Análisis Matemático de Funciones reales de una y varias variables reales

Guía de la asignatura

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria Politécnica de Donostia
Universidad del País Vasco

José Ignacio Barragués Fuentes
Iera Arrieta Cortajarena
Pedro Nieto Larrondo
Arantxa Zatarain Gordoa
Cristina Alcalde Valverde
Juncal Manterola Zabala.

ÍNDICE

1. ¿Qué significa aprender?

Aprender no sólo es almacenar en la cabeza información. Aprender no es sólo conocer dónde se encuentra la información. Aprender no es sólo ser capaz de resolver ejercicios parecidos a los que el profesor ha explicado en clase o a los que aparecen en un libro. Aprender es ser capaz de resolver problemas en cierto ámbito de trabajo.

Pero, ¿qué es un problema? Un problema es una situación que necesita ser resuelta pero que es *nueva* para nosotros, es decir, no conocemos de entada un modo de resolverla.

Observa la diferencia entre problema y ejercicio. Un ejercicio es también una situación que necesita ser resuelta, pero que no es nueva para nosotros, es decir, conocemos un modo de resolverla.

De esta forma, tener conocimiento es tener la capacidad de enfrentarse de una forma *competente* a los problemas. Así llegamos a la palabra clave: competencia.

2. ¿Qué es una competencia?

Una competencia es una combinación de conocimientos, técnicas, habilidades, actitudes y valores que permiten desarrollar de forma adecuada una función, tarea o actividad en cierto ámbito. Por ejemplo, algunas de estas competencias son:

→Identificar las diferentes partes de que consta un problema
→Buscar, organizar y representar datos para elaborar cuadros y tablas
→Utilizar técnicas para el trabajo de laboratorio

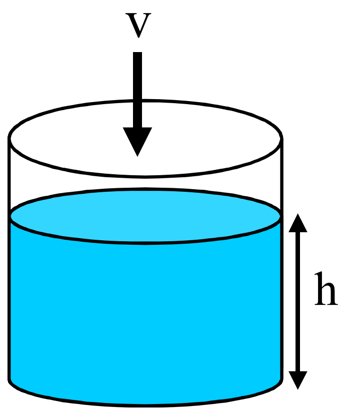
→Interpretar observaciones, datos, medidas
→Describir situaciones
→Comunicar, informar, argumentar…

Cada asignatura de unos estudios superiores contribuye a que adquieras esas competencias. La contribución de cada asignatura de llama “competencias de la asignatura”.

Observa una diferencia importante respecto al modo “tradicional” de enseñanza: ahora, el objetivo fundamental de aprendizaje de la asignatura no es un temario. Por supuesto, existe un temario para cada asignatura, pero el temario es un medio para que adquieras lo realmente importante: las competencias.

3. ¿Qué es el Análisis Matemático?

Al ingeniero, al científico, al técnico, se le plantean problemas para los cuales puede necesitar diversas teorías matemáticas. Algunas de estas teorías son: Análisis Matemático, Álgebra, Estadística, Análisis Numérico y otras muchas. Análisis Matemático nos da instrumental para estudiar el modo en que unas variables dependen de otras variables. Por ejemplo (ver figura), supongamos que llenamos un depósito cilíndrico a razón de V litros por segundo. ¿A qué velocidad cambia la altura H del líquido?



4. Las cuatro competencias de Análisis Matemático

También la asignatura de Análisis Matemático contribuye a que vayas adquiriendo poco a poco esas competencias valiosas. Estas son las cuatro competencias de la asignatura:

COMPETENCIA 1.-Reconocer las teorías y los conceptos de Análisis Matemático que son aplicables para la resolución de problemas planteados en el ámbito de las Ciencias y la Ingeniería.

COMPETENCIA 2. Utilizar los conceptos y procedimientos del Análisis Matemático para la resolución de problemas planteados en el ámbito de las Ciencias y la Ingeniería.

COMPETENCIA 3.-Explicar y justificar el proceso que se ha seguido para la resolución del problema mediante teorías, conceptos y procedimientos de Análisis Matemático.

COMPETENCIA 4.- Utilizar el ordenador como herramienta de construcción de modelos matemáticos destinados a resolver problemas en el ámbito de las Ciencias y la Ingeniería.

Por supuesto, no entiendes lo que significan esas competencias, las encuentras vagas y poco concretas y entenderías mejor que te dijéramos cuál es el temario que tendrás que estudiar. Dejemos el temario para luego. Vamos a intentar explicar qué significan las competencias.

5. ¿Qué significan las competencias?

Competencia 1

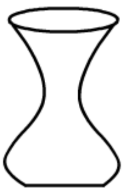
COMPETENCIA 1.-Reconocer las teorías y los conceptos de Análisis Matemático que son aplicables para la resolución de problemas planteados en el ámbito de las Ciencias y la Ingeniería.

El ingeniero, el técnico, el científico, debe saber resolver ejercicios matemáticos, por ejemplo calcular la derivada de una función en un punto o resolver una ecuación diferencial. Pero a veces un problema se puede resolver mediante Análisis Matemático pero está "disfrazado", no sabemos qué conceptos matemáticos podrían servirnos para encontrar una solución. Pues bien, el ingeniero debe saber quitar el "disfraz" a esos problemas, reconocerlos y aplicar un procedimiento conocido para obtener la solución.

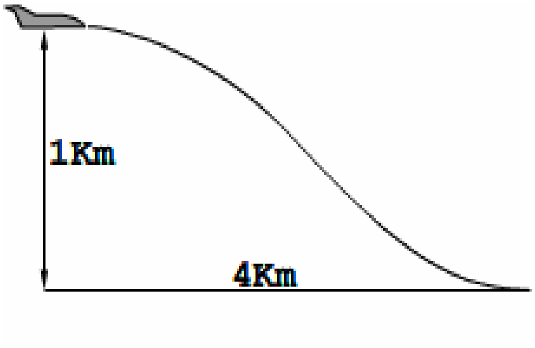
Veamos algunos ejemplos de problemas para los cuales no es nada fácil darse cuenta de si se trata de derivar, de integrar o de resolver alguna ecuación:

Ejemplo 1. Teclea en una calculadora un número positivo cualquiera. Calcula la raíz cuadrada. Del número resultante vuelve a calcular la raíz cuadrada. Repite este proceso una y otra vez. Verás que siempre termina apareciendo en la pantalla el número 1. ¿Por qué?.

Ejemplo 2. Coge un número positivo cualquiera B. Coge otro número x. Haz la cuenta 0.5(x+B/x). Al número resultante llámalo x. Aplica a este nuevo valor de x la misma operación 0.5(x+B/x). Repite varias veces el proceso. Verás que cada vez el valor de x está más próximo a la raíz cuadrada de B. Así pues, podemos emplear este resultado para calcular aproximaciones de raíces cuadradas. Pero, ¿por qué funciona este procedimiento?



Ejemplo 3. La figura representa una vasija a la que echamos agua a ritmo constante, de modo que en cada instante el agua alcanza cierta altura h. ¿Eres capaz de dibujar la gráfica de h?



Ejemplo 4. Un avión inicia el descenso para tomar tierra desde 1 Km de altitud a 4 Km al oeste de la pista de aterrizaje. Diseñar una trayectoria para el avión, desde su posición actual y hasta tocar tierra.

COMPETENCIA 2. Utilizar los conceptos y procedimientos del Análisis Matemático para la resolución de problemas planteados en el ámbito de las Ciencias y la Ingeniería.

Una vez que hemos reconocido qué "aparato" matemático es útil para resolver el problema, tenemos que ser también capaces de emplearlo. Por ejemplo, de poco sirve saber que nos interesa calcular la derivada de una función en un punto si no somos capaces de hacerlo.

Así pues, debemos ser capaces de aplicar los procedimientos necesarios para resolver el problema. Estos procedimientos a veces son mecánicos, por ejemplo, calcular $y'(0.25)$ si $y(x)=x\cos(x)$. Pero los procedimientos más valiosos para el ingeniero son aquellos que no consisten simplemente en aplicar una receta. Los procedimientos más interesantes son aquellos que exigen razonar, ensayar tentativas de solución, esquematizar, hacer suposiciones, encontrar ejemplos que nos aclaren, buscar información útil, organizar datos, reconocer qué información no nos sirve, etc,

Enseguida vamos a ver en qué consisten algunos de estos procedimientos "pata negra", y para entender lo que significan los aplicaremos al siguiente problema:

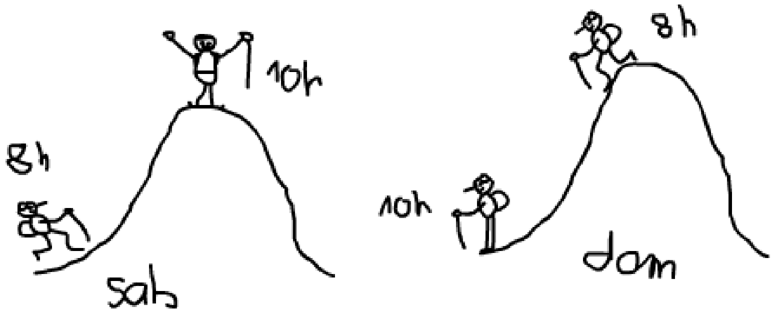
El problema del montañero. El sábado a las 8:00 comienzas a subir la ladera de un monte de 1500 metros de altitud. Llegas a la cima dos horas después. El domingo a las 8:00 emprendes la bajada y tardas en llegar abajo 1.5 horas. La pregunta es: ¿en algún un momento durante la subida y la bajada te encontraste exactamente en el mismo punto del camino a la misma hora?.

Ya tenemos aquí otro problema "disfrazado", que pone a prueba nuestro dominio de la Competencia 1. Un buen modo de comenzar a resolverlo es realizar un Análisis cualitativo. Ten en cuenta que los procedimientos que vamos a explicar no tiene por qué seguir un orden determinado, aunque a veces exista un orden lógico.

<u>Análisis cualitativo:</u> Se trata de un análisis previo del problema, donde todo vale para comprender de qué se trata: encontrar otros casos donde se plantea una

situación similar, pensar en su importancia, para qué puede interesar, ver si somos capaces de resolverlo con lo que sabemos hasta ahora, trazamos gráficos aclaratorios, estudiamos ejemplos sencillos. Hacemos sobre cualquier cosa que nos ayude a entender qué nos traemos entre manos.

En el problema del montañero, puedes empezar por hacer algún dibujo:



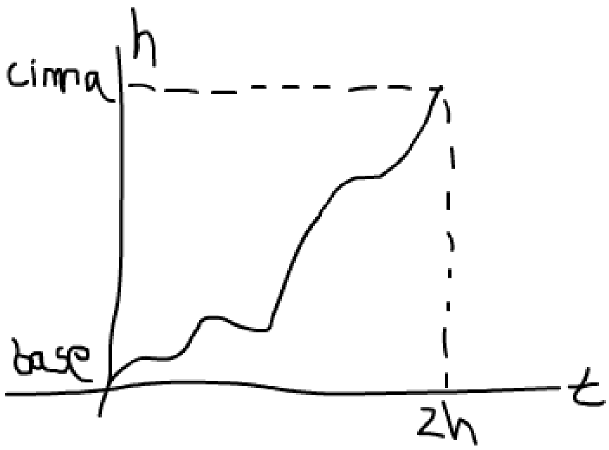
Idea! ¿Y si dibujamos ambos montañeros como si fueran *diferentes*?. Cada uno sale a las 8:00 del mismo día pero uno desde la base y el otro desde la cima. El problema es el mismo:

Los montañeros deben encontrarse en algún punto, ¿no? A no ser que alguno tenga el poder de desmaterializarse y aparecer en otro lugar, como el Rondador Nocturno de X-MEN. Así pues, nos hemos convencido de que sí existe tal instante de coincidencia.

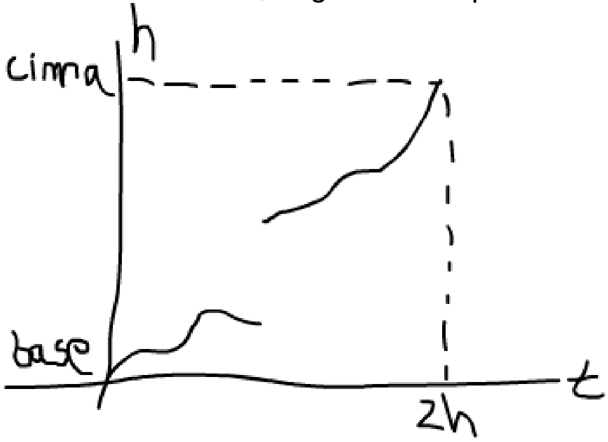
<u>Abstracción:</u> Hay que identificar en el problema elementos que no son esenciales o son particulares. Definimos la situación de una forma general.

El tipo de solución intuitiva que hemos encontrado para el problema del montañero puede ser suficiente en algunos casos, pero nosotros debemos ser capaces de resolverlo también de manera más rigurosa. Ya que el problema habla de “instante de tiempo“ y de “punto en el camino”, habrá que relacionar ambas variables. De modo que tenemos un problema de relación entre variables. Es un buen candidato a ser resuelto empleando Análisis Matemático.

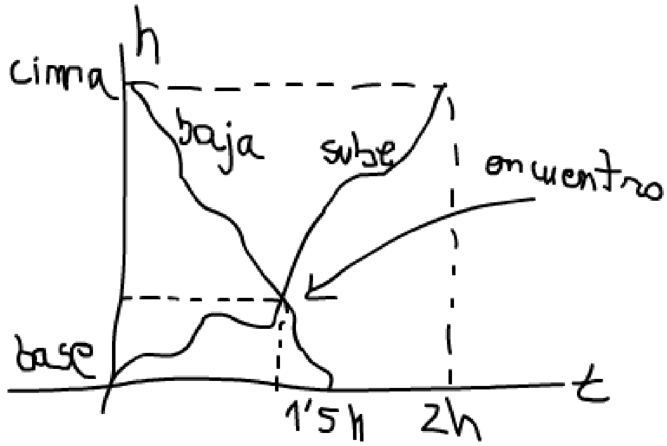
En el problema aparecen varias variables que pueden interesarnos: tiempo, hora de salida y llegada, posición en el camino en un instante determinado, día de la semana…Sin embargo, ese análisis cualitativo que hemos hecho nos indica que sólo un par de variables parecen ser importantes: el instante t y la posición h sobre la ladera. La variable h cambia según la variable t, de modo que h es función de t. Vamos a trazar algún gráfico un poco más “matemático”:



Como no eres el Rondador Nocturno, la gráfica NO puede ser así:



Ahora echamos mano de esa idea de tomar dos montañeros, que al fin y al cabo se trata del mismo problema:



Así pues, ¡sólo se trata de demostrar que un par de curvas se cortan! Definimos la situación: Dadas dos funciones s(t) y b(t) (subida y bajada), se trata de demostrar que existe un valor de t tal que s(t)=b(t). La propiedad que deseamos demostrar se llama tesis. Escribimos nuestra tesis de manera formal:

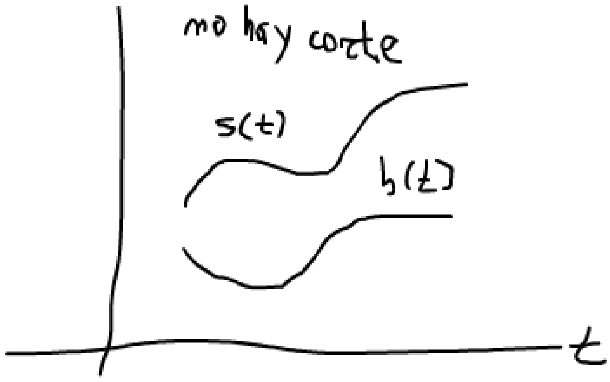
$$\exists t_0 \in [0,1.5] \,/\, s(t_0) = b(t_0)$$

<u>Establecemos hipótesis:</u> Una hipótesis es una suposición que nosotros hacemos a fin de que el problema sea más sencillo de resolver. También establecemos hipótesis para poder utilizar resultados matemáticos que sólo

pueden aplicarse si esas hipótesis son ciertas. Algunas de estas hipótesis son: función creciente, continua, derivable, acotada, etc.

Una hipótesis simplifica el problema, pero también es una exigencia. Cuantas más hipótesis utilicemos más sencillo será el problema, pero menos útil será porque las hipótesis son exigencias que no siempre se darán. Elegimos la teoría matemática aplicable y formulamos de modo formal el problema.

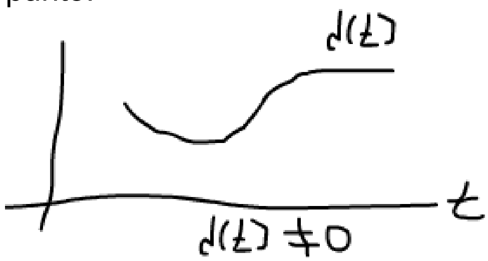
Como no somos Rondador Nocturno, una hipótesis razonable es la de continuidad de s(t) y b(t). Pero no basta con esta hipótesis para garantizar que existe corte entre las gráficas:



Buscar el corte entre las curvas de dos funciones s(t) y b(t) es lo mismo que encontrar un punto en el que la función diferencia d(t)=s(t)-b(t) se anula. Entonces, podemos definir de nuevo el problema:

Hipótesis : d(t) continua
Tesis: $\exists t_0$ / $d(t_0) = 0$

Por supuesto, NO es suficiente con que d(t) sea continua para poder asegurar que se anula en algún punto:



<u>Búsqueda de soluciones:</u> Analizamos la existencia, unicidad o propiedades de la solución, según la teoría que estemos utilizando.

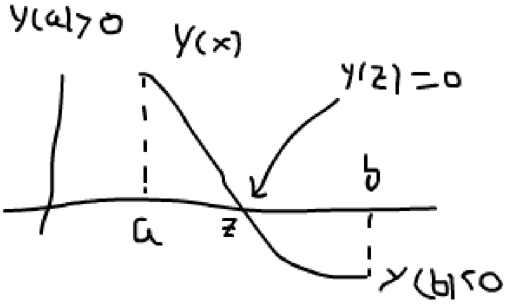
Así pues, van a ser necesarias más hipótesis. Ha llegado el momento de buscar algún resultado matemático que hable de la existencia de algún punto en el que una función se anula. Este resultado existe: es el Teorema de Bolzano. Vamos a recordarlo:

Teorema de Bolzano

Hipótesis: y(x) es una función continua en un intervalo [
a,b] que toma valores de signo opuesto en los extremos del intervalo, es

decir, $y(a)>0$ e $y(b)<0$ o bien $y(a)<0$ e $y(b)>0$.
Tesis: Existe por los menos un punto z localizado en (a,b) tal que $y(z)=0$.

El significado geométrico del Teorema de Bolzano es clarísimo:

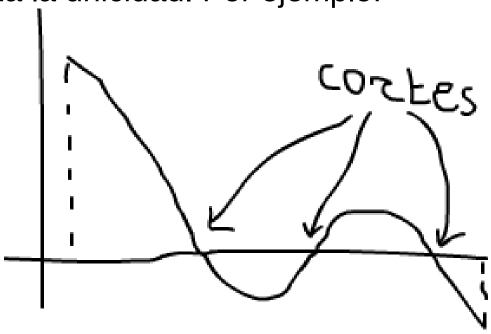


Vamos a aplicar el teorema de Bolzano al problema del montañero. La función es $d(t)=s(t)-b(t)$. El intervalo es [0,1.5]. Veamos si en nuestro caso todas las hipótesis del teorema se cumplen:

$d(t)$ es continua en [0,1.5] (hemos descartado al Rondador).
$d(0)=s(0)-b(0)=0-\text{cima}<0$ (ya que la cima no es cero)
$d(1.5)=s(1.5)-b(1.5)=s(1.5)-0 > 0$ (si $s(1.5)=0$, ya tendíamos un punto de coincidencia, ¿puedes trazar ejemplos de gráficas de $s(t)$ y $b(t)$ para ver qué significa este caso?)

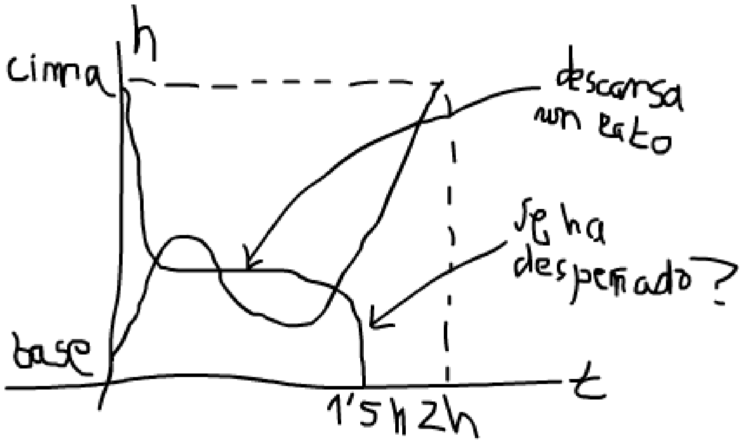
Así pues, el teorema de Bolzano nos asegura que al menos existe un instante en el intervalo (0,1.5) en el que ambas trayectorias se cortan.

En Matemáticas, después de preguntarnos acerca de la existencia, nos preguntamos acerca de la unicidad, es decir, nos preguntamos si existen varias soluciones. En nuestro caso nos damos cuenta enseguida de que podrían existir varios puntos de coincidencia. El teorema de Bolzano es un teorema de existencia, no garantiza la unicidad. Por ejemplo:



<u>Interpretación de las soluciones:</u> ¿Qué significan las soluciones obtenidas? ¿Alguna de ellas tiene sentido desde el punto de vista del planteamiento inicial del problema? ¿Cuáles son sus limitaciones? ¿Son satisfactorias?

Hemos demostrado que el problema del montañero tiene solución. La única condición que hemos impuesto es la de continuidad. Pero esta hipótesis es muy razonable en este tipo de problemas en los que se habla del desplazamiento físico, real, de objetos. Además, nuestro problema puede tener varias soluciones. Imagina que el montañero, durante la subida o la bajada, vuelve sobre sus pasos, se detiene, continúa la marcha…Por ejemplo:



Búsqueda de generalizaciones: ¿Es posible prescindir de alguna de las hipótesis formuladas, de tal modo que obtengamos una solución más general? ¿Tiene interés hacerlo?

Podríamos formular variantes al enunciado del problema. Como ejercicio investiga las siguientes:

Variante 1. Supongamos que durante la bajada te das cuenta de que has olvidado apagar el fuego que hiciste en la cima para calentar el desayuno. Subes de nuevo, lo apagas, descansas un rato y bajas. ¿También en éste caso habrá coincidencia en el espacio y en el tiempo?

Variante 2. Subes para apagar el fuego y por casualidad descubres en la cima una senda que te lleva más arriba. Subes un trecho más y luego emprendes la bajada. ¿También en éste caso habrá coincidencia en el espacio y en el tiempo?

COMPETENCIA 3.-Explicar y justificar el proceso que se ha seguido para la resolución del problema mediante teorías, conceptos y procedimientos de Análisis Matemático.

COMPETENCIA 4.- Utilizar el ordenador como herramienta de construcción de modelos matemáticos destinados a resolver problemas en el ámbito de las Ciencias y la Ingeniería.

El ingeniero, el técnico, el científico, debe ser capaz de escribir un informe en el que se detalle y se justifique todo el proceso que se ha seguido para resolver el problema. Se trata de esquematizar, resumir y explicar el proceso de resolución de un problema determinado, incluyendo la discusión de la situación, su expresión formal, la construcción del modelo analítico, el estudio de la existencia de soluciones, la resolución formal y los resultados teóricos en la que se basa, el análisis de la solución propuesta y la búsqueda de generalizaciones. También debe ser capaz de emplear el ordenador como instrumento para profundizar en el problema que se está resolviendo y para elaborar la solución.

Como ejercicio, explica cuál es el planteamiento formal del problema, cuál ha sido la solución que hemos encontrado, en qué resultados matemáticos se basa, explica bajo qué condiciones la solución es única y qué generalizaciones puedes obtener.

6. El temario de Análisis Matemático

Trabajarás a lo largo de esta asignatura las cuatro competencias mediante el siguiente temario:

Tema 1. Números complejos
Tema 2. Sucesiones numéricas
Tema 3. Funciones reales de una variable real
Tema 4. Estudio local de funciones reales de una variable real
Tema 5. Integración de funciones reales de una variable real
Tema 6. Funciones reales de varias variables reales
Tema 7. Integral múltiple
Tema 8. Integral curvilínea
Tema 9. Ecuaciones diferenciales
Tema 10. La transformada de Laplace.
Tema 11. Introducción al análisis de Fourier.

7. Conocimientos previos que son necesarios para seguir la asignatura

Es necesario que tengas un nivel mínimo de conocimientos matemáticos para que puedas seguir sin dificultad la asignatura. Para ayudarte a lograr ese nivel, las siguientes tablas muestran qué conocimientos concretos son necesarios. Encontrarás dos ejercicios de autoevaluación de conocimientos previos completamente resueltos.

Tabla 1. Conjuntos, trigonometría y operativa general
Conjuntos (pertenencia, inclusión, intersección, unión)
Conjuntos de números (naturales, enteros, racionales, reales)
Binomio de Newton
Área y volumen de figuras elementales
Relaciones trigonométricas elementales
Ecuación de una recta

Tabla 2. La notación matemática
Simbología, definiciones, teoremas (hipótesis y tesis, implicación, equivalencia, negación de propiedades), la demostración matemática (ejemplos y contraejemplos, reducción al absurdo)

Tabla 3. Cálculo diferencial e integral elemental
Conceptos de variable y de función. Gráfica de una función.
Funciones elementales y sus gráficas (exponencial, logarítmica, trigonométricas, potencias, valor absoluto)
Límites y continuidad. Teoremas fundamentales de las funciones continuas definidas en un intervalo [a,b] (Bolzano, valores intermedios, acotación)
Derivabilidad, cálculo de derivadas. Rectas tangentes y normales. Teoremas fundamentales de las funciones continuas y derivables (Rolle, valor medio).
Cálculo de integrales elementales. Fórmula de Newton-Leibniz. Cálculo de áreas.

8. La autoevaluación

Recuerda que el objetivo de la asignatura es que adquieras las cuatro competencias matemáticas que ya hemos explicado. Para que puedas autoevaluar continuamente tu grado de adquisición de tales competencias, hemos preparado algunos ejercicios típicos de exámenes, completamente resueltos. Es importante que trates de resolver todos los problemas antes de comprobar la solución.

9. Bibliografía y otros recursos

Bibliografía básica

Bartle y Shebert. Introducción al Análisis Matemático de una variable. Ed. Limusa Wiley, México, 2001

Larson, Hosteler y Edwards. Cálculo I y II. Ed. Pirámide, Madrid, 2002.

Smith y Minton. Cálculo, volúmenes 1 y 2. Ed. Mc Graw Hill, Madrid, 2002

Kreyszig. Matemáticas avanzadas para Ingeniería. Volúmenes I y II. Ed. Noriega-Limusa, México, 1990.

Apuntes de la asignatura

Para cada uno de los temas, dispones de apuntes de la asignatura. Sin embargo, también necesitarás consultar la bibliografía básica. Los apuntes de la asignatura contienen muchos ejemplos resueltos y ejercicios propuestos, es importante que dediques esfuerzo a resolverlos.

Relaciones de problemas

Dispones de una relación de problemas para cada uno de los temas. Estos problemas están pensados para ejercitar cada una de las competencias de la asignatura, y por ello es importante que dediques esfuerzo para resolver todos ellos.

Software

El ordenador puede ser una herramienta muy interesante tanto para resolver problemas como para entender mejor lo que significan los conceptos. A lo largo de la asignatura aprenderás a utilizar un programa llamado Winplot. Se trata de un software gratuito, disponible en Internet, que ocupa muy poco espacio y que tiene grandes posibilidades para aprender Análisis Matemático. Muchos de los problemas se resolverán utilizando esta aplicación.

Puedes bajar la última versión de Winplot en diversos idiomas, ejemplos y manuales de uso en la siguiente dirección:

http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html