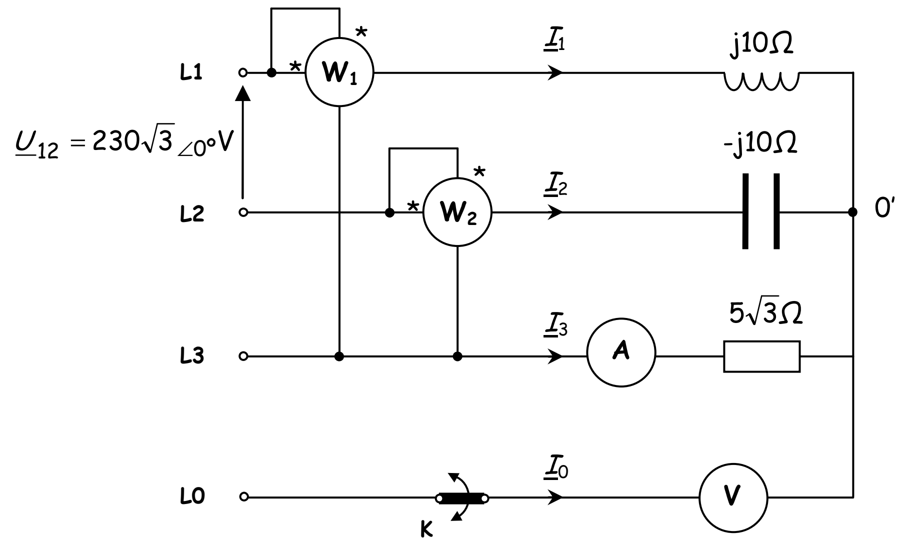
Al circuito de la figura se le aplica un sistema trifásico de tensiones, simétrico, equilibrado y de secuencia directa con una tensión compuesta de valor: $\underline{U}_{12} = 230\sqrt{3}_{\angle 0°}\text{V}$.
Determínese:

Con K cerrado:

1 Corrientes de línea: $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ e $\underline{I}_0$.
2 Lectura de los instrumentos: LA, LV, LW_1 y LW_2
3 Potencias disipadas en el circuito: *P*, *Q*, y *S*.
4 Diagrama vectorial completo.

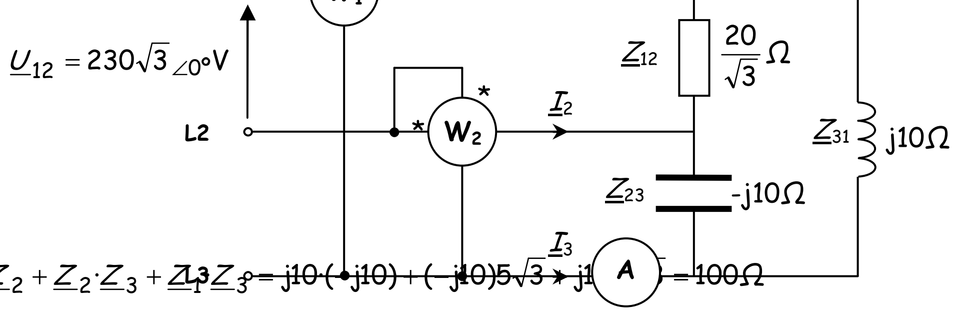
Se abre K:

5 Nuevas corrientes de línea: $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ e $\underline{I}_0$.



RESOLUCIÓN:
Esté K abierto o cerrado la corriente $\underline{I}_0$ será nula ($\underline{I}_0$=0), ya que la impedancia del voltímetro tiende a infinito y se da la misma circunstancia con independencia de la posición del interruptor K: es un sistema a tres hilos. La única diferencia entre estos dos casos es que con K cerrado el voltímetro indica la tensión de desplazamiento $|\underline{U}_{00'}|$ y con K abierto LV=0V.

Por métodos de sustitución: Resolución mediante la transformación estrella-triángulo (teorema de Kenelly):



$\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\cdot\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_3 = j10\cdot(-j10) + (-j10)5\sqrt{3} + j1 \ldots = 100\Omega$

$$\underline{Z}_{12}=\frac{100}{5\sqrt{3}}=\frac{20}{\sqrt{3}}\,\Omega\,;\qquad \underline{Z}_{23}=\frac{100}{j10}=-j10\Omega\,;\qquad \underline{Z}_{31}=\frac{100}{-j10}=j10\Omega$$

$$\underline{I}_{12}=\frac{\underline{U}_{12}}{\frac{20}{\sqrt{3}}}=\frac{230\sqrt{3}_{\angle 0°}}{\frac{20}{\sqrt{3}}}=34{,}5_{\angle 0°}A$$

$$\underline{I}_{23}=\frac{\underline{U}_{23}}{10_{\angle -90°}}=\frac{230\sqrt{3}_{\angle -120°}}{10_{\angle -90°}}=23\sqrt{3}_{\angle -30°}A$$

$$\underline{I}_{31}=\frac{\underline{U}_{31}}{10_{\angle 90°}}=\frac{230\sqrt{3}_{\angle 120°}}{10_{\angle 90°}}=23\sqrt{3}_{\angle 30°}A$$

1 Las corrientes de línea:

$$\underline{I}_{1}=34{,}5_{\angle 0°}-23\sqrt{3}_{\angle 30°}=11{,}5\sqrt{3}_{\angle -90°}\ A$$

$$\underline{I}_{2}=23\sqrt{3}_{\angle -30°}-34{,}5_{\angle 0°}=11{,}5\sqrt{3}_{\angle -90°}\ A$$

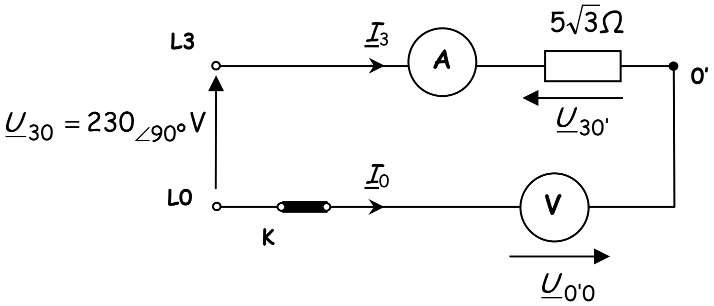
$$\underline{I}_{3}=23\sqrt{3}_{\angle 30°}-23\sqrt{3}_{\angle -30°}=23\sqrt{3}_{\angle 90°}\ A$$

$$\underline{I}_{0}=\underline{0}\ A$$

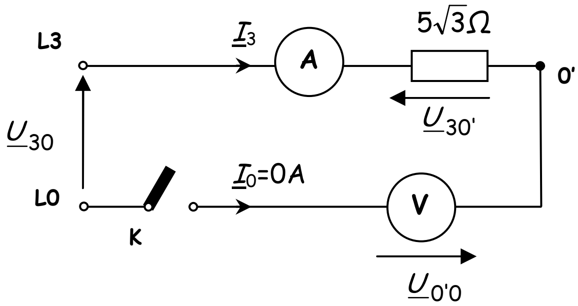
2 Lectura de los instrumentos:

Lectura del amperímetro:
$LA=\left|\underline{I}_3\right|=23\sqrt{3}A$

Lectura del voltímetro:



K cerrado



K abierto

K cerrado:
$\underline{U}_{0'0}=\underline{U}_{30}-\underline{U}_{30'}=230_{\angle 90°}-5\sqrt{3}\cdot 23\sqrt{3}_{\angle 90°}=230_{\angle 90°}-345_{\angle 90°}=115_{\angle -90°}V$
Así la lectura del voltímetro con K cerrado:
$LV=\left|\underline{U}_{0'0}\right|=115V$

K abierto:
LV=0 V

Lecturas de los vatímetros:

$$LW_1 = \Re_e\left[\underline{U}_{13}\cdot\underline{I}_1{}^*\right] = \Re_e\left[230\sqrt{3}_{\angle -60^\circ}\cdot 11{,}5\sqrt{3}_{\angle 90^\circ}\right] = \Re_e\left[7935_{\angle 30^\circ}\right] = \Re_e\left[3967{,}5\sqrt{3} + j3967{,}5\right] = 3967{,}5\sqrt{3}\text{div}$$

De otro modo:

$$LW_1 = U_{13}\cdot I_1\cdot\cos\left(\underline{U}_{13}\ \hat{}\ \underline{I}_1\right) = 230\sqrt{3}\cdot 11{,}5\sqrt{3}\cdot\cos 30^\circ = 3967{,}5\sqrt{3}\text{div}$$

$$LW_2 = \Re_e\left[\underline{U}_{23}\cdot\underline{I}_2{}^*\right] = \Re_e\left[230\sqrt{3}_{\angle -120^\circ}\cdot 11{,}5\sqrt{3}_{\angle 90^\circ}\right] = \Re_e\left[3967{,}5\sqrt{3} - j3967{,}5\right] = 3967{,}5\sqrt{3}\text{div}$$

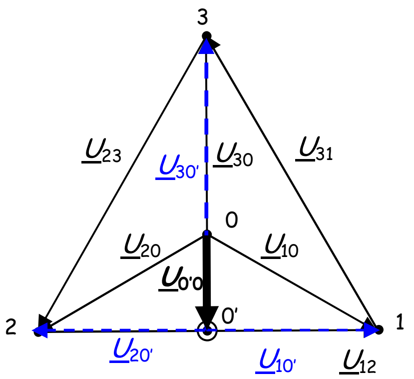
O de otro modo:

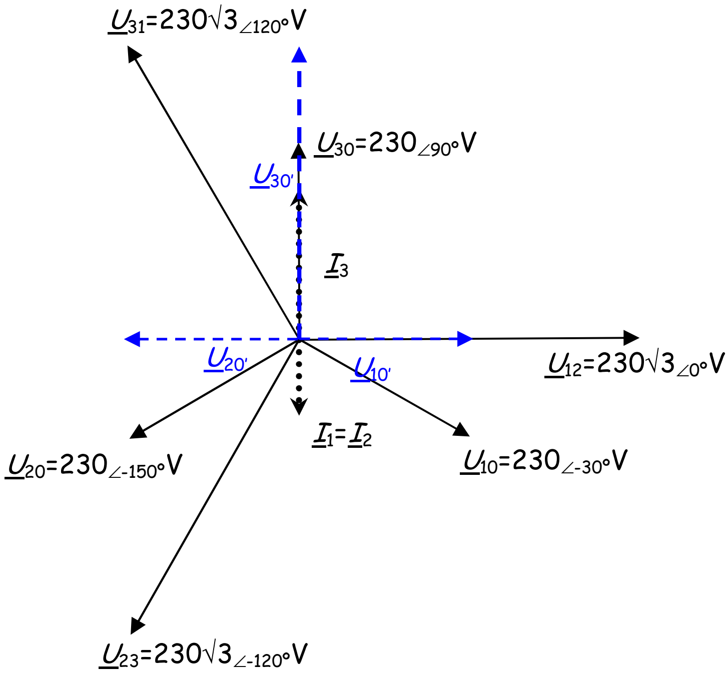
$$LW_2 = U_{23}\cdot I_2\cdot\cos\left(\underline{U}_{23}\ \hat{}\ \underline{I}_2\right) = 230\sqrt{3}\cdot 11{,}5\sqrt{3}\cdot\cos 30^\circ = 3967{,}5\sqrt{3}\text{div}$$

3 Potencias disipadas

$$P = 5\sqrt{3}\cdot\left(23\sqrt{3}\right)^2 = 7935\sqrt{3}\text{W} = LW_1 + LW_2$$
$$Q = 10\cdot\left(11{,}5\sqrt{3}\right)^2 - 10\cdot\left(11{,}5\sqrt{3}\right)^2 = 0\,\text{var}$$
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 7935\sqrt{3}\ \text{VA}$$

4 Diagrama vectorial completo:





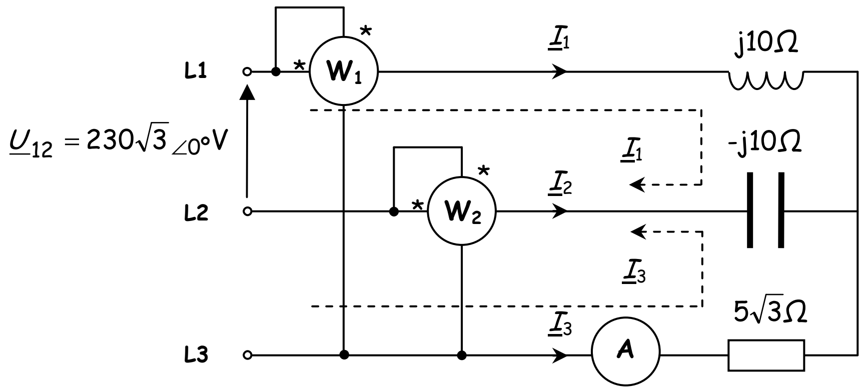
$$\underline{U}_{0'0} = 115_{\angle -90^\circ}\text{V}$$

$$\underline{U}_{10'} = 10_{\angle 90^\circ}\cdot 11{,}5\sqrt{3}_{\angle -90} = 115\sqrt{3}_{\angle 0^\circ}\text{V}$$

$$\underline{U}_{20'} = 10_{\angle -90^\circ}\cdot 11{,}5\sqrt{3}_{\angle -90} = 115\sqrt{3}_{\angle 180^\circ}\text{V}$$

$\underline{U}_{30'} = 5\sqrt{3}_{\angle 0°} \cdot 23\sqrt{3}_{\angle 90°} = 345_{\angle 90°} V$

Resolución por métodos generales de análisis (método de mallas).



$$\begin{bmatrix} 0 & -j10 \\ -j10 & 5\sqrt{3} - j10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 230\sqrt{3}_{\angle 0°} \\ -230\sqrt{3}_{\angle -120°} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 230\sqrt{3}_{\angle 0°} \\ 230\sqrt{3}_{\angle 60°} \end{bmatrix}$$

Desarrollando la primera fila:

$$0 \cdot \underline{I}_1 - j10 \cdot \underline{I}_3 = 230\sqrt{3}_{\angle 0°} \rightarrow \underline{I}_3 = \frac{230\sqrt{3}_{\angle 0°}}{10_{\angle -90°}} = 23\sqrt{3}_{\angle 90°} = j23\sqrt{3} A$$

Desarrollando la segunda fila:

$$-j10 \cdot \underline{I}_1 + \left(5\sqrt{3} - j10\right) j23\sqrt{3} = 230\sqrt{3}_{\angle 60°} \rightarrow$$

$$\underline{I}_1 = \frac{115\sqrt{3} + j345 - j345 - 230\sqrt{3}}{-j10} = \frac{-115\sqrt{3}}{-j10} = -j11{,}5\sqrt{3} = 11{,}5\sqrt{3}_{\angle -90°} A$$

Finalmente: $\underline{I}_2 = -\left(\underline{I}_3 + \underline{I}_1\right) = -\left(j23\sqrt{3} - j11{,}5\sqrt{3}\right) = -j11{,}5\sqrt{3} = 11{,}5\sqrt{3}_{\angle -90°} A$

$\underline{I}_0 = 0A$

El resto del problema igual que en el caso anterior.

Por aplicación de teoremas generales de redes (Teorema de Millman)

$$\underline{U}_{0'0} = \frac{\underline{U}_{10}\cdot\underline{Y}_1 + \underline{U}_{20}\cdot\underline{Y}_2 + \underline{U}_{30}\cdot\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_0} =$$

$$\underline{U}_{0'0} = \frac{230_{\angle -30^\circ}\cdot\left[\frac{1}{10}\right]_{\angle -90^\circ} + 230_{\angle -150^\circ}\cdot\left[\frac{1}{10}\right]_{\angle 90^\circ} + 230_{\angle 90^\circ}\cdot\left[\frac{1}{5\sqrt{3}}\right]_{\angle 0^\circ}}{\left[\frac{1}{10}\right]_{\angle -90^\circ} + \left[\frac{1}{10}\right]_{\angle 90^\circ} + \left[\frac{1}{5\sqrt{3}}\right]_{\angle 0^\circ} + \frac{1}{\infty}} =$$

$$\underline{U}_{0'0} = 5\sqrt{3}\left[23_{\angle -120^\circ} + 23_{\angle -60^\circ} + \left[\frac{46}{\sqrt{3}}\right]_{\angle 90^\circ}\right] = 115_{\angle -90^\circ}\mathrm{V}$$

$$\underline{U}_{10'} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{0'0} = 230_{\angle -30^\circ} - 115_{\angle -90} = 115\sqrt{3}_{\angle 0^\circ}\mathrm{V}$$

$$\underline{U}_{20'} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{0'0} = 230_{\angle -150^\circ} - 115_{\angle -90} = 115\sqrt{3}_{\angle 180^\circ}\mathrm{V}$$

$$\underline{U}_{30'} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{0'0} = 230_{\angle -90^\circ} - 115_{\angle -90} = 345_{\angle 90^\circ}\mathrm{V}$$

Las corrientes:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{10'}}{10_{\angle 90^\circ}} = \frac{115\sqrt{3}_{\angle 0^\circ}}{10_{\angle 90^\circ}} = 11{,}5\sqrt{3}_{\angle -90^\circ}A$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{20'}}{10_{\angle -90^\circ}} = \frac{115\sqrt{3}_{\angle 180^\circ}}{10_{\angle -90^\circ}} = 11{,}5\sqrt{3}_{\angle 270^\circ}A$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{30'}}{5\sqrt{3}_{\angle 0^\circ}} = \frac{345_{\angle 90^\circ}}{5\sqrt{3}_{\angle 0^\circ}} = 23\sqrt{3}_{\angle 90^\circ}A$$

El resto del problema igual que los casos anteriores.