ANÁLISIS MATEMÁTICO DE FUNCIONES REALES DE UNA Y VARIAS VARIABLES REALES
EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN
TEMAS 6 A 11 - EJERCICIO 9

1. Dada la función $z(x, y)$ definida en el recinto $D = \{x \in [0, 2],\ y \in [0, 1]\}$ del modo siguiente:

$$z(x, y) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Se pide:

a) Representarla gráficamente y estudiar su continuidad.

b) Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por la gráfica de $z(x, y)$ e inferiormente por el recinto D.

2. Dada la familia de funciones $y = x^2 + Cx$, donde C es una constante real cualquiera, se pide:

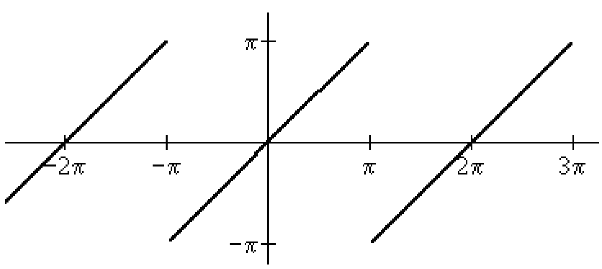
a) Representar gráficamente dicha familia de funciones.

b) Dado un punto cualquiera del plano (x_0, y_0), ¿podemos asegurar que existe alguna curva de la familia que pase por él? ¿Es única esta curva?

c) Encontrar una EDO que tenga como solución esa familia de funciones.

d) Resolver la EDO obtenida en el apartado (c), obteniendo como solución general la familia $y = x^2 + Cx$.

3. Considera la función periódica $y(x)$ que aparece en la figura. Calcula su serie de Fourier $S(x)$, analiza la convergencia de $S(x)$ y representa gráficamente su espectro discreto.



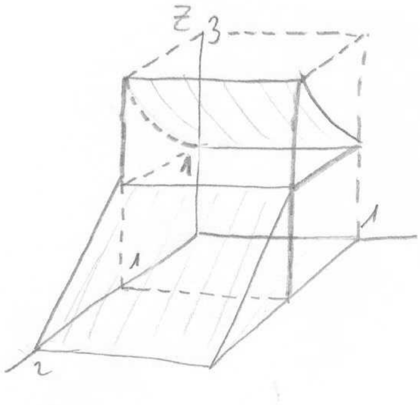
4. Calcular las dos funciones $x(t)$, $y(t)$ que verifican las condiciones siguientes:

$$x' = 2x - 3y$$

$$y' = y - 2x$$
$$x(0) = 8,\ y(0) = 3$$

RESPUESTAS

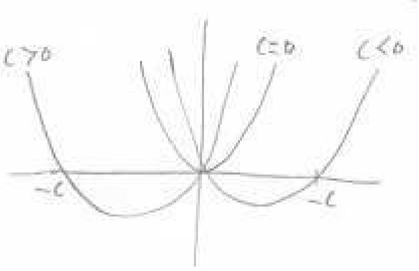
1. $z(x,y) = \begin{cases} 2x^2+1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$



$$V = \int_1^2 \int_0^1 (2-x)\,dy\,dx + \int_0^1 \int_0^1 (2x^2+1)\,dy\,dx =$$

$$= \int_1^2 (2-x)\,dx + \int_0^1 (2x^2+1)\,dx = \frac{13}{6}\ \mathrm{u}^3$$

2.



b) $y_0 = x_0^2 + Cx_0 \Rightarrow C = \dfrac{y_0 - x_0^2}{x_0}$ si $x_0 \neq 0$

Existe una única curva
salvo que $x_0 = 0$

c) $\begin{cases} y = x^2 + Cx \\ y' = 2x + C \Rightarrow C = y' - 2x \end{cases} \Rightarrow y = x^2 + x(y' - 2x)$

$y + x^2 = xy'$

d) $y' - \dfrac{1}{x}\,y = x$ lineal de primer orden

$$y = \mathrm{e}^{\int \frac{dx}{x}} \left(C + \int x\,\mathrm{e}^{-\int \frac{dx}{x}}\,dx \right) = x(C+x)$$

3. $y(x)$ impar $\Rightarrow a_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x\ \mathrm{sen}\,nx\,dx == \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \mathrm{sen}\,nx\,dx & v = \dfrac{-\cos nx}{n} \end{bmatrix} =$$

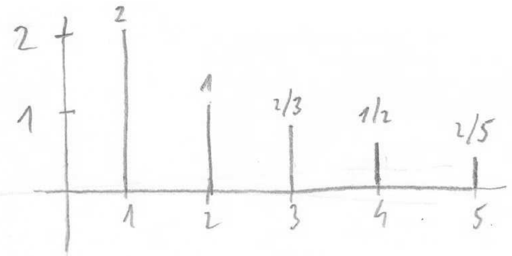
$$= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x\ \cos nx}{n} \Big|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx\,dx \right) = \frac{-2}{n}\, cos\pi n = \frac{2}{n}\,(-1)^{n+1}$$

$$S(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\operatorname{sen} nx}{n}$$

Si $x \neq (2k+1)\pi$: $y(x)$ es continua $\Rightarrow S(x) = y(x)$

Si $x_k = (2k+1)\pi :\Rightarrow S(x_k) = \dfrac{y(x_k^+) - y(x_k^-)}{2} = \dfrac{\pi - \pi}{2} = 0$

ESPECTRO: $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \dfrac{2}{n}\quad n \geq 1$



4. $\mathscr{L}(x) = X$; $\mathscr{L}(y) = Y$

$$\left.\begin{array}{l} sX - 8 = 2X - 3Y \\ sY - 3 = Y - 2X \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (s-2)X + 3Y = 8 \\ 2X + (s-1)Y = 3 \end{array}\right\}$$

$$X = \frac{3}{s-4} + \frac{5}{s+1} \Rightarrow x(t) = 3\,\mathrm{e}^{4t} + 5\,\mathrm{e}^{-t}$$

$$Y = \frac{-2}{s-4} + \frac{5}{s+1} \Rightarrow y(t) = -2\,\mathrm{e}^{4t} + 5\,\mathrm{e}^{-t}$$