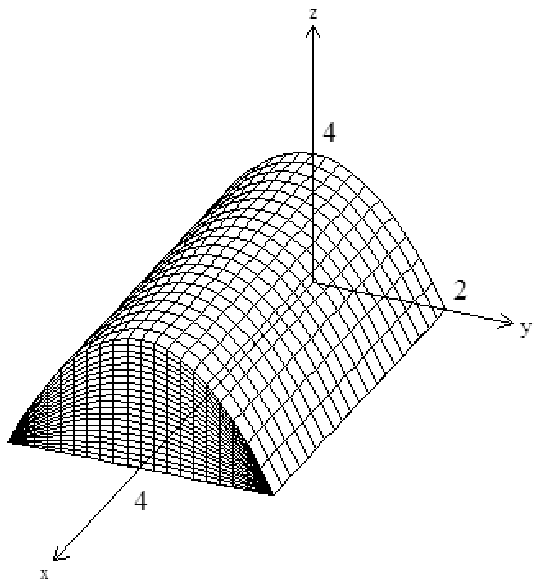
ANÁLISIS MATEMÁTICO DE FUNCIONES REALES DE UNA Y VARIAS VARIABLES REALES
EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN
TEMAS 6 A 11 - EJERCICIO 7

1. El área de un paralelogramo de lados adyacentes a y b, viene dada por la relación $A = ab \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo que forman dichos lados.

   a) Calcular los ritmos de cambio de A respecto de a y de b para $a = 10$, $b = 20$, $\theta = \pi/2$.

   b) Supongamos que a, b y θ varían en el tiempo según las relaciones $a = 2t$, $b = 4t, \theta = t\pi/10$. Calcular el ritmo de A respecto a t para los mismos valores de a, b, θ.

2. Dado el cilindro parabólico representado en la figura, calcular su centro de gravedad, suponiendo que la densidad puntual $d(x, y, z)$ es constante.



3. Resolver la EDO

$$(3xy^2 - 5x^3y)dx + (4x^2y - 3x^4)dy = 0$$

   encontrando un factor integrante de la forma $F(x, y) = x^n y^m$:

4. Considerar el sólido S definido por las superficies $z = x^2 + y^2$, $z = 4$. Representar gráficamente S y calcular su volumen.

5. Empleando la transformación de Laplace, resolver el problema:

$$y'' + 2y' + 5y = \mathrm{e}^{-t} \operatorname{sen} t$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 1$$

6. Empleando el método de los coeficientes indeterminados, resolver la EDO

$$y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3x$$

RESPUESTAS

1. $A(a,b,\theta) = ab\operatorname{sen}\theta$

   a) $A_a = b\operatorname{sen}\theta,\ A_a(10,20,\frac{\pi}{2}) = 20$
   $A_b = a\operatorname{sen}\theta,\ A_b(10,20,\pi/2) = 10$

   b) $A(a(t),b(t),\theta(t))$

$$A'(t) = A_a a'(t) + A_b b'(t) + A_\theta \theta'(t) = 2b\operatorname{sen}\theta + 4a\operatorname{sen}\theta + \frac{\pi}{10}ab\cos\theta$$

   para $t=5, a=10, b=20, \theta=\frac{\pi}{2}$

$$A'(5) = 40 + 40 + \frac{\pi}{10}\cdot 0 = 80$$

2.

$$z(x,y) = 4 - y^2,\ \ y\in[-2,2], x\in[0,4]$$

   $d = k$ valor constante:

$$M = k\int\int\int_V dx\,dy\,dz = k\int_0^4\int_{-2}^2\int_0^{4-y^2} dz\,dy\,dx = k\int_0^4\int_{-2}^2 (4-y^2)\,dy\,dx =$$

$$= k\int_0^4 \frac{32}{3}dx \approx 42.67k$$

$$k\int\int\int_V x\,dx\,dy\,dz \approx 85.33k;\ \int\int\int_V y\,dx\,dy\,dz = 0$$

$$k\int\int\int_V z\,dx\,dy\,dz = 68.267k$$

$$x_c = \left(\frac{85.33}{42.67}, 0, \frac{68.267}{42.67}\right) \approx (2, 0, 1.6)$$

3.

$$(3xy^2 - 5x^3y)dx + (4x^2y - 3x^4)dy = 0$$

   multiplicamos por $F = x^n y^m$

$$(3x^{n+1}y^{m+2} - 5x^{n+3}y^{m+1})dx + (4x^{n+2}y^{m+1} - 3x^{n+4}y^m)dy = 0$$

$$M_y = N_x$$

$$3(m+2)x^{n+1}y^{m+1} - 5(m+1)x^{n+3}y^m = 4(n+2)x^{n+1}y^{m+1} - 3(n+4)x^{n+3}y^m$$

$$3(m+2)y - 5(m+1)x^2 = 4(n+2)y - 3(n+4)x^2$$

$$y(3m-4n-2) + x^2(3n-5m+7) = 0$$

$$\begin{cases} 3m-4n=2 \\ -5m+3n=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow F = xy^2$$

$$(3x^2y^4 - 5x^4y^3)dx + (4x^3y^3 - 3x^5y^2)dy = 0 \quad \text{exacta}$$

$$\exists u(x,y) \mid \begin{cases} u_x = 3x^2y^4 - 5x^4y^3 \Rightarrow \ u(x,y) = x^3y^4 - x^5y^3 + h(y) \\ u_y = 4x^3y^3 - 3x^5y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

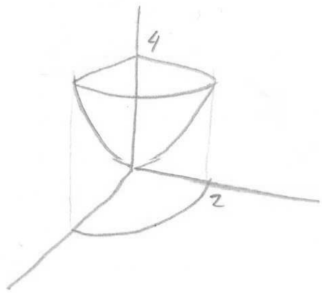
$$\Rightarrow \begin{cases} u_y = 4x^3y^3 - 3x^5y^2 + h'(y) \\ u_y = 4x^3y^3 - 3x^5y^2 \end{cases} \Rightarrow \ h'(y) = 0 \ \Rightarrow \ h(y) = C$$

Solución general:

$$x^3y^4 - x^5y^3 = C$$

4.

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \rho^3 \, d\rho \, d\theta = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 8\pi$$



5.

$$y'' + 2y' + 5y = \mathrm{e}^{-t} \operatorname{sen} t, \quad \mathscr{L}(y(t)) = Y(s)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$s^2Y - 1 + 2sY + 5Y = \mathscr{L}(\mathrm{e}^{-t} \operatorname{sen} t) = \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

$$(s^2+2s+5)y = 1 + \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+2s+5} + \frac{1}{(s^2+2s+5)((s+1)^2+1)}$$

$$s^2+2s+5=(s+1)^2+4$$

$$\frac{1}{(s^2+2s+5)(s^2+2s+2)}=\frac{As+B}{s^2+2s+5}+\frac{Cs+D}{s^2+2s+2}$$

$$\Rightarrow \quad A=C=0,\ B=-1/3, D=1/3$$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}(Y(s))=\frac{-1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2+4}\right)+\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2+1}\right)+$$

$$+\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2+4}\right)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}\operatorname{sen} t+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}\operatorname{sen}(2t)$$

6. $y''+y'-2y=2x^2-3x \quad \Rightarrow \quad m^2+m-2=0 \quad \Rightarrow \quad m=\begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

$$y_{GH}=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$$

$$y_{PC}=y=Ax^2+Bx+C \quad \Rightarrow \quad y'=2Ax+B \quad \Rightarrow \quad y''=2A$$

$$2A+2Ax+B-2Ax^2-2Bx-2C=2x^2-3x$$

$$-2Ax^2+x(2A-2B)+2A+B-2C=2x^2-3x$$

$$A=-1, B=1/2, C=-3/4$$

$$y_{GC}=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}-x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$$