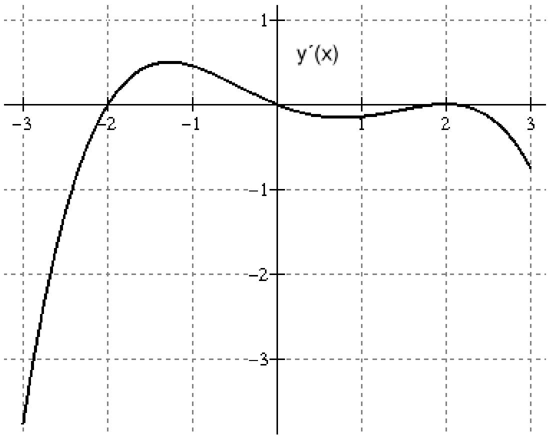
ANÁLISIS MATEMÁTICO DE FUNCIONES REALES DE UNA Y VARIAS VARIABLES REALES
EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN
TEMAS 1 A 5 - EJERCICIO 6

1. Resuelve la ecuación $\operatorname{sen}(z) = 3$
2. La figura adjunta muestra la gráfica de la derivada $y'(x)$ de cierta función $y(x)$ definida en $(-3, 3)$. Se pide:



   a) Estudiar el crecimiento, la concavidad y los extremos relativos de $y(x)$.

   b) Si $y(0) = 0$, representar gráficamente $y(x)$.

3. Hallar el punto de la parábola $y = 9 - x^2$ más próximo al punto $(5, 11)$.
4. Supongamos que la potencia absorbida por cierto circuito eléctrico es:

$$P = \frac{VS}{(R+S)^2}$$

donde V es el valor constante de tensión de alimentación y S y R son valores de resistencias conectadas en el circuito, tales que $S \in [0, 1]$, $R \in [1, \infty)$. Se trata de calcular el valor medio de P en dos casos:

   a) respecto a S (R permanecerá constante)

   b) respecto a R (S permanecerá constante).

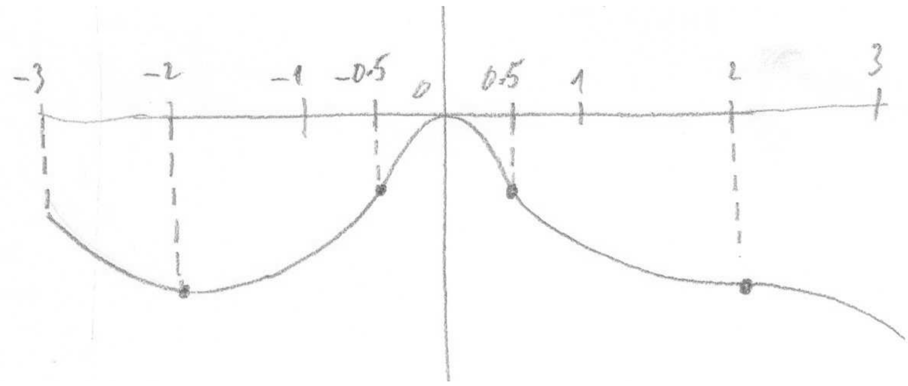
RESPUESTAS

1. $\operatorname{sen} z = 3 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz} = 6i \Rightarrow \mathrm{e}^{2iz} - 1 = \mathrm{e}^{iz}6i \Rightarrow (\mathrm{e}^{iz})^2 - 6i\mathrm{e}^{iz} - 1 = 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{iz} = \dfrac{6i \pm \sqrt{-36+4}}{2} = 3i \pm 2\sqrt{2}i = (3 \pm 2\sqrt{2})i = (3 \pm 2\sqrt{2})_{\frac{\pi}{2}}$

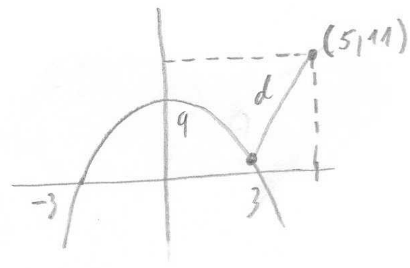
$$iz = \ln\left((3 \pm 2\sqrt{2})_{\frac{\pi}{2}}\right) \Rightarrow z = \frac{1}{i}\ln\left((3 \pm 2\sqrt{2})_{\frac{\pi}{2}}\right) = -i\left(\ln(3 \pm 2\sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)\right)$$

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i(\ln(3 \pm 2\sqrt{2})) \quad k \in \mathbb{Z}$$

2. *a*) $y'(x) > 0 \Rightarrow y(x)$ creciente; $y'(x) < 0 \Rightarrow y(x)$ decreciente.
   $y(x)$ creciente en $(-2, 0)$ y decreciente en el resto.
   $y''(x) > 0 \Rightarrow y'(x)$ creciente e $y(x)$ cóncava.
   $y''(x) < 0 \Rightarrow y'(x)$ decreciente e $y(x)$ convexa.
   $y(x)$ cóncava en $(-3, 1.5) \cup (0.5, 2)$, covexa en el resto.
   Extremos: en $x = 2$, $x = 0$, $x = -2$ hay posibles extremos:
   - $x = -2$: pasa de decreciente a creciente $\Rightarrow$ mínimo local.
   - $x = 0$: pasa de creciente a decreciente $\Rightarrow$ máximo local.
   - $x = 2$: pasa de cóncava a convexa $\Rightarrow$ punto de inflexión. También hay punto de inflexión en $x = -1.5$; $x = 0.5$



3. $d^2 = (x-5)^2 + (2+x^2)^2 = h(x)$



$$h'(x) = 2(x-5)+4x(2+x^2) = 2(2x^3+5x-5)$$

$$h'(x) = 0 \text{ si } x \approx 0.79728$$

$$h''(0.79728) > 0 \Rightarrow \text{ mínimo local}$$

$$d_{min} = \sqrt{h(0.79728)} = \sqrt{24.61} \approx 4.961$$

4. $P = \dfrac{VS}{(R+S)^2}$ $S \in [0,1]$, $R \in [1, \infty]$

   a) La media de P respecto a S:

$$\bar{P}_S = \int_0^1 \frac{VS}{(R+S)^2}\,dS = V\int_0^1 \frac{S}{(R+S)^2}\,dS = V\left[\int_0^1 \frac{1}{R+S}\,dS + \int_0^1 \frac{-R}{(R+S)^2}\,dS\right] =$$

$$= V\,\ln\left(\frac{R+1}{R}\right) + RV\left(\frac{1}{R+1} - \frac{1}{R}\right)$$

   b) La media de P respecto a R:

$$\bar{P}_R = VS \lim_{A\to\infty} \frac{1}{A-1}\int_1^A \frac{1}{(R+S)^2}\,dR = VS \lim_{A\to\infty}\frac{1}{A-1}\left(\frac{-1}{R+S}\right)\Bigg|_{R=1}^{R=A} =$$

$$= -VS \lim_{A\to\infty}\frac{1}{A-1}\left(\frac{1}{A+S} - \frac{1}{1+S}\right) = 0$$