_{\underline{I}_2=0} = 6 \cdot 2 = 12V$$

Impedancia de Thevenin:



$$\underline{z}_{TH} = \frac{(4+2)\cdot 6}{4+2+6} + 2 = 5\Omega$$



$$\underline{I} = \frac{12}{10} = 1{,}2A$$

$$\hat{P} = 5\cdot \underline{I}^2 = 5\cdot 1{,}2^2 = 7{,}2W$$