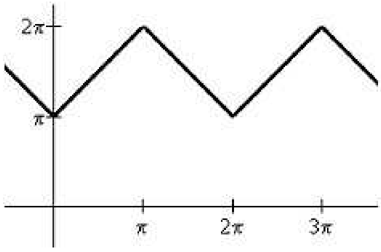
ANÁLISIS MATEMÁTICO DE FUNCIONES REALES DE UNA Y VARIAS VARIABLES REALES
EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN
TEMAS 6 A 11 - EJERCICIO 8

1. Dada la función $r(t)$ periódica de periodo 2π que aparece representada en la figura, calcular su serie de Fourier $S(t)$ y analizar su convergencia.



2. Una sustancia porosa humedecida con cierto líquido y expuesta al aire, pierde su humedad con una rapidez que suponemos como hipótesis que es proporcional al cuadrado del contenido de líquido que contiene.

   a) Construir un modelo matemático para calcular la cantidad de líquido $H(t)$ que contiene la sustancia en cada instante.

   b) Calcular la familia de funciones $H(t)$.

   c) Calcular y representar gráficamente la función $H(t)$ si se sabe que la humedad pasa del valor $H = 1$ al valor $H = 1/7$ en tres días.

3. Considerar las superficies S_1, S_2 y S_3 definidas abajo. Sea V el sólido interior a S_2 y limitado por S_1 y S_3. Representar gráficamente V y calcular su volumen.

$$S_1 : \; x^2 + y^2 = a(z - b) \quad (0 < a < b)$$

$$S_2 : \; x^2 + y^2 = a^2$$

$$S_3 : \; z = 2b$$

4. Supongamos que la transformada de Laplace de cierta función derivable $y(t)$ es $Y(s)$. Calcular la transformada de Laplace $F(s)$ de la función $F(t) = te^{at}y'(t)$, donde a es una constante real.

RESPUESTAS

1. $r(t)$ par $\Rightarrow\ b_n = 0\,\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (t+\pi)\,dt = \frac{3\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (t+\pi)\cos nt\,dt = \left[\begin{array}{ll} u = t+\pi & du = dt \\ dv = \cos nt\,dt & v = \dfrac{\operatorname{sen} nt}{n}\end{array}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left.(t+\pi)\frac{\operatorname{sen} nt}{n}\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \operatorname{sen} nt\,dt\right) = \frac{2}{\pi n^2}\left.\cos nt\right|_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{-4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}$$

$$S(t) = \frac{3\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2}$$

Como $r(t)$ es continua, $S(t) = r(t)\,\forall t \in \mathbb{R}$

2. a) $H'(t) = k\,H^2(t)$

b) $\dfrac{dH}{H^2} = k\,dt \Rightarrow -\dfrac{1}{H} = kt + C \Rightarrow H = \dfrac{-1}{kt+C}$

c) $H(0) = 1 \Rightarrow 1 = -1C \Rightarrow C = -1$

$H(3) = 1/7 \Rightarrow 1/7 = \dfrac{-1}{-1+3k} \Rightarrow k = -2$

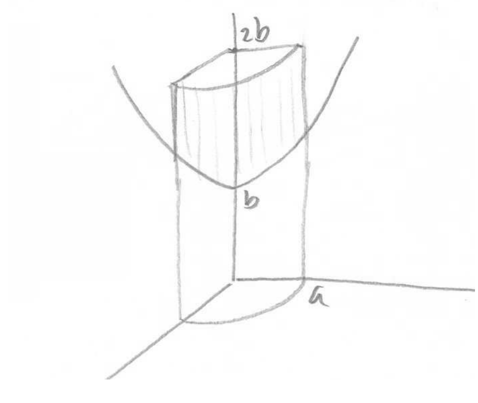
$$H(t) = \frac{1}{1+2t}$$

3. Volumen=

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a\int_{(\rho^2/a)+b}^{2b} \rho\,dz\,d\rho\,d\theta =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a (b - \rho^2/a)\,\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}a^2b - \frac{1}{4}a^3\right)d\theta = (2a^2b - a^3)\frac{\pi}{2}$$



4. $\mathscr{L}(y) = Y$; $\mathscr{L}(y') = sY - y(0)$

$$\mathscr{L}(ty') = (-1)^1 \frac{d}{ds}\,(sY - y(0)) = -(Y + sY') = -sY' - Y$$

$$\mathscr{L}(\mathrm{e}^{at} t\, y') = -(s-a)Y'(s-a) - Y(s-a)$$