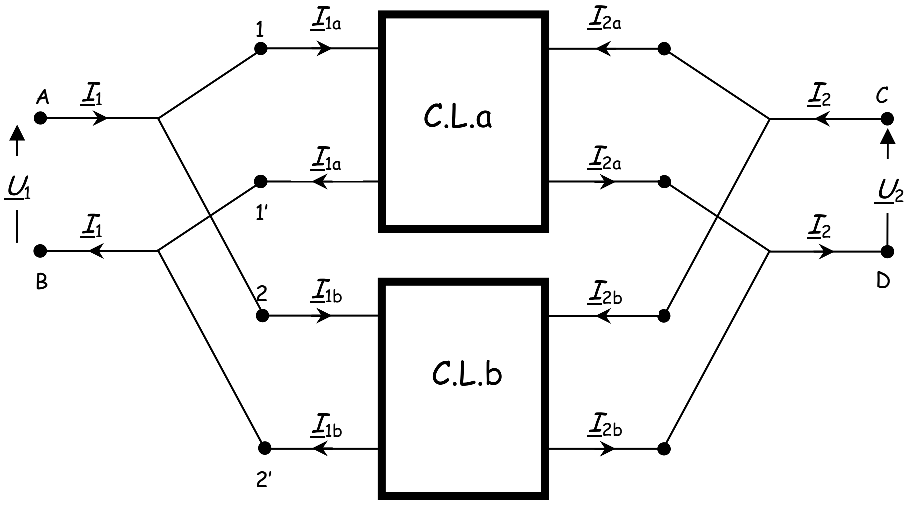
$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{1a} \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -j \\ j & 4+j3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_{2a} \end{bmatrix}$$

Sabiendo que las ecuaciones anteriores son las ecuaciones de dos cuadripolos "a" y "b" idénticos:

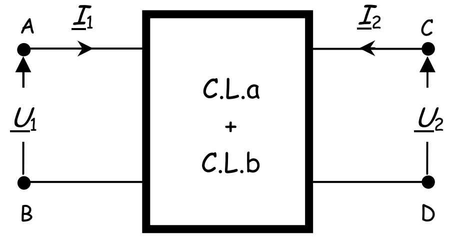
1. Dibújese la conexión de los cuadripolos "a" y "b", para formar una conexión "a y b" en paralelo.
2. Obténgase el circuito equivalente en π del cuadripolo "a+b".
3. Dibújese la conexión de los cuadripolos "a" y "b", para formar una conexión en cascada. Indicar las relaciones entre cuadripolos, y calcular las ecuaciones de dicha conexión empleando los parámetros de transmisión.
4. Calcúlese para esta última conexión: impedancia a conectar en la salida para transferir potencia máxima.
5. Para dicha impedancia determínese: impedancia de entrada, ganancia de corriente, y ganancia de tensión.

RESOLUCIÓN

Representación de la asociación:



Representación del cuadripolo equivalente



Los parámetros de impedancia de la asociación son los siguientes

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{11a} + \underline{Y}_{11b}$$
$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{12a} + \underline{Y}_{12b}$$
$$\underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{21a} + \underline{Y}_{21b}$$
$$\underline{Y}_{22} = \underline{Y}_{22a} + \underline{Y}_{22b}$$

Relación entre las tensiones y corrientes de los cuadripolos y la asociación

$$\underline{U}_{1} = \underline{U}_{1a} = \underline{U}_{1b} \qquad \underline{U}_{2} = \underline{U}_{2a} = \underline{U}_{2b}$$

$$\underline{I}_{1} = \underline{I}_{1a} + \underline{I}_{1b} \qquad \underline{I}_{2} = \underline{I}_{2a} + \underline{I}_{2b}$$

2 Circuito equivalente en π

Las ecuaciones características vienen dadas en función de los parámetros híbridos inversos (parámetros g).
Los cuadripolos son recíprocos puesto que se cumple la condición de reciprocidad ($\underline{g}_{12}$=-$\underline{g}_{21}$), por lo que existe el equivalente en π.
Se emplea la tabla de conversión entre parámetros para determinar los parámetros de admitancias y a continuación poder hallar los parámetros del circuito π equivalente.

$$\Delta g = \begin{vmatrix} 0{,}5 & -\mathrm{j} \\ \mathrm{j} & 4+\mathrm{j}3 \end{vmatrix} = 1 + \mathrm{j}1{,}5$$

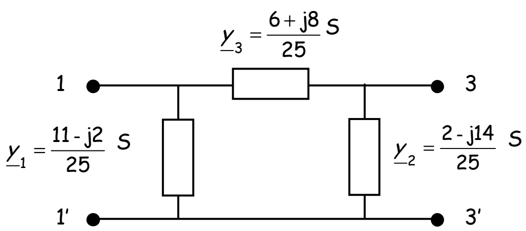
$$\underline{Y}_{11a} = \underline{Y}_{11b} = \frac{\Delta g}{\underline{g}_{22}} = \frac{1+\mathrm{j}1{,}5}{4+\mathrm{j}3} = \frac{17+\mathrm{j}6}{50}\ \mathrm{S}; \qquad \underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{11a} + \underline{Y}_{11b} = \frac{17+\mathrm{j}6}{25}\ \mathrm{S}$$

$$\underline{Y}_{12a} = \underline{Y}_{12b} = \frac{\underline{g}_{12}}{\underline{g}_{22}} = \frac{-\mathrm{j}}{4+\mathrm{j}3} = \frac{-6-\mathrm{j}8}{50}\ \mathrm{S}; \qquad \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{12a} + \underline{Y}_{12b} = \frac{-6-\mathrm{j}8}{25}\ \mathrm{S}$$

$$\underline{Y}_{21a} = \underline{Y}_{21b} = \frac{-\underline{g}_{21}}{\underline{g}_{22}} = \frac{-\mathrm{j}}{4+\mathrm{j}3} = \frac{-6-\mathrm{j}8}{50}\ \mathrm{S}; \qquad \underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{21a} + \underline{Y}_{21b} = \frac{6-\mathrm{j}8}{25}\ \mathrm{S}$$

$$\underline{Y}_{22a} = \underline{Y}_{22b} = \frac{1}{\underline{g}_{22}} = \frac{1}{4+\mathrm{j}3} = \frac{8-\mathrm{j}6}{50}\ \mathrm{S}; \qquad \underline{Y}_{22} = \underline{Y}_{22a} + \underline{Y}_{22b} = \frac{8-\mathrm{j}6}{25}\ \mathrm{S}$$

Los parámetros del equivalente en π.

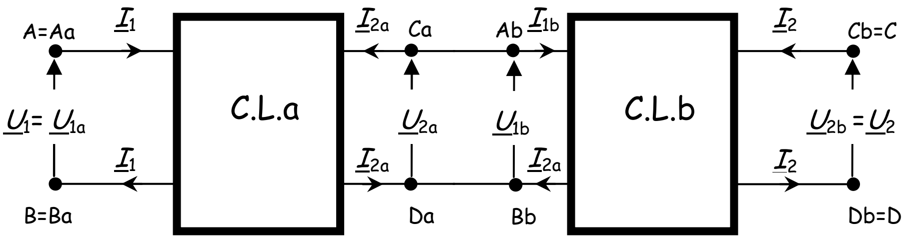


$$\underline{Y}_{1} = \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12} = \frac{11-\mathrm{j}2}{25}\ \mathrm{S}$$

$$\underline{Y}_{2} = \underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12} = \frac{2-\mathrm{j}14}{25}\ \mathrm{S}$$

$$\underline{Y}_{3} = -\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21} = \frac{6+\mathrm{j}8}{25}\ \mathrm{S}$$

3 Conexión en cascada



Trabajando con parámetros de transmisión, se puede obtener sencillamente la matriz de transmisión del cuadripolo equivalente.

[T]=[Ta]·[Tb]

Los parámetros de las dos matrices de transmisión son iguales: $\underline{A}a=\underline{A}b$; $\underline{B}a=\underline{B}b$; $\underline{C}a=\underline{C}b$; $\underline{D}a=\underline{D}b$.

Para obtenerlos se emplea la tabla de conversión entre parámetros de distinto tipo, de donde se obtienen las relaciones de conversión:

$$\underline{A}_a = \underline{A}_b = \frac{1}{\underline{g}_{21}} = \frac{1}{\mathrm{j}} = -\mathrm{j}$$

$$\underline{B}_a = \underline{B}_b = \frac{\underline{g}_{22}}{\underline{g}_{21}} = \frac{4+\mathrm{j}3}{\mathrm{j}} = (3\text{-}\mathrm{j}4)\Omega$$

$$\underline{C}_a = \underline{C}_b = \frac{\underline{g}_{11}}{\underline{g}_{21}} = \frac{0{,}5}{\mathrm{j}} = -\mathrm{j}0{,}5\ \mathrm{S}$$

$$\underline{D}_a = \underline{D}_b = \frac{\Delta g}{\underline{g}_{21}} = \frac{1+\mathrm{j}1{,}5}{\mathrm{j}} = 1{,}5-\mathrm{j}$$

Los parámetros de transmisión del cuadripolo equivalente:

$$[\mathrm{T}] = [\mathrm{T_a}]\cdot[\mathrm{T_b}] = \begin{bmatrix} -\mathrm{j} & 3-\mathrm{j}4 \\ -\mathrm{j}0{,}5 & 1{,}5-\mathrm{j} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -\mathrm{j} & 3-\mathrm{j}4 \\ -\mathrm{j}0{,}5 & 1{,}5-\mathrm{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(3+\mathrm{j}1{,}5) & -(3{,}5+\mathrm{j}12) \\ -(1+\mathrm{j}0{,}75) & -(0{,}75+\mathrm{j}4{,}5) \end{bmatrix}$$

$\underline{A} = -(3+\mathrm{j}1{,}5)$; $\underline{B} = -(3{,}5+\mathrm{j}12)\ \Omega$; $\underline{C} = -(1+\mathrm{j}0{,}75)\ \mathrm{S}$; $\underline{D} = -(0{,}75+\mathrm{j}4{,}5)$

Las ecuaciones características en función de los parámetros de transmisión:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = -(3+\mathrm{j}1{,}5)\cdot\underline{U}_2 + (3{,}5+\mathrm{j}12)\cdot\underline{I}_2 & (1) \\ \underline{I}_1 = -(1+\mathrm{j}0{,}75)\cdot\underline{U}_2 + (0{,}75+\mathrm{j}4{,}5)\cdot\underline{I}_2 & (2) \end{cases}$$

4 Impedancia para transmitir potencia máxima.

La impedancia a conectar deberá ser la conjugada de la de Thevenin: $\underline{z}_L = \underline{z}_{TH}{}^*$

Se sabe, que esta impedancia se puede determinar como la tensión de Thevenin entre la corriente de Norton: $\underline{Z}_{TH} = \dfrac{\underline{U}_{TH}}{\underline{I}_N}$

Queda determinar: la tensión de Thevenin y la corriente de Norton.

La tensión de Thevenin es aquella se establece entre C y D, cuando la corriente $\underline{I}_2$ es nula. Se lleva esta condición a la ecuación (1), donde se obtiene la tensión de Thevenin:

$$\underline{U}_1 = -(3 + j1{,}5)\cdot\underline{U}_2 + (3{,}5 + j12)\cdot\underline{I}_2 \quad (1) \quad \xrightarrow{\underline{I}_2=0} \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_{TH} = \frac{-\underline{U}_1}{3 + j1{,}5}$$

La corriente de Norton, se establece entre C y D cuando estos extremos están cortocircuitados, es decir con $\underline{U}_2$ nula. Ojo, la polaridad de la corriente de Norton es de sentido contrario a $\underline{I}_2$, circunstancia esta que habrá que tener en cuenta.
Llevada esta condición a la ecuación (1) se puede determinar la corriente de Norton:

$$\underline{U}_1 = -(3 + j1{,}5)\cdot\underline{U}_2 + (3{,}5 + j12)\cdot\underline{I}_2 \quad \xrightarrow{\underline{U}_2=0} \quad -\underline{I}_2 = \underline{I}_N = \frac{-\underline{U}_1}{3{,}5 + j12}$$

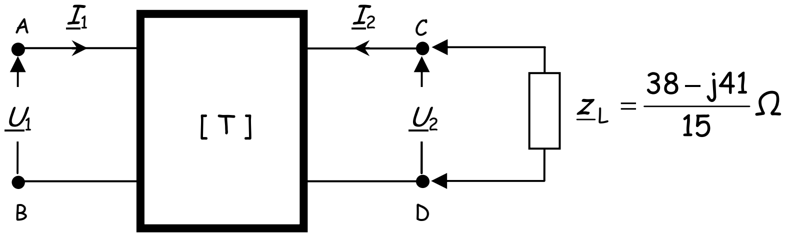
Así la impedancia de Thevenin se calcula como el conciente de las dos anteriores:

$$\underline{Z}_{TH} = \frac{\underline{U}_{TH}}{\underline{I}_N} = \frac{\dfrac{-\underline{U}_1}{3 + j1{,}5}}{\dfrac{-\underline{U}_1}{3{,}5 + j12}} = \frac{38 + j41}{15}\,\Omega$$

Y finalmente la impedancia a la que se transfiere potencia máxima:

$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_{TH}{}^* = \frac{38 - j41}{15}\,\Omega$$

5



Impedancia de entrada:

$$\underline{Z}_{entrada} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}$$

Se determina utilizando la ley de Ohm en la impedancia de carga, la tensión de la puerta dos.

$\underline{U}_2 = -\underline{I}_2 \cdot \underline{z}_L = -\underline{I}_2 \cdot \frac{38 - j41}{15} \Omega$ y esta condición se lleva a las ecuaciones características dadas en función de los parámetros de transmisión. De forma que se obtendrán la tensión y la corriente de la puerta uno, en función de la corriente de la puerta dos.

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = -(3 + j1{,}5) \cdot \left(-\underline{I}_2 \cdot \frac{38 - j41}{15}\right) + (3{,}5 + j12) \cdot \underline{I}_2 = (15{,}2 + j7{,}6) \cdot \underline{I}_2 \\ \\ \underline{I}_1 = -(1 + j0{,}75) \cdot \left(-\underline{I}_2 \cdot \frac{38 - j41}{15}\right) + (0{,}75 + j4{,}5) \cdot \underline{I}_2 = \frac{16 + j11}{3} \underline{I}_2 \end{cases}$$

$$\underline{z}_{entrada} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{(15{,}2 + j7{,}6) \cdot \underline{I}_2}{\frac{16 + j11}{3} \underline{I}_2} = \frac{(28{,}6 - j4)}{11} \Omega$$

Ganancia de corriente: $G_I = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{I}_2}{\frac{16 + j11}{3} \cdot \underline{I}_2} = \frac{3}{16 + j11} = 0{,}154476_{\angle -34{,}5^\circ}$

Ganancia de tensión: $G_U = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{38 - j41}{15} \cdot \underline{I}_2}{(15{,}2 + j7{,}6) \cdot \underline{I}_2} = \frac{-6{,}14 + j21{,}05}{100} = 0{,}22_{\angle 106{,}26^\circ}$