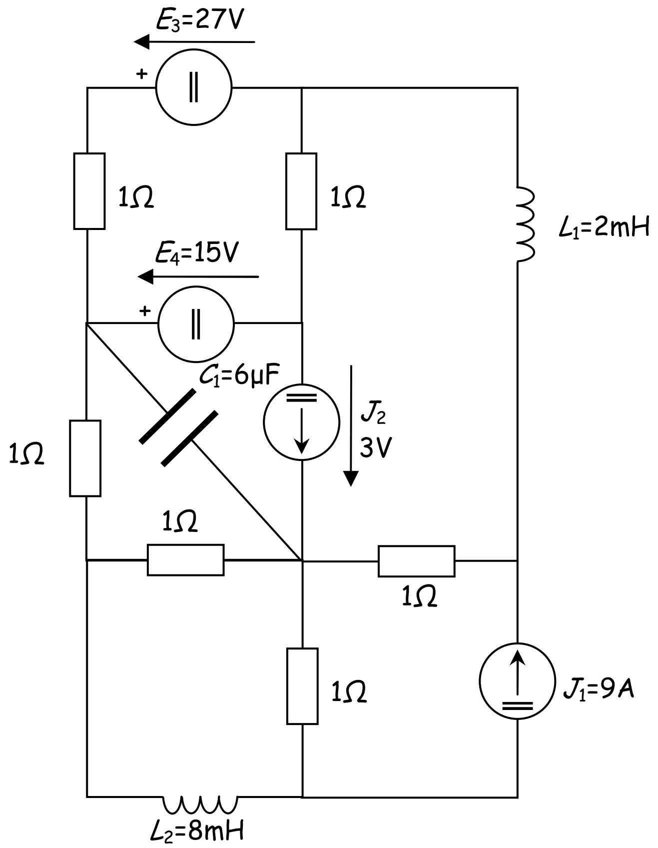
En el circuito de la figura se sabe que la tensión de la fuente J_2 es 3V.
Determínese:

1. Corrientes de todas las ramas.
2. Carácter y potencias del resto de las fuentes.
3. Energía asociada a las bobinas y el condensador.
4. Balance de potencias.

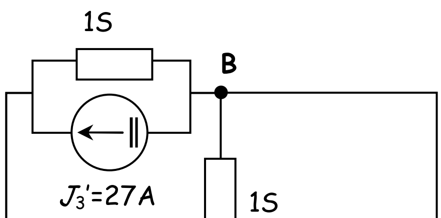
Nota: es indispensable plantear el sistema matricial de ecuaciones y resolverlo por métodos algebraicos.

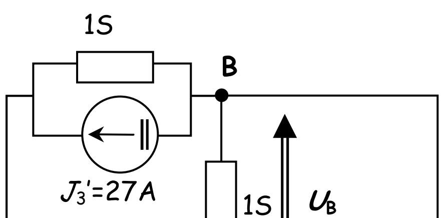


Primero se eliminan del circuito los elementos almacenadores.
En segundo lugar nos valemos de la información de la fuente J_2 para resolver de una forma más sencilla el circuito, empleando el método de nudos. Para aplicar el método, la fuente real de tensión E_3 se transforma en fuente real de corriente, J_3', la fuente E_4 también hay que transformarla. Sin embargo y dado que es ideal, y para no modificar la geometría del circuito se aplica la regla de la sustitución, sustituyendo la fuente por una fuente de corriente de valor desconocido pero con una tensión en bornes de 15V.

De la fuente de corriente J_2 se conoce la tensión en sus bornes (3V) con la polaridad del esquema.

El circuito tiene 5 nudos, se toma el nudo E como nudo de referencia. A continuación se definen las cuatro tensiones. Dos de ellas además son conocidas, esa ha sido la razón de escoger el nudo E como referencia: para que dos de las cuatro tensiones sean conocidas.





B

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C = 3 \\ U_D = 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 9-27 \\ J_2 \\ J_4 + 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -18 \\ J_2 \\ J_4 + 27 \end{bmatrix}$$

Primero para obtener J_4 se plantea la obtención de U_D:

Si se aplica el método general, por Cramer, se deben resolver determinantes de dimensión 4X4. Que se resuelven por adjuntos.

$$\Delta Y = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta Y = 3(18-3-2) - 2(-2+1+12) + 1(-9-2+1) = 39 - 22 - 10 = 7$$

Vamos a plantear aquellas ecuaciones de las que conocemos el valor de la tensión para poder determinar los valores de la J_4 y de la J_2. Se obtendrá un sistema de dos ecuaciones que resolveremos por sustitución.

Planteamos la ecuación de U_D.

$$U_D = 15 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 3 & -1 & -18 \\ -2 & -1 & 3 & J_2 \\ -1 & -1 & 0 & J_4+27 \end{vmatrix}}{\Delta Y} = \frac{9\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} - 18\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} - J_2\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (J_4+27)\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{7} =$$

$$105 = 9(-9-2+1) - 18(-4+2+9) - J_2(-6-3) + (J_4+27)(27-12-3) = -90-126+9J_2+12J_4+324$$

$$-3 = 12J_4 + 9J_2$$

A continuación se plantea la ecuación de U_C:

$$U_C = 3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -9 & -1 \\ 0 & 3 & -18 & -1 \\ -2 & -1 & J_2 & 0 \\ -1 & -1 & J_4+27 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta Y} = \frac{-9\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 18\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + J_2\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} - (J_4+27)\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{7} =$$

$$21 = -9(-2+1+12) + 18(-6-2+1) + J_2(18-3-3) - (J_4+27)(-6-3) = -99-126+12J_2+9J_4+243$$

$$3 = 9J_4 + 12J_2$$

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} -3 = 12J_4 + 9J_2 \\ 3 = 9J_4 + 12J_2 \quad \rightarrow J_4 = \dfrac{3-12J_2}{9} \end{cases}$$

Se sustituye en la primera ecuación el valor de J_4 y se obtiene el valor de J_2:

$$-3 = 12 \cdot \frac{3-12J_2}{9} + 9J_2 = 4 - 16J_2 + 9J_2 = -7J_2 + 4 \ \rightarrow \ J_2 = \frac{-3-4}{-7} = 1A$$

$$J_4 = \frac{3-12 \cdot 1}{9} = -1A$$

Finalmente obtenemos J_4

$$J_4 = \frac{3-12 \cdot 1}{9} = -1A$$

Ahora vamos a determinar las otras dos tensiones de nudos que faltan:

$$U_A = \frac{\begin{vmatrix} -9 & 0 & -2 & -1 \\ -18 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 26 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta Y} = \frac{1\begin{vmatrix} -18 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 26 & -1 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -9 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 26 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -9 & 0 & -2 \\ -18 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{7} =$$

$$\frac{1(234+1-26-54) - 1(2-52-27) + 2(-81-36+6+9) = 155+77-204}{7} = \frac{28}{7} = 4V$$

$$U_B = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -9 & -2 & -1 \\ 0 & -18 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 26 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta Y} = \frac{1\begin{vmatrix} 0 & -18 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 26 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & -9 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 26 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -9 & -2 \\ 0 & -18 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{7} =$$

$$\frac{1(54+52-1)-1(27+104-2-234)+2(-162-18+72+3)=105+105-210}{7} = 0\text{V}$$

En este caso sin embargo, hay un método más sencillo para resolver el sistema de ecuaciones matricial, que consiste en desarrollar las filas. De esta forma se evita bastante trabajo. Véase a continuación:

PRIMERA FILA

$$3U_A - 2{\cdot}3 - 1{\cdot}15 = -9 \rightarrow U_A = \frac{-9+15+6}{3} = 4\text{V}$$

SEGUNDA FILA

$$3U_B - 1{\cdot}3 - 1{\cdot}15 = -18 \rightarrow U_B = \frac{-18+15+3}{3} = 0\text{V}$$

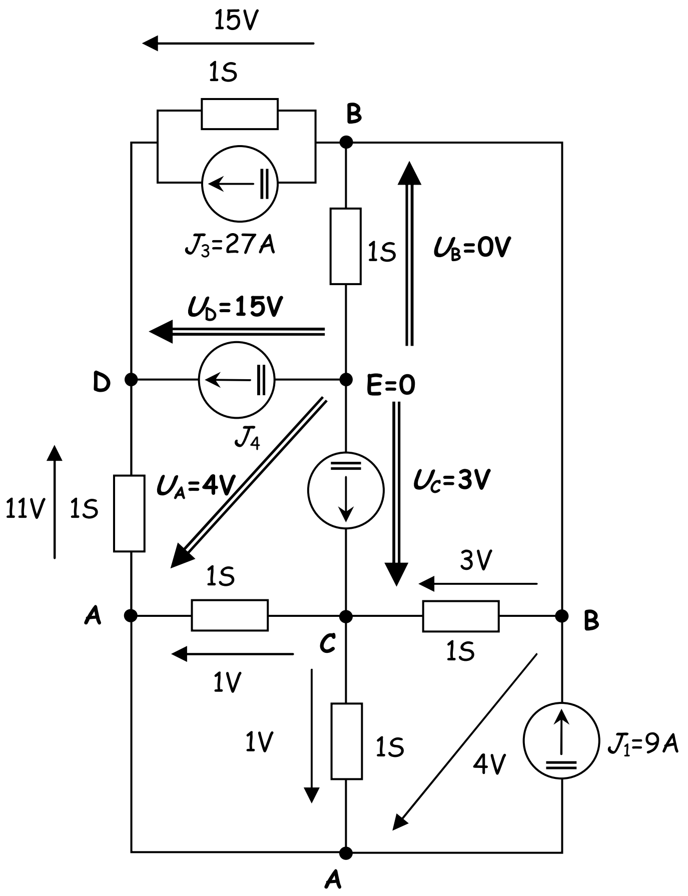
TERCERA FILA

$$-2U_A - U_B + 3{\cdot}3 = J_2 \rightarrow -2{\cdot}4 - 0 + 9 = J_2 = 1A$$

CUARTA FLA

$$-1U_A - 1{\cdot}U_B + 2{\cdot}15 = J_4 + 27; \quad -1{\cdot}4 + 2{\cdot}15 = J_4 + 27 \rightarrow J_4 = -4 + 30 - 27 = -1A$$

Las tensiones de todas las ramas:



$$U_{DB} - U_D + U_B = 0$$
$$U_{DB} = 0 + 15 = 15\text{V}$$

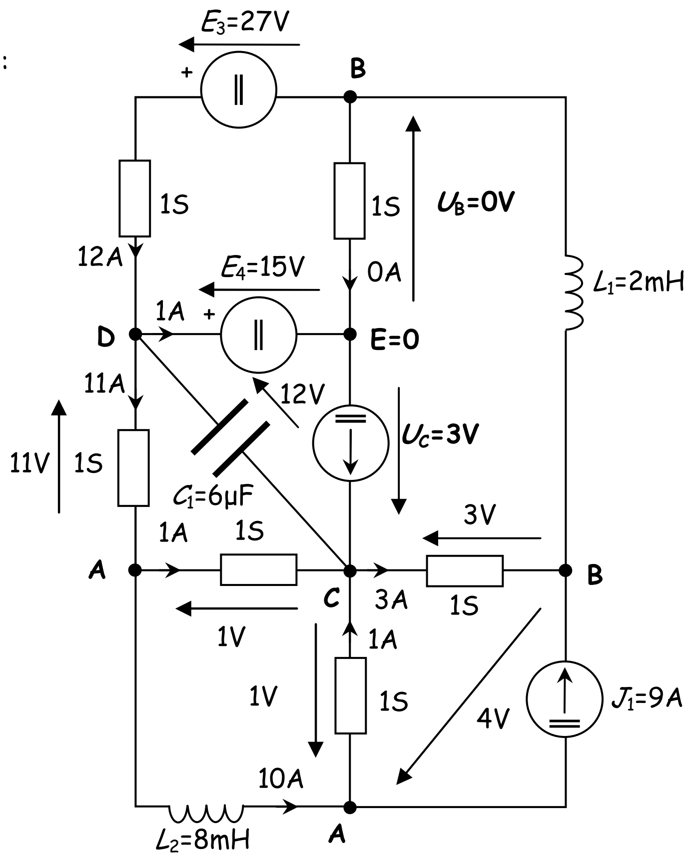
$$U_{DA} - U_D + U_A = 0$$
$$U_{DA} = 15 - 4 = 11\text{V}$$

$$U_{AC} - U_A + U_C = 0$$
$$U_{AC} = 4 - 3 = 1\text{V}$$

$$U_{CB} - U_C + U_B = 0$$
$$U_{DB} = 3 + 0 = 3\text{V}$$

$$U_{AB} - U_{AC} - U_{CB} = 0$$
$$U_{AB} = 1 + 3 = 4\text{V}$$

1 Las corrientes de todas las ramas:



2 Carácter y potencia (total) de las fuentes

La fuente E_3 trabaja como GENERADOR
$P_{E3} = 27 \cdot 12 = 324W$

La fuente E_4 trabaja como RECEPTOR
$P_{E4} = 15 \cdot 1 = 15W$

La fuente J_1 trabaja como RECEPTOR
$P_{J4} = 9 \cdot 4 = 36W$

3 Energía asociada a bobinas y condensadores

$$W_{L1} = \frac{1}{2} L_1 \cdot I_{L1}^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 10^{-3} \cdot 12^2 = 144mJ$$
$$W_{L2} = \frac{1}{2} L_2 \cdot I_{L2}^2 = \frac{1}{2} 8 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 = 0{,}4J$$
$$W_C = \frac{1}{2} C \cdot U_{DC}^2 = \frac{1}{2} 6 \cdot 10^{-6} \cdot 12^2 = 432\mu J$$

4
Potencia generada: $P_{J1} + P_{E3} = 3 + 27 \cdot 12 = 3 + 324 = 327W$

Potencia consumida: $P_{J1} + P_{E4} + P_R = 9 \cdot 4 + 15 \cdot 1 + 12^2 + 11^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 = 327W$